This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

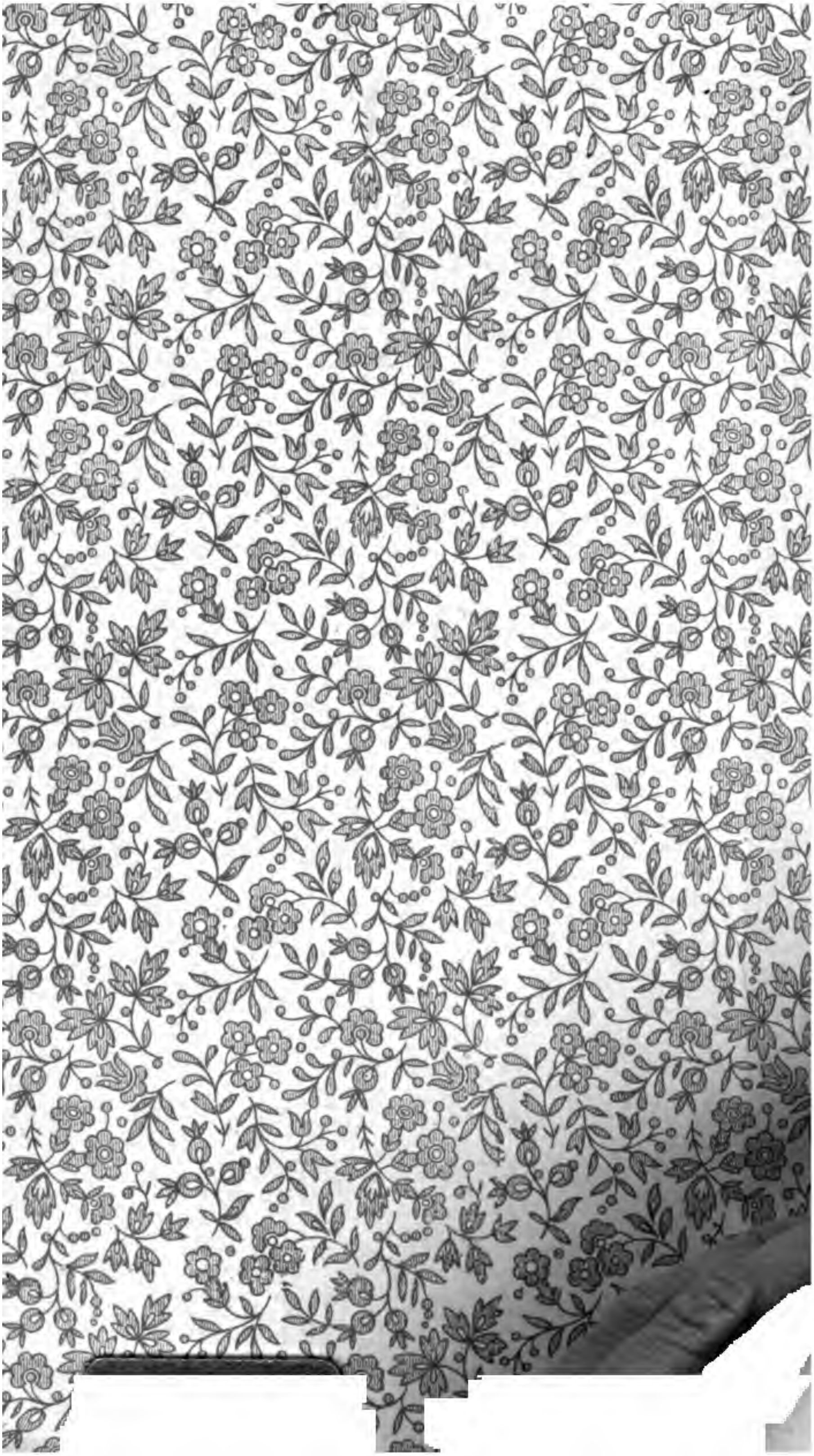
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XIX. Band.

Mit 10 lithographirten Tafeln.

KÖNIGLICHE STERNWARTE
B

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a 28314

Inhalt des neunzehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Appell, à Paris. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes 84

Bäcklund, in Lund. Zur Theorie der Flächentransformationen 387

Béla, in Zürich. Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt. 291

Brunel, à Abbeville. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions 37

Cantor, in Halle a. d. Saale. Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen 588

Christoffel, in Strassburg. Bemerkungen zur Invariantentheorie 280

Enneper, in Göttingen. Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung . . 72

Gordan, in Erlangen. Ueber Büschel von Kegelschnitten 529

Harnack, in Dresden. Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe 235

—— Berichtigung zu diesem Aufsatze 524

Hess, in München. Ueber das Gyroskop. (Mit einer lithographirten Tafel.) 121

Hurwitz, in Hildesheim. Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie 56

—— Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen 67

Jürgens, in Halle a. d. Saale. Das Integral $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen 435

Klein, in Leipzig. Ueber die conforme Abbildung von Flächen 159

—— Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich 565

Krause, in Rostock. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades 103

—— Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 423

—— Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Fortsetzung.) 489

Krey, in Freiburg i. Br. Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten 497

Leonhardt, in Stettin. Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen. 578

Lindemann, in Freiburg i. Br. Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen. (Mit einer lithogr. Tafel) 323

Seite

Lindemann, in Freiburg i. Br. Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen 517

Markoff, à St. Pétersbourg. Sur une question de Jean Bernoulli . . . 27

Nagel, in Ossenheim. Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung 433

Pasch, in Giessen. Ueber die Umkehrung des elliptischen Integrales . . . 155

Picard, à Paris. Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres 569

Poincaré, à Paris. Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires 553

Schur, in Leipzig. Ueber besondere Lagen zweier Tetraeder 429

Simony, in Wien. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. (Mit 8 lithographirten Tafeln.) 110

Sturm, in Münster i./W. Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften 461

—— Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln 487

Veronese, in Chioggia. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens 161

Voss, in Dresden. Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen 1

Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen.

Von

A. Voss in Dresden.

Wird das Längenelement auf einer Oberfläche durch die Formel:

$$(1) \qquad ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

ausgedrückt, so bestehen bekanntlich beim Uebergange zu neuen Variabelen u', v', durch welchen die Gleichung (1) in:

$$ds^2 = e' du'^2 + 2f' du' dv' + g' dv'^2$$

verwandelt wird, die Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} e &= e'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2f' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + g'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2, \\ f &= e' \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + f'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + g' \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}, \\ g &= e'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2f' \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + g'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Man hat sich bisher vorzugsweise mit solchen Coordinatensystemen u', v' beschäftigt, für welche $f' = 0$ ausfällt, während entweder $e' = g'$ oder $e' = 1$ wird; jenes führt zu den Untersuchungen über conforme Abbildung, dieses zu denen über geodätische Linien. Aber es ist ersichtlich, dass man im Allgemeinen in den Gleichungen (2) irgend zwei Relationen zwischen den e', f', g' annehmen kann, um aus ihnen und den genannten Gleichungen die Transformationsrelationen zwischen u, v und u', v' zu bestimmen. Insbesondere kann man also für e' und g' ein für allemal fest gewählte Functionen annehmen, und sich demgemäss das Längenelement *jeder* Fläche in der Form (1) vorstellen, in welcher nur der Coefficient f für die einzelne Fläche charakteristisch ist. Alsdann sind die Abmessungen in den beiden Richtungen der u und v für alle Flächen dieselben. Es wird dadurch ein Zusammenhang zwischen allen Flächen vermittelt, deren geometrischer Sinn sich folgendermassen darstellt. Man denke sich auf irgend einer Fläche ein System von Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ gezeichnet, und stelle sich längs dieser dieselbe mit völlig biegsamen unausdehnsamen Fäden überdeckt vor, die an den Kreuzungsstellen unter sich verknüpft sind. Ein solches Netz kann — wenn auch nicht in seiner ganzen Ausdehnung, so doch theilweise — im Allgemeinen auf jeder anderen Fläche ausgebreitet werden; jede solche Ausbreitung liefert eine Eintheilung der neuen Fläche in Elemente, deren Seiten $\sqrt{e}\,du$, $\sqrt{g}\,dv$ denen der entsprechenden Elemente in der ursprünglichen Fläche gleich sind. Wie man sieht, kommt dies darauf hinaus, *jede Oberfläche als Biegungsdeformation einer bestimmten etwa der Ebene erscheinen zu lassen, mit welcher eine Dehnung von dem besondern Charakter verbunden ist, dass die Abmessungen nach zwei verschiedenen Richtungen ungeändert bleiben.*

Im Folgenden ist zunächst $e = g = 1$ vorausgesetzt. Die Curven $u =$ const., $v =$ const. mögen dann *äquidistante Curven* heissen; das Netz, welches auf der Fläche ausgebreitet ist, lässt sich stets in die Gestalt eines ebenen Netzes mit rechteckigen Maschen bringen, und es wird durch diese Operation die Abbildung eines beliebigen Flächentheils auf ein ebenes Rechteck vermittelt. Die §§ 1.—2. beschäftigen sich zunächst mit den allgemeinen Eigenschaften dieser Netze auf beliebigen Flächen, insbesondere auf Flächen constanter Krümmung. Daran schliessen sich Betrachtungen über die Bestimmung solcher Netze. Dabei können von vornherein zwei Wege eingeschlagen werden. Sucht man nämlich Integrale der beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, Integrale des Systems:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}},$$

so erhält man offenbar Flächen, auf denen ein Curvensystem der gewünschten Art bekannt ist. Zu diesen gehören alle Flächen, welche durch Translation einer beliebigen Curve längs einer anderen Curve entstehen, deren Gleichungen von der Form:

$$x = f_1 u + \varphi_1 v,$$
$$y = f_2 u + \varphi_2 v,$$
$$z = f_3 u + \varphi_3 v$$

sind. Solche Flächen sind im Folgenden als *Translationsflächen* bezeichnet.

Auf eine eigentliche Integration der eben genannten Differentialgleichungen bin ich nicht weiter eingegangen, da in den Fällen, wo dieselbe sich leicht auf Quadraturen zurückführen lässt, man meistens zu solchen Flächen gelangt, auf denen es nicht schwer ist, a priori äquidistante Curven anzugeben. Man kann sich überhaupt zweitens die Aufgabe stellen, auf einer *gegebenen* Fläche Netze der gewünschten Art zu bestimmen. Bei der allgemeinsten Lösung dieser Frage kann ersichtlich eine der Curven u und eine der Curven v willkürlich angenommen werden. Demgemäss kommt die Aufgabe auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung hinaus, von welchen für die Gauss'schen Biegungsflächen der Rotationsflächen leicht particuläre Integrale angegeben werden können.

Aus der grossen Zahl von Untersuchungen, welche nach dieser Richtung hin angestellt werden könnten, habe ich auch hier nur ganz einzelne Fälle anführen zu sollen geglaubt, da eine speciellere Verfolgung der in Rede stehenden Abbildungen sich zu weit von meinem Zwecke entfernt hätte, einige neue, meines Wissens bisher nicht aufgeworfene Gesichtspunkte, welche für die Flächentheorie von Interesse scheinen, zu erörtern. Aus demselben Grunde habe ich auch davon abgesehen, irgend eine der Abbildungen genauer zu beschreiben.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften äquidistanter Curvensysteme.

Schreibt man das Längenelement

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f\,du\,dv \tag{1}$$

in der Form:

$$2ds^2 = (du + dv)^2 (1 + f) + (du - dv)^2 (1 - f),$$

so ergiebt sich der auch geometrisch unmittelbar evidente Satz:

Die Curven $u + v =$ const., $u - v =$ const., *d. h. die Diagonalcurven, welche die Knotenpunkte des Netzes verbinden, bilden ein Orthogonalsystem auf der Fläche.*

Ist f eine Function von $(u + v)$, so sind die Curven $u - v$ geodätische Linien auf der Fläche. Dies ist der Fall bei den Biegungsflächen von Rotationsflächen.

Es seien ferner p, q, r die Richtungscosinus der Normale des Flächenelementes $dw = \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv$, so ist:

$$p = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1 - f^2}} \text{ u. s. w.,}$$

ferner sei:

$$E = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$
$$F = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r\,\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$
$$G = p\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Dann ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\,\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\,\frac{\partial x}{\partial v} + Ep, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= B\,\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\,\frac{\partial x}{\partial v} + Fp, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\,\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\,\frac{\partial x}{\partial v} + Gp, \end{aligned} \tag{2}$$

und analoge Gleichungen gelten für y und z. Dabei hat man:

$$\begin{aligned} Ae + A_1 f &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u}, \\ Af + A_1 g &= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}, \\ Be + B_1 f &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}, \\ Bf + B_1 g &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}, \\ Ce + C_1 f &= \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}, \\ Cf + C_1 g &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}$$

also im vorliegenden Falle, wo $e = g = 1$:

$$\begin{aligned} &B = B_1 = 0, \\ &A = -\frac{f\frac{\partial f}{\partial u}}{1-f^2}, \quad A_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{1-f^2}, \\ &C = -\frac{f\frac{\partial f}{\partial v}}{1-f^2}, \quad C_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{1-f^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für das Krümmungsmass K, welches auch durch die Gleichung:

$$K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}$$

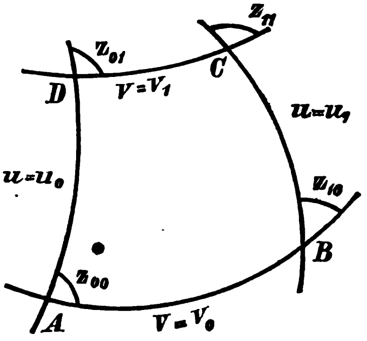
definirt ist, hat man:

$$K = \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{f}{1-f^2}\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{1}{1-f^2}, \tag{4}$$

oder, wenn $f = \cos z$ gesetzt wird, wo z den Winkel zwischen den Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ bedeutet:

$$-K \sin z = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \tag{5}$$

An diese Gleichung knüpft sich zunächst ein sehr einfacher Ausdruck für die Curvatura integra eines Flächenstückes $ABCD$, das von zwei Paaren von Curven $u_0, u_1; v_0, v_1$ begrenzt wird.



Die Curvatura integra Ω ist hier:

$$\Omega = \int K d\omega = -\int \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv.$$

Integrirt man in der Richtung der wachsenden Argumente u, so entsteht:

$$-\Omega = \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \right] dv,$$

und weiter

$$-\Omega = z_{11} - z_{10} - (z_{01} - z_{00}).$$

Führt man an Stelle der Winkel z die inneren Winkel des Vierecks ein, so entsteht:

$$-\Omega = A + B + C + D - 2\pi.$$

Die Curvatura integra eines von zwei Paaren äquidistanter Curven gebildeten Vierecks ist gleich dem negativen Excess desselben. Man kann diesen Satz ausdehnen auf eine Figur mit beliebig viel Ecken, deren Seiten von Theilen äquidistanter Curven gebildet sind. Auf Flächen mit positivem Krümmungsmasse ist daher der Excess immer negativ, bei negativem Krümmungsmass positiv. Dass auf den developpabelen Flächen der Excess gleich Null sein muss, wird evident, wenn man dieselben in die Ebene abwickelt, wobei das Viereck in ein krummliniges Parallelogramm übergeht. Im Besondern wird auf Flächen constanter Krümmung der Excess dem Inhalte proportional. Wir haben hier also ein vollständiges Analogon zu dem bekannten Gauss'schen Satze über die Curvatura eines von geodätischen Linien begrenzten Flächenstückes, und mag bemerkt werden, dass es leicht ist, diesen Satz mit Hülfe der hier gewählten Form des Längenelementes zu beweisen.

Es legt das Vorige die Frage nahe, ob die eine Schaar der Curven, etwa die Curven $v =$ const., selbst geodätische Linien der Fläche sein können. Soll dies der Fall sein, so muss die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

(es ist der Abkürzung halber nur die erste Verticalreihe hingeschrieben), verschwinden, welche ausdrückt, dass die Krümmungsebene der Curve die Flächennormale enthält.

Multiplicirt man Δ mit

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{vmatrix} = E\sqrt{1-f^2},$$

so ergiebt sich leicht:

$$\Delta\Delta' = \Delta' \frac{\partial f}{\partial u},$$

mithin wird $\Delta = \frac{\partial f}{\partial u}$. *Nach* (4) *kann daher nur bei developpabelen Flächen eine der Curvenschaaren ein System geodätischer Linien bilden.*

Von grösserem Interesse ist die Frage, ob es Flächen giebt, auf welchen die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zugleich Haupttangentencurven sind. Bekanntlich sind die Letzteren gegeben durch die Differentialgleichung:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0.$$

Sollen daher $du = 0$, $dv = 0$ selbst Haupttangentencurven sein, so muss $E = 0$, $G = 0$ sein. Nun genügen aber E und G bekanntlich den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$(6) \quad \begin{aligned} 2(eg - f^2)\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) &- (Eg - 2Ff + Ge)\frac{\partial e}{\partial v} \\ &+ (Fg - Gf)\frac{\partial e}{\partial u} + 2(Ge - Ff)\frac{\partial f}{\partial u} \\ &+ (Ef - Fe)\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \\ 2(cg - f^2)\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) &- (Eg - 2Ff + Ge)\frac{\partial g}{\partial u} \\ &+ (Gf - Fg)\frac{\partial e}{\partial v} + 2(Eg - Ff)\frac{\partial f}{\partial v} \\ &+ (Fe - Ef)\frac{\partial g}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man $e = g = 1$, $E = G = 0$, so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{Ff\frac{\partial f}{\partial u}}{1 - f^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{Ff\frac{\partial f}{\partial v}}{1 - f^2} = 0$$

und durch Integration:

$$F = \sqrt{1 - f^2}\ \text{const.},$$

mithin wird:

$$K = -\frac{F^2}{1 - f^2} = -(\text{const.})^2.$$

Damit ist bewiesen, dass *nur auf den Flächen constanter negativer Krümmung ein System äquidistanter Curven aus den Haupttangentencurven gebildet werden kann.**) Aber es lässt sich auch umgekehrt zeigen, *dass auf jeder Fläche mit constanter negativer Krümmung die Haupttangentencurven wirklich ein solches System bilden.***)

Hat man nämlich ein Curvensystem bestimmt, für welches $E = 0$, $G = 0$ ist, während

$$F^2 = k(eg - f^2)$$

wird, so erhält man durch Einsetzen seiner Werthe in die beiden Differentialgleichungen (6) unter Berücksichtigung, dass:

$$2F\frac{\partial F}{\partial u} = k\left(e\frac{\partial g}{\partial u} + g\frac{\partial e}{\partial u} - 2f\frac{\partial f}{\partial u}\right),$$

$$2F\frac{\partial F}{\partial v} = k\left(e\frac{\partial g}{\partial v} + g\frac{\partial e}{\partial v} - 2f\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

die beiden Gleichungen:

$$f\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

$$f\frac{\partial g}{\partial u} - g\frac{\partial e}{\partial v} = 0,$$

aus welchen, da die Determinante $eg - f^2$ nicht verschwinden kann, folgt:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

mithin sind e, g bezüglich unabhängig von v und u und können durch passende Wahl dieser Variabeln in 1 verwandelt werden, wie zu zeigen war.

Das Integral der Curvatura integra eines Flächenstückes, dessen Begrenzung nicht von Curven u, v gebildet wird, lässt sich im Allgemeinen nicht weiter ausführen. Indessen lassen sich ausser den geodätischen Linien noch gewisse Curvensysteme angeben, für welche das Integral einer übersichtlichen geometrischen Deutung fähig ist. Um hierzu zu gelangen, mag vorerst eine allgemeine Massbestimmung mit dem Längenelemente $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ wieder auf der Fläche vorausgesetzt werden.

Es seien durch einen Punkt P die beiden Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ gezogen, deren Tangenten die Richtungscosinus

---

*) Die Ebene ist hier selbstverständlich nicht mit berücksichtigt.

**) Diese Eigenschaft der Haupttangentencurven der Flächen constanter Krümmung ist, worauf ich erst nach Vollendung dieser Arbeit aufmerksam wurde, bereits von Herrn Hazzidakis (Journal von Borchardt, Bd. 88, p. 68) erwiesen. Zugleich findet sich dort die Bemerkung über den Inhalt eines von zwei Paaren solcher Curven begrenzten Vierecks.

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial z}{\partial u};\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

haben. Auf denselben seien zwei zu P unendlich benachbarte Punkte P_u, P_v angenommen, und durch dieselben die benachbarten Curven $u + du$, $v + dv$ gelegt, welche sich in P' schneiden. So entsteht ein elementares Viereck $PP_uP_1P_v$, dessen Betrachtung für das Folgende erforderlich ist.

Es seien nun die unendlich kleinen Winkel zwischen den Tangenten an die Curven $v =$ const. in den Punkten P_1 und P, respective in den Punkten P_v und P durch Θ'_{uv}, Θ'_v bezeichnet, analog die entsprechenden Grössen für die Curven $u =$ const. durch Θ''_{vu}, Θ''_u. Die Richtungscosinus der Tangente an die Curve v im Punkte P_1 sind

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{e}} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}dv\right)\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial e}{e^{\frac{3}{2}}} \text{ u. s. w.,}$$

mithin wird:

$$\Theta'^2_{uv} = -\frac{1}{4}\left(\frac{de}{e}\right)^2$$

$$+\frac{1}{e}\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}dv\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{de}{e}\right)^2 + \frac{1}{e}\left\{(Edu + Fdv)^2 + Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\right\},$$

wo:

$$L = \frac{1}{2}A\frac{\partial e}{\partial u} + A_1\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right),$$

$$M = \frac{1}{2}\left(A\frac{\partial e}{\partial v} + A_1\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$N = \frac{1}{2}\left(B\frac{\partial e}{\partial v} + B_1\frac{\partial g}{\partial u}\right).$$

Hieraus ergiebt sich für $du = 0$ der Werth von $\Theta_v'^2$, dagegen für $dv = 0$ Θ'^2, der Contingenzwinkel der Curve $v =$ const. im Punkte P. Für den Fall $e = g = 1$ wird also:

$$\begin{aligned} \Theta'^2_{uv} &= (Edu + Fdv)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 du^2, \\ \Theta'_v &= Fdv, \\ \Theta'^2 &= \left\{E^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\} du^2, \end{aligned} \tag{7}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} \Theta''^2_{uv} &= (Fdu + Gdv)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 dv^2, \\ \Theta''_u &= Fdu, \\ \Theta''^2 &= \left\{G^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\} dv^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus entnehmen wir zunächst eine Eigenschaft der Haupttangentencurven der Flächen constanter negativer Krümmung. Ist nämlich $E = 0$, $G = 0$, so wird:

$$\Theta' = \frac{\partial z}{\partial u}\, du,$$
$$\Theta'' = \frac{\partial z}{\partial v}\, dv.$$

Bildet man nun das von zwei Paaren von Haupttangentencurven begrenzte Viereck $ABCD$ dadurch auf die Einheitskugel ab, dass man Parallelen zu den Tangenten oder den Hauptnormalen der Begrenzungsurven zieht, so entstehen vier sphärische Curven ab, bc, cd, da, deren Bogenlängen durch dieselben Zeichen dargestellt sein mögen. Und bezeichnet man die jedesmalige Curvatura integra der Curven AB, BC, CD, DA durch:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,$$

so ist

$$\omega_1 AB = ab, \quad \omega_2 BC = bc, \quad \omega_3 CD = cd, \quad \omega_4 DA = da,$$

oder, weil die Haupttangentencurven äquidistante Curven sind:

$$\Omega = AB(\omega_1 - \omega_3) = BC(\omega_2 - \omega_4).$$

Das liefert den Satz:

Die Curvatura integra eines Vierecks auf einer Fläche constanter negativer Krümmung, welches von zwei Paaren von Haupttangentencurven begrenzt wird, ist gleich einer der Seiten multiplicirt in die Differenz der totalen Krümmung dieser und der gegenüberliegenden Seite.

Wir bestimmen ferner die kürzeste Entfernung correspondirender Tangenten (d. h. solcher, die einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden) in den Punkten P und P_1. Bekanntlich ist für zwei Gerade, deren Neigung und kürzester Abstand durch Θ, d bezeichnet werden, und deren Gleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos\alpha_1 + x_1, & x &= \lambda \cos\alpha_2 + x_2, \\ y &= \lambda \cos\beta_1 + y_1, & y &= \lambda \cos\beta_2 + y_2, \\ z &= \lambda \cos\gamma_1 + z_1, & z &= \lambda \cos\gamma_2 + z_2 \end{aligned}$$

gegeben sind:

$$d \sin\Theta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{e}} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\, du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, dv\right) \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\partial x}{\partial u}\, d\, \frac{1}{\sqrt{e}} + \cdots,$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\, dv^2\right],$$

so erhält man, wenn die kürzesten Entfernungen durch d'_{uv}, d''_{vu} bezeichnet werden:

$$d'_{uv}\Theta'_{uv} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{1}{\sqrt{e}} \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\,dv\right)\frac{1}{\sqrt{e}} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{eg-f^2}{e}}\,dv(Edu + Fdv),$$

und ebenso:

$$d''_{vu}\Theta''_{vu} = \sqrt{\frac{eg-f^2}{g}}\,du(Fdu + Gdv).$$

Die Curven $Edu + Fdv = 0$, $Fdu + Gdv = 0$ sind daher die Berührungscurven der developpabelen Flächen, deren Erzeugende die Tangenten der Curven u, v auf der Fläche sind.

Nimmt man jetzt wieder $e = g = 1$, so ist nach (7) und (8) für diese Curven:

$$\Theta'_{uv} = \frac{\partial z}{\partial u}\,du,$$

$$\Theta''_{vu} = \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man die Curvatura integra auch bestimmen für Flächenstücke, die von Curven dieser Art begrenzt sind, wie dies in den folgenden Beispielen angedeutet ist.

1) *Dreieck* ABC, begrenzt von zwei Curven $AB(u = u_0)$, $CB(v = v_0)$ und einer Curve AC. Ist AC eine Curve $Edu + Fdv = 0$, so integrirt man nach v und erhält:

$$-\Omega = z_{11} - z_{01} - \int_{AC} \Theta'_{uv},$$

wo z_{11}, z_{01} die beiden Winkel bedeuten, welche von den Curven u, v in den Punkten B, C gebildet werden.

2) *Viereck* $ABCD$, begrenzt von zwei Curven $AB(u = u_0)$, $CD(u = u_1)$ und zwei Curven $Edu + Fdv = 0$. Man lege durch C, D zwei Curven $v = \text{const.}$, welche die Curve $u = u_0$ in A_1, B_1 schneiden, so wird:

$$-\Omega = z_{01} - z_{00} - \int_{AC} \Theta'_{uv} - (z_{11} - z_{01}) + \int_{DB} \Theta'_{uv}$$

$$- \text{Curvatura von } CA_1B_1D.$$

Da aber die negative Curvatura von CA_1B_1D gleich:

$$(z_{11} - z_{01}) - (z_{10} - z_{00}),$$

so wird:

$$-\Omega = \int_{DB} \Theta'_{uv} - \int_{AC} \Theta'_{uv}.$$

3) *Viereck* $ABCD$, begrenzt von zwei Curven $Edu + Fdv = 0$, AC und DB, sowie von zwei Curven $Fdu + Gdv = 0$, CD und AB. Man ziehe durch die Eckpunkte C und B zwei Curven $v = \text{const.}$, durch A und D zwei Curven $u = \text{const.}$, welche sich untereinander in den Punkten $abcd$ schneiden. Die Curvatura von $ABCD$ ist dann gleich der von $abcd$, vermehrt um die der vier Dreiecke AaC, DdB, Ccd, AbB. Versteht man unter A, B, C, D die Winkel, welche die Curven u, v in den Eckpunkten des Vierecks $ABCD$ bilden, unter z_{11}, z_{10}, z_{01}, z_{00} die Winkel zwischen eben diesen Curven an den Punkten d, b, c, a, bezeichnet man ferner die Curvatura integra eines Flächenstückes durch eine eckige Klammer, so hat man:

$$-[AaC] = C - z_{00} - \int_{AC} \Theta'_{uv},$$

$$-[DdB] = -(z_{11} - B) + \int_{BD} \Theta'_{uv},$$

$$-[CcD] = -(D - z_{01}) + \int_{CD} \Theta''_{vu},$$

$$-[AbB] = (z_{10} - A) - \int_{AB} \Theta''_{vu},$$

$$-[abcd] = z_{11} - z_{10} - (z_{01} - z_{00}),$$

also endlich:

$$-[ABCD] = C + B - (D + A)$$
$$+ \int_{BD} \Theta'_{uv} - \int_{AC} \Theta'_{uv} + \int_{CD} \Theta''_{vu} - \int_{AB} \Theta''_{vu}.$$

§ 2.

Eigenschaften der Translationsflächen. Rotationsflächen, welche zugleich Translationsflächen sind.

Es ist bereits eingangs hervorgehoben, dass auf den Flächen, welche durch Translation einer Curve längs einer anderen Curve erzeugt werden, diese Curven ein System von äquidistanten bilden. Die im Paragraph 1. entwickelten Eigenschaften eines solchen Netzes sind daher insbesondere solche der Translationsflächen.

Herr Lie hat in seinen Untersuchungen über Minimalflächen (diese Annalen XIV, p. 332 ff.) eine Reihe anderer wichtiger Eigenschaften dieser Flächen bemerkt. Von diesen führe ich zunächst die folgende an:

Da für Translationsflächen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

so wird $F = 0$, mithin folgt für die Differentialgleichung der Haupttangentencurven

$$E du^2 + G dv^2 = 0.$$

*Die Haupttangenten sind daher harmonisch zu den Tangenten der Curven u und v.**)

Fallen daher an einer Stelle die Tangenten der beiden Curven u und v zusammen, *so ist ihre gemeinsame Richtung die einer Haupttangente der Fläche.* Im Allgemeinen wird es nur eine endliche Zahl solcher Tangenten geben. Wenn aber für die beiden Curven u und v die Tangenten sich paarweise als parallel zuordnen lassen, so haben sie eine gemeinsame Curve Σ zur Umhüllungscurve,**) *und diese ist,* wie man hinzufügen kann, *eine singuläre Haupttangentencurve* der Fläche, welche durch blosse Elimination bestimmt werden kann. —

Es ist ferner das Krümmungsmass K der Fläche bestimmt durch die Gleichung:

$$EG = K \sin^2 z.$$

Bezeichnet man die Krümmungshalbmesser der Curven u und v in dem betreffenden Punkte durch ϱ_1 und ϱ_2, ferner mit α_1 und α_2 die Winkel ihrer Hauptnormalen mit der Flächennormale, so hat man zufolge der Werthe von E und G:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\varrho_1}\,\frac{\cos \alpha_2}{\varrho_2} = K \sin^2 z,\quad f = \cos z.$$

Nebenbei folgt, dass Translationsflächen immer zwei völlig getrennte parabolische Curven enthalten, welche durch die Gleichungen $E = 0$, $G = 0$ bestimmt sind.

Von Interesse scheint die Frage, ob eine Translationsfläche zugleich durch Rotation um eine Axe erzeugt werden könne. Diesen Charakter besitzt zunächst der Rotationscylinder, ferner das Rotationsparaboloid.

Letzteres erkennt man sofort, wenn man die Gleichung desselben in der Form:

$$2cz = u^2 + v^2,$$
$$x = u,$$
$$y = v$$

schreibt. Durch die folgende Betrachtung erkennt man eine weitere Classe von Flächen der genannten Eigenschaft.

Man denke sich eine Fläche S durch Rotation einer Curve c um die z-Axe erzeugt. Man übe ferner auf die Curve zwei gleiche entgegengesetzte infinitesimale Translationen senkrecht zur z-Axe aus. Alsdann kann man die infinitesimale Rotation um die z-Axe ersetzen durch eine solche um eine zu ihr parallele Axe z' und eine Translation. Ferner stelle man sich in der z'-Axe zwei gleiche und entgegengesetzte Translationen vor. Dann kann man die infinitesimale Bewegung ersetzen durch eine Schraubenbewegung um die z'-Axe und eine geeignete Translation v. Wenn aber die Curve C eine gemeine Schraubenlinie ist, welche durch jene Schraubenbewegung in sich selbst übergeht, so folgt, dass die infinitesimale Rotation um die z-Axe zugleich als Translation v der Curve C aufgefasst werden kann, oder mit anderen Worten, *dass die durch Rotation einer Schraubenlinie um eine zu ihrer Axe parallele Axe erzeugte Fläche zugleich durch Translation dieser Schraubenlinie längs einer Schraubenlinie entsteht.*

---

*) Vgl. die Beweise bei Lie a. a. O., p. 335.

**) Vgl. den Beweis bei Lie a. a. O., p. 356.

Die Gleichungen einer solchen Fläche sind:

$$\begin{aligned} x &= a \sin u + b \sin v, \\ y &= a \cos u + b \cos v, \\ z &= k \operatorname{tg} \alpha\, (u - v). \end{aligned}$$

Um *alle* Flächen zu finden, die Rotations- und Translationsflächen sind, kann man folgenden Weg einschlagen.

In den Gleichungen einer Translationsfläche

$$\begin{aligned} z &= h(u) + g(v), \\ x &= f(u) + \varphi(v), \\ y &= \psi(u) + \chi(v) \end{aligned}$$

kann man zunächst $h(u)$ und $g(v)$ an Stelle der Variabelen u, v selbst nehmen und hat demgemäss die Functionalgleichung:

$$F(u+v) = (f(u) + \varphi(v))^2 + (\psi(u) + \chi(v))^2,$$

welche zu lösen ist.

Setzt man $u + v = w$, so wird:

$$Fw = [f(u) + \varphi(w-u)]^2 + [\psi(u) + \chi(w-u)]^2.$$

Ferner hat man für $u = 0$, $v = 0$

$$\begin{aligned} Fu &= [f(u) + \varphi(0)]^2 + [\psi(u) + \chi(0)]^2, \\ Fv &= [f(0) + \varphi(v)]^2 + [\psi(0) + \chi(v)]^2. \end{aligned}$$

Aus diesen Identitäten ergiebt sich:

$$\begin{gathered} F(v+u) - F(u) - F(v) + F(0) \\ = [\varphi(v) - \varphi(0)]\,[f(u) - f(0)] + [\chi(v) - \chi(0)]\,[\psi(u) - \psi(0)]. \end{gathered}$$

Nimmt man an, dass $f(u)$ und $\chi(v)$ Constanten sind (man würde nur Cylinderflächen erhalten, wenn man $f(u)$ und $\psi(u)$ gleichzeitig constant nähme), so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung durch Differentiation nach v

$$F'(v+u) - F'v = 0,$$

also für $v = 0$:

$$F'u = F'0;$$

d. h. F ist eine lineare Function. Diese Lösung der Functionalgleichung führt ersichtlich auf das Rotationsparaboloid.

Wenn dagegen die rechte Seite jener Gleichung nicht identisch verschwindet, so erhält man durch wiederholte Differentiation nach u (oder v) Gleichungen von der folgenden Form:

$$F'(u+v) - F'(u) = [\varphi(v) - \varphi(0)]\, f'(u) + [\chi(v) - \chi(0)]\, \psi'(u),$$
$$F''(u+v) - F''(u) = [\varphi(v) - \varphi(0)]\, f''(u) + [\chi(v) - \chi(0)]\, \psi''(u),$$

u. s. w.

Legt man daher u einen beliebigen constanten Werth bei, so ergiebt sich durch Elimination von v eine Gleichung von der folgenden Form:

$$AF'' + BF' + CF + D = 0,$$

also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten. Mithin ist F eine Summe von Exponentialfunctionen, und für die vier Functionen φ, ψ, f, χ, ergeben sich, wie man unmittelbar erkennt, ebenfalls lineare Ausdrücke von solchen. Da man, um reelle Ausdrücke zu erhalten, die Argumente der Exponentialfunctionen imaginär nehmen muss, so wird man ersichtlich auf die vorhin construirte Schraubenfläche geführt.

Die genannten Flächen sind daher die einzigen, denen die verlangte Eigenschaft zukommen kann.

Jede Translationsfläche besitzt bekanntlich zwei verschiedene Translationen in sich selbst. Die soeben betrachteten Flächen haben demgegenüber die Eigenschaft, unendlich viele verschiedene (allerdings congruente) Systeme von Translationscurven zu enthalten. Sie sind indessen nicht die einzigen dieser Eigenschaft. So z. B. lassen sich auf der Schraubenfläche:

$$z = au,$$
$$x = b\varrho \cos u,$$
$$y = c\varrho \sin u$$

unendlich viele Systeme unter sich verschiedener Translationscurven angeben. Man erkennt dies sofort, wenn man die Gleichungen der Fläche durch die Substitution:

$$\varrho = k \cos v, \quad u + v = U, \quad u - v = V$$

in die Form:

$$
\begin{aligned}
2z &= a\,(U + V),\\
2x &= bk\,(\cos U + \cos V),\\
2y &= ck\,(\text{cin}\ U + \sin V).
\end{aligned}
$$

bringt. Dabei wird jedesmal ein bestimmter durch die Wahl der Constanten k begrenzter Bereich der Fläche erzeugt; die Translationscurven sind congruente Schraubenlinien.

Man kann die Frage aufwerfen, wann überhaupt eine Fläche eines oder mehrere Systeme von Translationscurven enthalten könne. Auf diesen Punkt hoffe ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

§ 3.

Aequidistante Curven auf Flächen constanter Krümmung, Developpabelen und Rotationsflächen.

Die Bestimmung von äquidistanten Curvensystemen auf einer gegebenen Fläche kommt auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück. Man erhält dieselbe folgendermassen: Ist das Längenelement ursprünglich von der Form:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

so handelt es sich darum, neue Veränderliche u', v' einzuführen, durch welche ds^2 in:

$$du'^2 + 2f'\,du'\,dv' + dv'^2$$

übergeht. Man hat also die Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 e + 2f\,\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial u'} + g\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2,\\
1 &= \left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right) e + 2f\,\frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} + g\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2
\end{aligned}
$$

zu lösen, oder, wenn man die Variabelen vertauscht, zu bewirken, dass:

$$
\begin{aligned}
&e\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2f\,\frac{\partial v'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + g\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\\
&= e\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2f\,\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial u} + g\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 = \Delta^2
\end{aligned}
$$

wird, wo Δ die Functionaldeterminante:

$$\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial}$$

bedeutet. Es mag nun vorausgesetzt werden, dass die Fläche bereits conform auf die Ebene abgebildet, d. h. $f = 0$, $e = g$ sei. Alsdann hat man die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{e}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2. \tag{1}$$

Setzt man jetzt

$$v' + u' = U, \quad v' - u' = V,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

welchen man durch die Annahme:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -k\frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = +k\frac{\partial V}{\partial v}$$

genügt. Für k erhält man ferner aus den Gleichungen (1):

$$k^2 = \frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 - e}.$$

Mithin lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial V}{\partial u}\sqrt{\frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - e}}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial V}{\partial v}\sqrt{\frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - e}}\right\} = 0.$$

Von derselben lassen sich leicht particuläre Integrale angeben, wenn e eine Function von u allein ist, d. h. wenn die Fläche Biegungsfläche einer Rotationsfläche ist, auf welchen Fall wir noch zurückkommen werden.

Eine besondere Beachtung verdienen die Flächen constanter Krümmung. Für dieselben kennt man, wie oben gezeigt, die particuläre durch die Haupttangentencurven vermittelte Lösung, aus welcher durch Bewegung der Flächen in sich ∞^2 andere hergeleitet werden können. In diesem Falle ist zugleich der Coefficient $f = \cos z$ charakterisirt durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -K \sin z.$$

Man kann in der That zeigen, dass die Aufgabe auf den Flächen constanter Krümmung alle Systeme äquidistanter Curven zu bestimmen, *von der Lösung der Differentialgleichung* (2) *abhängig ist.* Wählt man z. B. als Typus dieser Flächen bei negativem K die Rotationsfläche der Tractrix, so ergiebt sich als Ausdruck für das Längenelement bei Polarcoordinaten:

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} d\varrho^2,$$

und man hat demgemäss die Gleichungen:

$$\varrho^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{a^2}{\varrho^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2=1,$$

$$\varrho^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{a^2}{\varrho^2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2=1$$

zu lösen. Setzt man $d\varrho=\varrho dw$, so wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=e^{-w}\sqrt{1-a^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=e^{-w}\sqrt{1-a^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}.$$

Durch die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}$ findet man hieraus:

$$(3)\qquad a^2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\sqrt{1-a^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2}\sqrt{1-a^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}.$$

Sei nun $aw=z$

$$(4)\qquad \frac{\partial z}{\partial u}=\cos\Theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\cos\Theta',$$

so folgt:

$$(5)\qquad \begin{aligned}-a\frac{\partial\Theta}{\partial v}&=\sin\Theta',\\ -a\frac{\partial\Theta'}{\partial u}&=\sin\Theta.\end{aligned}$$

Wird endlich $\Theta'=\Theta+\psi$ gesetzt, so gehen die Gleichungen (5) über in

$$(6)\qquad \begin{aligned}-a\frac{\partial\Theta}{\partial v}&=\sin(\Theta+\psi),\\ -a\frac{\partial\Theta}{\partial u}&=a\frac{\partial\psi}{\partial u}+\sin\Theta,\end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\sin\psi.$$

Unter der Voraussetzung, dass ψ dieser Differentialgleichung genügt, sind die linearen Differentialgleichungen (6) integrabel. Auf eine ganz ähnliche Art lässt sich auch für eine Kugel mit dem Radius a die Integration auf die der Gleichung:

$$-a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\sin\psi$$

zurückführen.

Auf den developpabelen Flächen reducirt sich die Bestimmung unmittelbar auf die Lösung der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2 = 1.$$

Durch Differentiation entsteht:

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial^2 u}{\partial v'\partial u'} + \frac{\partial v}{\partial v'}\,\frac{\partial^2 v}{\partial v'\partial u'} = 0.$$

Da nun die Functionaldeterminante der u, v nicht verschwinden darf, weil die Functionen u, v von einander unabhängig sein müssen, so folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} = \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'} = 0,$$

mithin ist für die Biegungsflächen der Ebene die einzige Lösung durch die Translation einer beliebigen Curve gegeben. Dies ist geometrisch übrigens unmittelbar evident, da die unendlich kleinen von den äquidistanten Curven begrenzten Elemente Parallelogramme in der Ebene sind.

Wie schon bemerkt, lassen sich auf den Biegungsflächen der Rotationsflächen leicht particuläre Systeme solcher Curven finden. Ist nämlich das Linienelement von der Form:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 G(u),$$

so setze man $u = y$, wo y eine Function von u', $v = v'$ und

$$\frac{dy}{\sqrt{c - G(y)}} = du'.$$

Nimmt man $c(1 - f) = 2G(y)$, so wird

$$ds^2 = \frac{1}{2}\left\{(du'^2 c(1 + f) + dv'^2 c(1 - f))\right\},$$

so dass für $u'\sqrt{c} = u'' + v''$, $v'\sqrt{c} = u'' - v''$ das Längenelement die verlangte Form erhält. Die Lösung enthält eine willkürliche Constante c.

Für Rotationsflächen insbesondere, deren Gleichung:

$$z = f\varrho,$$

$$x = \varrho \cos \varphi,$$

$$y = \varrho \sin \varphi,$$

setze man:

$$\varphi = c(u - v),$$

$$u + v = \int d\varrho \,\frac{\sqrt{1 + f'\varrho^2}}{\sqrt{1 - \varrho^2 c^2}}.$$

Die auf diese Weise entstehenden äquidistanten Curven haben eine einfache Beziehung zu den geodätischen Linien auf einer anderen Rotationsfläche. Setzt man nämlich $\varrho = \frac{1}{\varrho'}$, $u = -\frac{u'}{c}$, $v = -\frac{v'}{c}$, so werden die letzteren Gleichungen:

$$u' + v' = c\int \frac{d\varrho'}{\varrho'} \frac{\sqrt{1+\left(f'\frac{1}{\varrho'}\right)^2}}{\sqrt{\varrho'^2 - c^2}},$$

$$v' - u' = \varphi.$$

Nimmt man endlich $\psi\varrho' = -\int f'\varrho \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho$, so sind die Curven u', v' auf der Rotationsfläche mit der Meridiancurve $z = \psi\varrho'$ geodätische Linien. Man kann sich daher der bekannten Eigenschaften der geodätischen Linien auf den Rotationsoberflächen bedienen, um gleichzeitig auch den Verlauf der äquidistanten Curven zu bestimmen. So entsprechen z. B. den Curven auf der Kugel die kürzesten Linien auf der Rotationsfläche der Kettenlinie u. s. w.

Für die Kugel erhält man insbesondere die folgenden Curvensysteme:

$$x = r \sin \operatorname{am} \frac{u+v}{r} \cos \frac{u-v}{r} k,$$

$$y = r \sin \operatorname{am} \frac{u+v}{r} \sin \frac{u-v}{r} k,$$

$$z = r \cos \operatorname{am} \frac{u+v}{r}$$

mit dem Modul k der elliptischen Functionen; speciell für $k = 1$:

$$x = r \frac{e^{\frac{u+v}{r}} - e^{-\frac{u+v}{r}}}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}} \cos \frac{u-v}{r},$$

$$y = r \frac{e^{\frac{u+v}{r}} - e^{-\frac{u+v}{r}}}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}} \sin \frac{u-v}{r},$$

$$z = \frac{2r}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}}.$$

Auf den Rotationsflächen, welche zugleich Translationsflächen sind, kann das System der Translationscurven mit unter den eben ermittelten Curvensystemen begriffen sein. Dies ist in der That der Fall bei den Schraubenflächen, wie man durch einfache Rechnung findet. Dagegen ist das System der Translationscurven auf dem Rotationsparaboloid nicht in der eben abgeleiteten Lösung enthalten.

§ 4.

Beispiele.

Gelingt es, Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$
(1) \qquad \begin{gathered}
\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1, \\
\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1
\end{gathered}
$$

zu finden, so erhält man eine Fläche, auf der wenigstens ein System äquidistanter Curven bekannt ist. Man kann dabei folgenden Weg einschlagen.

Setzt man:

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \sin \Theta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \sin \Theta', \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= \cos \Theta \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \cos \Theta' \sin \varphi', \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \cos \Theta \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \cos \Theta' \cos \varphi',
\end{aligned}
$$

so sind die Gleichungen (1) identisch erfüllt. Die Integrabilitätsbedingungen liefern dann weiter:

$$
(3) \qquad \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \cos \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u},
$$

$$
(4) \quad \sin\Theta \sin\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \cos\Theta \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin\Theta' \sin\varphi' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} - \cos\Theta' \cos\varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial v},
$$

$$
(5) \quad \sin\Theta \cos\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos\Theta \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin\Theta' \cos\varphi' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} + \cos\Theta' \cos\varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial u}.
$$

Aus (4) und (5) erhält man leicht:

$$
\begin{gathered}
\sin \Theta \cos \varphi - \varphi' \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \Theta \sin \varphi - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} \\
- \sin \Theta \sin \varphi - \varphi' \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \Theta \cos \varphi - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \cos \Theta' \frac{\partial \varphi'}{\partial u},
\end{gathered}
$$

oder für $\varphi - \varphi' = w$

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
-\frac{\partial \varphi'}{\partial u} &= \frac{1}{\sin w \cos \Theta'} \left[\sin \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} \cos w\right] = P, \\
-\frac{\partial \varphi'}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\sin w \cos \Theta} \left[\cos w \sin \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u}\right] = Q.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung

$$
(7) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}
$$

liefert eine Relation, welche mit (3) zu verbinden ist. Im Folgenden werde ich eine einfache Annahme machen, bei welcher die Lösung der Differentialgleichungen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; sie führt freilich nur zu sehr speciellen Flächen. Nimmt man $\Theta = \Theta'$, so folgt aus (3), dass Θ eine Function von $u + v$ sein muss. Die Gleichung (7) wird dann:

$$(8)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial \log \cos \Theta}{\partial u} \operatorname{tg} \frac{w}{2}\right\} + \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial \log \cos \Theta}{\partial u} \operatorname{tg} \frac{w}{2}\right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

während aus (6) wird:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u} = \operatorname{tg} \frac{w}{2} \frac{d \log \cos \Theta}{du},$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial v} = - \operatorname{tg} \frac{w}{2} \frac{d \log \cos \Theta}{du} - \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Da auch von (8) particuläre Integrale im Allgemeinen nicht bekannt sind, so setze man:

$$\cos \Theta = k e^{c(u+v)}$$

und w als Function von $au + bv = V$ voraus. Die Gleichung (8) wird dann

$$\frac{d^2 w}{d V^2} + c \frac{a+b}{ab} \frac{d}{dV} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = 0,$$

doch darf hier $a \pm b$ nicht verschwinden. Demgemäss ist z bestimmt durch die Gleichung:

$$c \frac{a+b}{ab} \operatorname{tg} \frac{w}{2} + \frac{dw}{dV} + c_1 = 0.$$

Setzt man $c_1 = m \cos \alpha$, $c \frac{a+b}{ab} = m \sin \alpha$, so wird:

$$m V + 2 \left[\left(\frac{w}{2} - \alpha\right) \cos \alpha + \sin \alpha \log \cos \left(\frac{w}{2} - \alpha\right)\right] = 0.$$

Um endlich die Ausdrücke für y und z zu erhalten, setze man:

$$u + v = U,$$
$$au + bv = V,$$
$$b - a \frac{\partial y}{\partial U} = b \frac{\partial y}{\partial u} - a \frac{\partial y}{\partial v},$$
$$b - a \frac{\partial y}{\partial V} = \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u},$$

also:

$$y(b - a) = \int k e^{cU} (b \sin \varphi - a \sin \varphi')\, dU + \psi(V).$$

Ferner hat man:

$$\varphi = \frac{abc_1}{a+b} v - u + \frac{aw}{a+b},$$
$$\varphi' = \frac{abc_1}{a+b} v - u + \frac{bw}{a+b},$$

oder, wenn $v - u = \frac{b+a}{b-a} U + \frac{2V}{b-a}$ gesetzt wird:

$$\varphi = \frac{abc'}{b-a} U + \frac{2abc'}{b^2-a^2} V + \frac{aw}{a+b},$$

$$\varphi' = \frac{abc'}{b-a} U + \frac{2abc'}{b^2-a^2} V - \frac{bw}{a+b}.$$

Setzt man:

$$c = h \cos \beta,$$

$$\frac{abc'}{b-a} = h \sin \beta,$$

so wird

$$y(b-a) = \frac{k}{h} e^{cU} \Big\{ b \sin\Big(\frac{abc'}{b-a} U + 2 \frac{abc'}{b^2-a^2} V + \frac{aw}{a+b} - \beta\Big)$$

$$- a \sin\Big(\frac{abc'}{b-a} U + 2 \frac{abc'}{b^2-a^2} V - \frac{bw}{a+b} - \beta\Big)\Big\},$$

die Function $\psi(V)$ wird gleich einer Constanten, wovon man sich leicht mit Hülfe der Gleichung

$$\cos \varphi - \beta \operatorname{tg} \frac{w}{2} + \cos \varphi' - \beta \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sin(\varphi - \beta) - \sin(\varphi' - \beta)$$

überzeugt. Mithin hat man als Gleichungen der Fläche:

$$x = \int^t \frac{dt}{t} \sqrt{1 - k^2 t^2},$$

$$y = \frac{ke^{cU}}{(b-a)h} [b \sin(\varphi - \beta) - a \sin(\varphi' - \beta)],$$

$$z = \frac{ke^{cU}}{(b-a)h} [b \cos(\varphi - \beta) - a \cos(\varphi' - \beta)],$$

$$t = c^U.$$

Für den Coefficienten f des Längenelementes erhält man die Gleichung:

$$f = 1 - 2 \cos^2 \Theta \sin^2 \frac{w}{2}.$$

Giebt man der Constanten c' den Werth Null, so wird $\alpha = 90^0$, $\beta = 0$. Daraus findet man:

$$f = 1 - 2k^2 h^2 e^{c(b-a)} \left[\frac{u}{b} - \frac{v}{a}\right].$$

Für diesen Specialwerth wird also f Function einer Variabelen, die Fläche wird Biegungsfläche einer Rotationsfläche. Die Curven $U =$ const. werden Cykloiden, die Fläche selbst wird erzeugt durch Drehung einer veränderlichen Tractrix um die X-Axe.

Sucht man andererseits solche Lösungen, bei denen w Function von $u - v$ wird, welcher Fall so eben ausgeschlossen war, so ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{du^2} - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}\,\frac{d^2 \log\cos\Theta}{du^2} = 0.$$

Nimmt man wieder $\cos\Theta = ke^{cU}$, so wird $w = m(u - v)$, also:

$$\varphi = mu - \frac{2}{m}\,c\log\cos\frac{m}{2}\,(u - v),$$

$$\varphi' = mv - \frac{2}{m}\,c\log\cos\frac{m}{2}\,(u - v).$$

Setzt man noch $u - v = V$, so erhält man aus:

$$2\,\frac{\partial y}{\partial U} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = 2\cos\Theta\sin\frac{\varphi + \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2},$$

$$y = \frac{k}{h}\,e^{cU}\cos V\frac{m}{2}\sin\left[m\frac{U}{2} - \frac{2}{m}\log\cos\left(\frac{m}{2}\,V - \alpha\right)\right],$$

$$z = \frac{k}{h}\,e^{cU}\cos V\frac{m}{2}\cos\left[m\frac{U}{2} - \frac{2}{m}\log\cos\left(\frac{m}{2}\,V - \alpha\right)\right],$$

wobei

$$c = h\cos\alpha,$$

$$\frac{m}{2} = h\sin\alpha$$

zu setzen ist, und x wie früher durch das logarithmische Integral bestimmt wird.

Endlich kann man auch $\frac{d^2\log\cos\Theta}{du^2} = c$ setzen und w aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{du^2} = 2c\,\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}$$

bestimmen, doch nehmen die Integrale dann schon eine complicirte Form an.

§ 5.

Schlussbemerkung.

Die vorigen Paragraphen enthalten den einfachsten Fall einer grossen Classe von Untersuchungen über Curvensysteme auf Oberflächen. Die nächst einfache Annahme über das Längenelement würde wohl die sein, dass:

$$ds^2 = du^2 + 2u\cos z\,du\,dv + u^2 dv^2$$

gesetzt wird, wo z der Winkel zwischen den Curven u und v ist. Diese Curven bilden ein Netz auf der Fläche, welches man als *Radialnetz* bezeichnen kann, weil die Abmessungen nach den Richtungen der u, v so erfolgen, wie in dem Systeme der concentrischen Kreise und Radienvectoren der Polarcoordinaten. Schreibt man das Längenelement in der Form:

$$ds^2 = (du - u\,dv)^2 \sin^2 \frac{z}{2} + (du + v\,du) \cos^2 \frac{z}{2},$$

so erkennt man, dass die Curven $v + lu = \text{const.}$, $v - lu = \text{const.}$ wieder ein Orthogonalsystem bilden.

Die Bestimmung von Radialnetzen auf developpabelen Flächen kommt auf die Integration der folgenden Gleichungen hinaus, in denen x, y geradezu Coordinaten der Ebene vorstellen mögen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = u^2.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\Theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin\Theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u\cos\Theta', \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u\sin\Theta',$$

so liefern die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v}\sin(\Theta' - \Theta) = 1,$$

$$u\sin(\Theta' - \Theta)\,\frac{\partial\Theta'}{\partial u} = \cos(\Theta' - \Theta).$$

Setzt man noch $\Theta' - \Theta = z$, so wird:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} = \frac{1}{\sin z},$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u}\operatorname{cotg} z,$$

also entsteht für $u' = lu$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u'\partial v} = \frac{\partial\,\frac{1}{\sin z}}{\partial u'} - \frac{\partial\operatorname{cotg} z}{\partial v} = 0,$$

sie drückt zugleich aus, dass das Krümmungsmass der Fläche gleich Null ist. Für die particulären Lösungen, bei denen z eine Function von $au' + bv + c = U$ ist, erhält man:

$$dU = \frac{b}{a}\,\frac{\sin z\,dz}{\frac{b}{a}\cos z + k\sin z - 1},$$

wo k eine willkürliche Constante. Bestimmt man z aus dieser Gleichung, so erhält man Netze der geforderten Art. Der Kürze halber mag hier nur der Fall angeführt werden, wo $a = b = 0$ genommen, also z gleich der Constanten c gesetzt wird. Man hat dann:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} = \frac{1}{\sin c},$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = \frac{\operatorname{cotg} c}{u},$$

also:

$$\Theta = \frac{v + \cos c\, l u}{\sin c} + c'$$

und:

$$x = u \sin c \sin \left\{ c' + \frac{v + \cos c\, l u}{\sin c} \right\},$$

$$y = u \sin c \cos \left\{ c' + \frac{v + \cos c\, l u}{\sin c} \right\},$$

die Curven $u = \text{const.}$ werden Kreise, die Curven $v = \text{const.}$ logarithmische Spiralen.

Auch auf den Rotationsflächen lassen sich leicht Radialnetze construiren. Dazu hat man in dem Längenelemente:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 (1 + f'^2)$$

nur zu setzen:

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \sqrt{c^2 - (1 + f'^2)} + dv,$$

$$dr = du$$

und erhält:

$$ds^2 = c^2 du^2 + u^2 dv^2 + 2 du dv u \sqrt{c^2 - (1 + f'^2)},$$

wo c eine willkürliche Constante.

Man kann sich endlich die Aufgabe stellen, Transformationen des Raumes zu bestimmen, bei denen die Abmessungen nach drei Richtungen nach gegebenen Gesetzen erfolgen. Dabei wird es sich darum handeln, das Längenelement in die Form:

$$ds^2 = e_1 du^2 + e_2 dv^2 + e_3 dw^2 + 2 e_{12} du dv + \cdots$$

zu bringen, wo e_1, e_2, e_3 gegebene Functionen von u, v, w sind. Der wichtigste Fall ist wiederum der, wo das Längenelement die Form:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2 f_w du dv + 2 f_v du dw + 2 f_u dv dw$$

annimmt. Der Raum erscheint dann durchzogen von äquidistanten Curven, die Transformation ist eine solche, wie sie vermittelt wird durch Biegung eines aus undehnsamen Fäden bestehenden körperlichen Gewebes mit parallelopipedischen Zellen. Eine particuläre Lösung der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=1$$

erhält man auch hier durch die Annahme $x = fu + \varphi v + \psi w$ u. s. w. Allgemeinere Systeme entstehen, wenn man eine beliebige mit äquidistanten Curven überdeckte Fläche in Translation versetzt. Eine Lösung der obigen Gleichungen, welche nicht auf diese angegebenen einfachen Fälle zurückführt, ist mir bisher nicht gelungen.

Dresden, den 12. Mai 1881.

Sur une question de Jean Bernoulli.

Par

A. **Markoff** à St. Petersbourg.

La question, dont nous allons nous occuper, fut proposée par J. Bernoulli dans son mémoire*) „Sur une nouvelle espèce de calcul.“

Cette question est la suivante.

Pour les quantités réelles a et b données on demande à former la suite de nombres entiers

$$F(b),\ F(a+b),\ F(2a+b),\ F(3a+b),\ \cdots$$

respectivement les plus rapprochés de**)

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ \cdots.$$

Jean Bernoulli remarque, que dans le cas, où a est un nombre rationnel, la suite des différences

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\ F(3a+b)-F(2a+b),\cdots$$

est périodique, et donne des règles trés remarquables pour composer la période de cette suite.

Si a est irrationnel cette suite ne peut être périodique.

Cependant même dans ce dernier cas on peut parler de ses périodes, si seulement on s'arrête à un nombre limité de termes.

Nous chercherons pour les quantités réelles a et b et le nombre entier N la période la plus courte du système de N termes

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\cdots,F(Na+b)-F((N-1)a+b).$$

Le cas de $b=0$ a été discuté par moi en détail, et pour le cas général j'ai démontré un théorème, que je considère comme fondamental.

Le mémoire présent contiendra la démonstration de ce théorème et des règles de Bernoulli. Quant aux autres recherches sur la question de Bernoulli, j'espère les publier dans une autre occasion.

---

*) Jean Bernoulli. Recueil pour les astronomes T. I.

**) Nous désignons généralement par $F(x)$ le nombre entier le plus rapproché d'une quantité réelle x.

Lemme I.

Soient a et b deux quantités réelles, m un nombre entier quelconque et

$$r_m = F(ma + b) - F((m-1)a + b).$$

La suite

$$\ldots, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

jouit alors des trois propriétés suivantes:

1) *Les différences*

$$\ldots, r_{-2} - r_{-3}, r_{-1} - r_{-2}, r_0 - r_{-1}, r_1 - r_0, r_2 - r_1, r_3 - r_2, \ldots$$

ne peuvent avoir que les trois valeurs

$$+1, 0, -1.$$

2) *Si l'on a pour un indice* m

$$r_{m+1} - r_m = +1,$$

la première des différences

$$r_{m+2} - r_{m-1}, r_{m+3} - r_{m-2}, r_{m+4} - r_{m-3}, \ldots$$

qui ne s'évanouit pas doit être négative.

3) *Si l'on a pour un indice* m

$$r_{m+1} - r_m = -1,$$

la première des différences

$$r_{m+2} - r_{m-1}, r_{m+3} - r_{m-2}, r_{m+4} - r_{m-3}, \ldots$$

qui ne s'évanouit pas doit être positive.

Démonstration.

D'après notre définition nous avons pour les nombres entiers m et n quelconques

$$F((m+n)a + b) = (m+n)a + b + \varepsilon_{m+n}$$

et

$$F(ma + b) = ma + b + \varepsilon_m,$$

où

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon_{m+n} < +\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon_m < +\frac{1}{2}.$$

En posant successivement

$$n = p \quad \text{et} \quad n = -p,$$

où p est un nombre positif, nous trouvons

$$F((m+p)a + b) - F(ma + b) = pa + \varepsilon_{m+p} - \varepsilon_m,$$

$$F(ma + b) - F((m-p)a + b) = pa + \varepsilon_m - \varepsilon_{m-p},$$

ou

$$r_{m+p} + r_{m+p-1} + \cdots + r_{m+2} + r_{m+1} = pa + \varepsilon_{m+p} - \varepsilon_m,$$

$$r_{m-p+1} + r_{m-p+2} + \cdots + r_{m-1} + r_m = pa + \varepsilon_m - \varepsilon_{m-p}.$$

D'où il s'ensuit

$$(r_{m+p}-r_{m-p+1})+\cdots+(r_{m+2}-r_{m-1})+(r_{m+1}-r_m)=\varepsilon_{m+p}-2\,\varepsilon_m+\varepsilon_{m-p}.$$

Le nombre

$$\varepsilon_{m+p}-2\,\varepsilon_m+\varepsilon_{m-p},$$

qui en vertu de la dernière équation doit être entier, a une valeur absolue moindre de 2. C'est pourquoi il ne peut être égal qu'à l'une des quantités $+1, 0, -1$.

Donc pour tout nombre positif p la somme

$$(r_{m+p}-r_{m-p+1})+(r_{m+p-1}-r_{m-p+2})+\cdots+(r_{m+2}-r_{m-1})+(r_{m+1}-r_m)$$

est égale à l'un des nombres $+1, 0, -1$.

Par conséquent la différence

$$r_{m+1}-r_m$$

ne peut avoir que les trois valeurs suivantes

$$+1,\ 0,\ -1.$$

Quant aux différences

$$r_{m+1}-r_m \quad \text{et} \quad r_{m+p}-r_{m-p+1},$$

elles ne peuvent avoir le même signe, si toutes les différences intermédiaires

$$(r_{m+2}-r_{m-1}),\ \cdots,\ (r_{m+p-1}-r_{m-p+2})$$

sont égales à zéro. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Nous désignerons pour plus de commodité toute suite

$$\cdots,\ r_{-2},\ r_{-1},\ r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots$$

satisfaisant aux trois conditions sousmentionnées par le nom de suite de Bernoulli.

Lemme II.

Si

$$r_m=F(ma+b)-F((m-1)a+b)$$

et

$$a=\alpha_0-1+\cfrac{1}{\alpha_1+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1}+\cfrac{1}{\alpha_\varkappa+\cfrac{1}{1}}}} \qquad {}^{*}),$$

où

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{\varkappa-1},\ \alpha_\varkappa$$

sont des nombres entiers positifs, *la suite*

$$\cdots,\ r_{-3},\ r_{-2},\ r_{-1},\ r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots$$

---

*) En général nous conviendrons de développer une quantité rationnelle en fraction continue de manière, que le dernier quotient soit égal à 1.

conformément aux notations de mon second mémoire) „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies“ peut être désignée par le symbole*

$$(\alpha_\varkappa,\ \alpha_{\varkappa-1},\ \cdots,\ \alpha_1,\ \alpha_0),$$

quelque soit le nombre réel b.

Démonstration.

Soit q le plus petit des nombres entiers, dont le produit par a est égal à un nombre entier. Dans ce cas il est facile de voir qu'en général

$$F((m+q)a+b) = qa + F(ma+b).$$

Par conséquent

$$\begin{array}{l}
\cdots,\ r_{-2q+1} = r_{-q+1} = r_1 = r_{q+1} = r_{2q+1},\ \cdots,\\
\cdots,\ r_{-2q+2} = r_{-q+2} = r_2 = r_{q+2} = r_{2q+2},\ \cdots,\\
\cdots\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \cdots\\
\cdots\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \cdots\\
\cdots,\ r_{-2q+q} = r_{-q+q} = r_q = r_{q+q} = r_{2q+q},\ \cdots,
\end{array}$$

en d'autres termes

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_q$$

est l'une des périodes de la suite

$$\cdots,\ r_{-3},\ r_{-2},\ r_{-1},\ r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots.$$

De là il s'ensuit que notre suite peut être représentée par le symbole

$$(\beta_h,\ \beta_{h-1},\ \cdots,\ \beta_1,\ \beta_0),$$

où

$$\beta_h,\ \beta_{h-1},\ \cdots,\ \beta_1,\ \beta_0$$

sont des nombres entiers positifs.

Pour déterminer les inconnus

$$h,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{h-1},\ \beta_h$$

nous avons l'équation

$$\beta_0 - 1 + \cfrac{1}{\beta_1 + \ddots + \cfrac{1}{\beta_{h-1} + \cfrac{1}{\beta_h + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_q}{q}$$

qui n'admet qu'une seule solution

$$h = \varkappa,\ \beta_0 = \alpha_0,\ \beta_1 = \alpha_1,\ \cdots,\ \beta_{h-1} = \alpha_{\varkappa-1},\ \beta_h = \alpha_\varkappa,$$

parceque

$$\frac{r_1 + r_2 + \cdots r_q}{q} = \frac{F(qa+b) - F(b)}{q} = a.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

---

*) Mathematische Anualen, Band XVII, p. 379—400.

Lemme III.

Pour toute suite périodique de Bernoulli

$$\ldots, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

il est possible de trouver des quantités réelles a et b telles, que chaque terme r_m de cette suite soit égal à la différence

$$F(ma+b) - F((m-1)\,a+b).$$

Démonstration.

Soient

$$(\alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0)$$

la suite que nous discutons et la fraction continue

$$\alpha_0 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{1}}}}$$

égale à la fraction ordinaire irréductible $\frac{p}{q}$. Dans ce cas

$$r_1, r_2, \ldots, r_q$$

sera l'une des q périodes de notre suite.

De même en vertu du lemme II

$$F\left(\frac{p}{q}+b\right) - F(b), \ldots, F\left(q\,\frac{p}{q}+b\right) - F\left((q-1)\,\frac{p}{q}+b\right)$$

coincide avec l'une des mêmes périodes, quelque soit la quantité réelle b.

Posons maintenant

$$b = \frac{1}{2} - \frac{2i-1}{2q}$$

et donnons à i les q significations consécutives

$$1, 2, 3, \ldots, q.$$

De cette manière nous aurons q périodes qui toutes seront différentes entre elles.

Effectivement, si deux de ces périodes

$$F\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right) - F\left(\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right), \ldots, F\left(q\,\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right)$$
$$- F\left((q-1)\,\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right)$$

et

$$F\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2j-1}{2q}\right) - F\left(\frac{1}{2}-\frac{2j-1}{2q}\right), \ldots, F\left(q\,\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2j-1}{2q}\right)$$
$$- F\left((q-1)\,\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2j-1}{2q}\right)$$

étaient identiques l'une à l'autre, alors avec toutes les significations entières de m la différence

$$F\left(m\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right)-\left(m\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2j-1}{2q}\right)$$

serait par sa valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$, — ce qui est impossible, parceque avec une certaine valeur du nombre entier m la différence

$$F\left(m\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right)-\left(m\frac{p}{q}+\frac{1}{2}-\frac{2i-1}{2q}\right)$$

a le même signe que $\frac{j-i}{q}$ et est égale par sa valeur absolue à $\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}$.

Par conséquent nous pouvons toujours choisir b de manière que

$$r_1=F\left(\frac{p}{q}+b\right)-F(b),$$

$$r_2=F\left(2\frac{p}{q}+b\right)-F\left(\frac{p}{q}+b\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_q=F\left(q\frac{p}{q}+b\right)-F\left((q-1)\frac{p}{q}+b\right),$$

et en général

$$r_m=F\left(m\frac{p}{q}+b\right)-F\left((m-1)\frac{p}{q}+b\right).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme IV.

Si le système de termes

$$r_{m+1},\ r_{m+2},\ \ldots,\ r_{m'-1},\ r_{m'}$$

fait partie d'une suite de Bernoulli, la periode la plus courte de ce système sera en même temps la période d'une suite de Bernoulli.

Démonstration.

Notre lemme est évident pour tout système d'un seul terme.

Admettons maintenant, que notre lemme a lieu pour tout système se composant de moins de $m'-m$ termes, et démontrons, que dans ce cas il doit avoir lieu pour tout système de $m'-m$ termes.

De cette manière notre lemme sera complétement demontré.

En désignant le plus grand des nombres du système

$$r_{m+1},\ r_{m+2},\ \ldots,\ r_{m'-1},\ r_{m'} \qquad (R)$$

par r, nous pouvons représenter ce système sous la forme

$$\underbrace{r-1}_{\sigma},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_1},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_2},\ \ldots,\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_n},\ r,\ \underbrace{r-1}_{\sigma'}.$$

On ne peut faire que les quatre suppositions suivantes relatives à σ et σ':

1) σ et σ' sont tous les deux plus grand que l'un des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$;
2) σ est plus grand que l'un des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ et σ' n'excède aucun d'eux;
3) σ' est plus grand que l'un des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ et σ n'excède aucun d'eux;
4) σ et σ' n'excèdent aucun des nombres $s_1, s_2, \cdots, s_n$.

Nous nous occuperons de chacun de ces cas séparément.

Dans le premier cas le système

$$\sigma, s_1, s_2, \ldots, s_n, \sigma'$$

doit faire partie d'une suite de Bernoulli.

Et comme le nombre de termes de ce système est moindre que $m' - m$, la plus courte de ses périodes

$$\sigma, s_1, s_2, \ldots, s_l$$

sera en même temps en vertu de notre admission la période d'une suite de Bernoulli.

Quant à la plus courte période du système R, elle sera

$$\underbrace{r-1}_{\sigma}, r, \underbrace{r-1}_{s_1}, r, \ldots, \underbrace{r-1}_{s_l}, r.$$

Dans le deuxième cas le système

$$\sigma, s_1, s_2, \ldots, s_n$$

doit faire partie d'une suite de Bernoulli.

Et comme le nombre de termes de ce système est moindre que $m' - m$, la plus courte de ses périodes

$$\sigma, s_1, s_2, \ldots, s_l$$

sera en même temps en vertu de notre admission la période d'une suite de Bernoulli.

Quant à la plus courte période du système R, elle sera

$$\underbrace{r-1}_{\sigma}, r, \underbrace{r-1}_{s_1}, r, \ldots, \underbrace{r-1}_{s_l}, r.$$

Dans le troisième cas le système

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \sigma'$$

doit faire partie d'une suite de Bernoulli.

Et comme le nombre de termes de ce système est moindre que $m' - m$, la plus courte de ses périodes

$$s_1, s_2, \ldots, s_l, s_{l+1}$$

sera en même temps en vertu de notre admission la période d'une suite de Bernoulli.

Quant à la plus courte période du système R, elle sera

$$\underbrace{r-1}_{\sigma},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_1},\ r,\ \ldots,\ \underbrace{r-1}_{s_l},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_{l+1}-\sigma}\ .$$

Enfin dans le quatrième cas le système

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$$

doit faire partie d'une suite de Bernoulli.

Et comme le nombre de termes de ce système est moindre que $m' - m$, la plus courte de ses périodes

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_l,\ s_{l+1}$$

sera en même temps en vertu de notre admission la période d'une suite de Bernoulli.

Quant à la plus courte période du système R, elle sera

$$\underbrace{r-1}_{\sigma},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_1},\ r,\ \ldots,\ \underbrace{r-1}_{s_l},\ r,\ \underbrace{r-1}_{s_{l+1}-\sigma}\ .$$

Dans tous ces quatre cas la période la plus courte du système R sera évidemment la période d'une suite de Bernoulli.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème.

Quelques soient les quantités réelles a et b et le nombre positif entier N, la période la plus courte du système

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\ldots,F(Na+b)-F((N-1)a+b)$$

sera en même temps la période de la suite

$$\ldots, F\left(-\frac{p}{q}+\Theta\right)-F\left(-2\frac{p}{q}+\Theta\right),\ F(\Theta)-F\left(-\frac{p}{q}+\Theta\right),$$
$$F\left(\frac{p}{q}+\Theta\right)-F(\Theta),\ldots$$

où $\frac{p}{q}$ est l'une des fractions principales ou intermédiaires convergentes à a.

Le nombre Θ peut être choisi de manière que

$$F(b)=F(\Theta),$$
$$F(a+b)=F\left(\frac{p}{q}+\Theta\right),$$
$$F(2a+b)=F\left(2\frac{p}{q}+\Theta\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(Na+b)=F\left(N\frac{p}{q}+\Theta\right).$$

Démonstration.

Développons a en fraction continue

$$a = \alpha_0 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \ddots}}}$$

et considérons en même temps les fractions rationnelles

$$\frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa} = \alpha_0 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \ddots \cfrac{1}{\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{1}}}$$

avec les différents indices $\varkappa$.

Il est évident, que pour tout nombre N donné l'indice $\varkappa$ peut être choisi tel, que

$$F(a+b) = F\left(\frac{P_k}{Q_k} + b\right),$$

$$F(2a+b) = F\left(2\frac{P_k}{Q_k} + b\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(Na+b) = F\left(N\frac{P_k}{Q_k} + b\right).$$

Dans ce cas le système

$$F(a+b) - F(b),\ F(2a+b) - F(a+b), \ldots,\\ F(Na+b) - F((N-1)a+b)$$

fera en vertu du lemme II. partie de la suite périodique de Bernoulli

$$(\alpha_\varkappa,\ \alpha_{\varkappa-1},\ \ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_0).$$

Conformément au lemme IV. la période la plus courte de ce système sera en même temps période d'une suite de Bernoulli

$$(\beta_h,\ \beta_{h-1},\ \ldots,\ \beta_1,\ \beta_0).$$

Il est facile de voir, que les nombres

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{h-1}$$

doivent être respectivement égaux à

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{h-1}$$

et les nombres

$$h,\ \beta_h$$

ne peuvent excéder respectivement

$$\varkappa,\ \alpha_h.$$

En vertu du lemme III. nous aurons pour une quantité Θ'

$$F(ma+b)-F((m-1)\,a+b)=F\left(m\frac{p}{q}+\Theta'\right)-F\left((m-1)\frac{p}{q}+\Theta'\right),$$

où

$$\frac{p}{q}=\beta_0-1+\cfrac{1}{\beta_1+\cfrac{1}{\beta_2+\cdots+\cfrac{1}{\beta_h+\cfrac{1}{1}}}}$$

et

$$m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,N.$$

Et si nous prenons

$$\Theta=\Theta'+F(b)-F(\Theta')$$

nous aurons

$$F(\Theta)=F(b),$$

$$F\left(\frac{p}{q}+\Theta\right)=F(a+b),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F\left(N\frac{p}{q}+\Theta\right)=F(Na+b).$$

Notre théorème est donc complètement démontré.

St. Petersbourg.

Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions.

Par

G. E. A. Brunel à Abbeville.

Considérons n quantités, $x_1, x_2 \ldots x_n$, pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$; nous regardons ces n quantités comme constituant un champ à n variables ou *espace à n dimensions.*

Si on donne un système particulier de valeurs à $x_1, x_2 \ldots x_n$, aux *coordonnées*, nous dirons que ce système de valeurs représente un point.

Lorsque entre les coordonnées $x_1, x_2 \ldots x_n$ nous aurons une, deux ... k équations, nous dirons que ces équations représentent un espace à $n-1, n-2, \ldots, n-k$ dimensions détaché dans l'espace à n dimensions; si en particulier le nombre des équations considérées est égal à $n-2$, $n-1$ ou n, nous conserverons aux espaces à 2, 1 ou 0 dimensions correspondants le nom de surfaces, de courbes, ou de points.

Dans le cas où les équations sont linéaires, nous parlerons d'espaces linéaires à $n-1$, $n-2, \ldots, 4, 3$ dimensions, de plans et de droites et de points*).

Il est dès lors facile de voir qu'un espace linéaire à p dimensions est en général défini par $p+1$ points. Etant donnés les $p+1$ points, on peut immédiatement écrire les équations de cet espace, par exemple sous forme de matrice. Nous pouvons dire aussi qu'un espace à p dimensions est en général défini par p droites passant par un même point.

---

*) Ce sont là les plans, biplans, ..., $(n-4)$-plans, $(n-3)$-plans, $(n-2)$-plans, droites et points de M. C. Jordan (*Essai sur la géométrie à n dimensions.* Bulletin de la Société Mathématique de France. t. III, pp. 103—173). Voir aussi: H. d'Ovidio: *Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante*, Math. Annalen, t. XII, pp. 403—418, Atti della Accademia dei nuovi Lincei 1877, pp. 929—986.

Considérons en particulier une droite

$$x_i = a_i x_n + b_i, \qquad i = (1, 2, \cdots, n-1),$$

la droite, passant par l'origine

$$x_i = a_i x_n, \qquad i = (1, 2, \cdots, n-1),$$

sera dite parallèle à la première. Etant données dans un espace à p dimensions p droites passant par un point et déterminant complètement cet espace, les p droites passant par l'origine et parallèles à celles-là déterminent un espace linéaire à p dimensions qui sera dit parallèle à l'espace donné.

La distance de deux points x, y, sera $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Nous dirons dans ce cas, le seul que nous considérons ici, que notre système de coordonnées $Ox_1 x_2 \cdots x_n$ forme un n-èdre rectangulaire.

Monsieur Jordan a montré*) que deux espaces linéaires étant donnés, il y a des fonctions de leurs coefficients qui demeurent invariables par une substitution orthogonale.

Etant données deux droites passant par l'origine

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n},$$

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n},$$

l'expression:

$$(1) \qquad \cos^2 \Theta = \frac{(\Sigma a_r \alpha_r)^2}{\Sigma a_r^2 \cdot \Sigma \alpha_r^2}$$

est un tel invariant, et on appelle Θ *l'angle des deux droites.* Si l'on a deux espaces linéaires, l'un à p dimensions, l'autre à q dimensions, on peut calculer au moyen de la formule (1) l'angle de deux droites, l'une située dans le premier espace, l'autre située dans le second. On obtient aussi une expression dont les maximums ou minimums sont des invariants et qui définissent ce que l'on appelle les *angles des deux espaces.*

Si l'on a spécialement deux espaces linéaires à p dimensions passant par l'origine et définis chacun par un système de p droites passant par l'origine:

$$(2) \qquad P \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}, \\ & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & & a_{pn}, \end{matrix} \right. \qquad \Pi \left\{ \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n}, \\ & & & \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & & \alpha_{pn}, \end{matrix} \right.$$

---

*) C. Jordan. l. c. p. 122.

l'application de la méthode de M. Jordan nous permet de former l'équation qui donne les cosinus des angles des deux espaces. Posant

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} a_{li}\,a_{ki} = (a_l a_k), \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{li}\,\alpha_{ki} = (\alpha_l \alpha_k), \quad \sum_{i=1}^{n} a_{li}\,\alpha_{ki} = (a_l \alpha_k),$$

l'équation se présente sous la forme du déterminant symétrique:

$$(4)\quad 0 = \begin{vmatrix} \cos\Theta\cdot(a_1a_1) & \cos\Theta\cdot(a_1a_2)\cdots & \cos\Theta\cdot(a_1a_p) & (a_1\alpha_1) & \cdots & (a_1\alpha_p) \\ \cos\Theta\cdot(a_2a_1) & \cos\Theta\cdot(a_2a_2)\cdots & \cos\Theta\cdot(a_2a_p) & (a_2\alpha_1) & \cdots & (a_2\alpha_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\Theta\cdot(a_pa_1) & \cos\Theta\cdot(a_pa_2)\cdots & \cos\Theta\cdot(a_pa_p) & (a_p\alpha_1) & \cdots & (a_p\alpha_p) \\ (\alpha_1a_1) & (\alpha_1a_2)\quad\cdots & (\alpha_1a_p) & \cos\Theta\cdot(\alpha_1\alpha_1) & \cdots & \cos\Theta\cdot(\alpha_1\alpha_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_pa_1) & (\alpha_pa_2)\quad\cdots & (\alpha_pa_p) & \cos\Theta\,(\alpha_p\alpha_1) & \cdots & \cos\Theta\cdot(\alpha_p\alpha_p) \end{vmatrix}.$$

Cette équation est de degré p en $\cos^2\Theta$, mais si les deux espaces linéaires à p dimensions qui nous occupent ont un espace linéaire à q dimensions commun, q des angles sont nuls et l'équation en $\cos^2\Theta$ aura q racines égales à l'unité*). Si $q = p - 1$ il n'y a à proprement parler qu'un angle formé par les deux espaces. Posons:

$$(5)\quad \Delta_{a\alpha} = \begin{vmatrix} (a_1\alpha_1) & (a_1\alpha_2) & \cdots & (a_1\alpha_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_p\alpha_1) & (a_p\alpha_2) & \cdots & (a_p\alpha_p) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{aa} = \begin{vmatrix} (a_1a_1) & (a_1a_2) & \cdots & (a_1a_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_pa_1) & (a_pa_2) & \cdots & (a_pa_p) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{\alpha\alpha} = \begin{vmatrix} (\alpha_1\alpha_1) & (\alpha_1\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1\alpha_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_p\alpha_1) & (\alpha_p\alpha_2) & \cdots & (\alpha_p\alpha_p) \end{vmatrix},$$

on a pour déterminer cet angle la formule:

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\Theta = \dfrac{\Delta^2_{a\alpha}}{\Delta_{aa}\,\Delta_{\alpha\alpha}}, \\ \text{d'où} \\ \sin^2\Theta = \dfrac{\Delta_{aa}\cdot\Delta_{\alpha\alpha} - \Delta^2_{a\alpha}}{\Delta_{aa}\Delta_{\alpha\alpha}}. \end{array} \right.$$

Arrivons maintenant à l'étude des courbes gauches dans un espace à n dimensions. Une courbe gauche est par définition représentée par un système de $n - 1$ équations entre les coordonnées $x_1, x_2, \cdots x_n$:

$$F_1(x_1, x_2 \cdots x_n) = 0, \quad F_2 = 0, \quad \cdots, \quad F_{n-1} = 0;$$

---

*) Voir dans *l'Essai* de M. Jordan la définition des différents ordres de parallélisme.

nous supposerons ici que $x_1, x_2 \cdots x_n$ sont donnés comme fonctions d'une variable indépendante t qui admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n.

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \cdots, x_n = x_n(t). \tag{7}$$

Nous désignerons par $x'x'' \cdots x^{(p)}$ les dérivées première, seconde, $\cdots p^{\text{ième}}$ de x par rapport à la variable t.

Par $p+1$ points de la courbe, on peut faire passer un espace linéaire à p dimensions. La méthode employée dans l'espace à trois dimensions pour déterminer le plan osculateur en un point d'une courbe permet ici de démontrer que l'espace à p dimensions déterminé par un point M_1 de la courbe et p points voisins a une limite lorsque ces derniers se rapprochent du point M_1 et que cette limite est représentée par les équations:

$$\left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 \cdots & X_n - x_n \\ x_1' & x_2' \quad \cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' \quad \cdots & x_n'' \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} \quad \cdots & x_n^{(p)} \end{matrix} \right\| = 0, \tag{8}$$

ou bien encore par les suivantes

$$X_i - x_i = \lambda_1 x_i' + \lambda_2 x_i'' + \cdots + \lambda_p x_i^{(p)}, \qquad i = (1, 2 \cdots n). \tag{9}$$

Nous appellerons cet espace *espace linéaire à p dimensions osculateur au point M_1*. Pour $p = 1$ nous avons une droite à laquelle nous conserverons le nom de tangente au point M_1.

Au point de la courbe voisin de M_1 et répondant à une valeur de t égale à $t + dt$ l'espace linéaire à p dimensions sera donné par les équations

$$X_i - x_i = \mu_1 x_i' + \mu_2 x_i'' + \cdots + \mu_p (x_i^{(p)} + x_i^{(p+1)} dt). \tag{10}$$

Les espaces linéaires à p dimensions menés par l'origine parallèlement à (9) et (10) sont définis par les deux systèmes de p droites suivants

$$\left\{ \begin{matrix} x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \cdots & x_n^{(p)} \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \cdots & x_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(p)} + x_1^{(p+1)} dt & x_2^{(p)} + x_2^{(p+1)} dt & \cdots & x_n^{(p)} + x_n^{(p+1)} dt. \end{matrix} \right.$$

Il est manifeste qu'ils ont un espace à $p - 1$ dimensions commun; ces deux espaces osculateurs ne forment donc qu'un seul angle que l'on déterminera au moyen des formules (6)

$$\sin^2 \omega_p = \frac{\mathsf{A}\Gamma - \mathsf{B}^2}{\mathsf{A}\Gamma}, \tag{11}$$

où

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' & \cdots & \Sigma x' x^{(p)} \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 & \cdots & \Sigma x'' x^{(p)} \\ & & & \\ \Sigma x' x^{(p)} & \Sigma x'' x^{(p)} & \cdots & \Sigma x^{(p)^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathsf{B} = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' & \cdots & \Sigma x' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 & \cdots & \Sigma x'' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) \\ & & & \\ \Sigma x' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) & \Sigma x'' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) & \cdots & \Sigma (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt)^2 \end{vmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' & \cdots & \Sigma x' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 & \cdots & \Sigma x'' (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) \\ & & & \\ \Sigma x' x^{(p)} & \Sigma x'' x^{(p)} & \cdots & \Sigma x^{(p)} (x^{(p)} + x^{(p+1)} dt) \end{vmatrix}.$$

Le numérateur se réduit immédiatement à

$$dt^2 \left\{ \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' \cdots & \Sigma x' x^{(p-1)} & \Sigma x' x^{(p)} \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 \cdots & . & \Sigma x'' x^{(p)} \\ & & & \\ \Sigma x' x^{(p-1)} & . \quad \cdots & . & . \\ \Sigma x' x^{(p)} & . \quad \cdots & . & \Sigma x^{(p)^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \cdots \Sigma x' x^{(p-1)} & \Sigma x' x^{(p+1)} \\ & & \\ \Sigma x' x^{(p-1)} & \cdots \Sigma x^{(p-1)^2} & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p+1)} \\ \Sigma x' x^{(p+1)} & \cdots \Sigma x^{(p-1)} x^{(p+1)} & \Sigma x^{(p+1)^2} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \cdots \Sigma x' x^{(p-1)} & \Sigma x' x^{(p+1)} \\ & & \\ \Sigma x' x^{(p-1)} & \cdots \Sigma x^{(p-1)^2} & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p+1)} \\ \Sigma x' x^{(p)} & \cdots \Sigma x^{(p-1)} x^{(p)} & \Sigma x^{(p)} x^{(p+1)} \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

Or si l'on considère le déterminant symétrique:

$$\begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' \cdots & \Sigma x' x^{(p-1)} & \Sigma x' x^{(p)} & \Sigma x' x^{(p+1)} \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma x' x^{(p-1)} & \ldots & \Sigma x^{(p-1)^2} & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p)} & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p+1)} \\ \Sigma x' x^{(p)} & \ldots & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p)} & \Sigma x^{(p)^2} & \Sigma x^{(p)} x^{(p+1)} \\ \Sigma x' x^{(p+1)} & \ldots & \Sigma x^{(p-1)} x^{(p+1)} & \Sigma x^{(p)} x^{(p+1)} & \Sigma x^{(p+1)^2} \end{vmatrix},$$

le coefficient de dt^2 est un mineur d'ordre 2 formé avec les éléments du déterminant réciproque du déterminant que nous venons d'écrire. Il est donc égal au produit de ce déterminant par le mineur complémentaire

$$\begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' & \Sigma x'' x^{(p-1)} \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 & \Sigma x'' x^{(p-1)} \\ \\ \Sigma x' x^{(p-1)} & \Sigma x'' x^{(p-1)} & \Sigma x^{(p-1)^2} \end{vmatrix}.$$

Or en posant:

$$(12) \qquad M_p = \begin{Vmatrix} x_1' & x_2' & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & x_n'' \\ \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_n^{(p)} \end{Vmatrix}^2$$

et désignant par le symbole M_p la somme des carrés des déterminants contenus dans la matrice écrite, nous déduisons de la formule en substituant l'arc infiniment petit au sinus, divisant par dt^2 et remplaçant au dénominateur le second déterminant par le premier, comme on peut le faire:

$$(13) \qquad \left(\frac{d\omega_p}{dt}\right)^2 = \frac{M_{p+1} M_{p-1}}{M_p^2}.$$

D'autre part, nous déduisons de l'expression qui donne la distance de deux points, en l'appliquant à deux points infiniment voisins et situés sur la courbe ce que nous appelons l'élément d'arc de la courbe, nous obtenons ainsi:

$$(14) \qquad ds_1^2 = (x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2)\, dt^2,$$

ou bien simplement avec la notation que nous avons introduite:

$$ds_1^2 = M_1 dt^2.$$

Nous appellerons $p^{ième}$ *courbure* de la courbe au point M_1 le rapport $\frac{d\omega_p}{ds_1}$, limite du rapport de l'angle des deux espaces osculateurs à p dimensions aux extrémités d'un arc infiniment petit ds, à cet arc infiniment petit. Nous désignerons par R_p l'inverse de la $p^{ième}$ courbure et nous appellerons *R_p le rayon de $p^{ième}$ courbure.* Les formules (13) et (14) nous donnent alors

$$\left(\frac{d\omega_p}{ds_1}\right)^2 = \frac{1}{R_p^{\,2}} = \frac{1}{M_1}\cdot\frac{M_{p+1}M_{p-1}}{M_p}\,. \tag{15}$$

Pour $p = 2$ et $p = 1$ on trouve:

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{M_3}{M_2^2}, \quad \frac{1}{R_1^2} = \frac{M_2}{M_1^3},$$

si on pose $M_0 = 1$, comme le calcul de $\sin^2\omega_1$ montre qu'on doit forcément le faire. Des relations

$$\cdots \frac{1}{R_p^{\,2}} = \frac{1}{M_1}\,\frac{M_{p-1}M_{p+1}}{M_p^{\,2}} \cdots,$$

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{1}{M_1}\,\frac{M_1 M_3}{M_2^2}, \quad \frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{M_1}\,\frac{M_2}{M_1^2},$$

on déduit:

$$\frac{1}{R_p^2 R_{p-1}^4 R_{p-2}^6 \cdots R_2^{2p-2} R_1^{2p}} = \frac{M_{p+1}}{M_1^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}} \tag{16}$$

formule connue dans l'espace à 3 dimensions ($p = 2$). Dans tout ce qui précéde p peut recevoir une quelconque des valeurs $1, 2, \cdots, n - 2, n - 1$. *Nous avions précédemment reconnu en un point d'une courbe située dans un espace linéaire à n dimensions l'existence de $n - 1$ espaces linéaires osculateurs dont nous avions déterminé les équations; nous trouvons maintenant en un point $n - 1$ rayons de courbure pour lesquels nous avons une formule générale.*

En général M_n n'est pas nul en tous les points de la courbe. Si on avait en tous les points de la courbe $M_n = 0$, on sait que c'est là la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait entre les fonctions $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de la variable t une relation linéaire

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_n x_n + m = 0,$$

la courbe serait donc située dans un espace linéaire d'un nombre de dimensions inférieure à n. Il résulte aussi du théorème que nous venons de rappeler que si $M_{p+1} = 0$ en tous les points de la courbe sans que cela ait lieu pour M_p il y aura entre les fonctions $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $n - p$ relations linéaires et par suite la courbe sera située dans un espace linéaire à p dimensions. Remarquons enfin que si $M_{p+1} = 0$ en tous les points il en sera évidemment de même de $M_{p+2} \cdots$ jusqu'à M_n.

En certains points de la courbe on aura $M_n = 0$; ce sont les points que l'on peut appeler d'après Cayley points stationnaires. Pour les courbes algébriques le nombre de points stationnaires est fini. Une courbe ne contient pas en général de points pour lesquels $M_{n-1} = 0$; il faudrait pour que l'on ait des points tels que les n équations représentées par $M_n = 0$ eussent une ou plusieurs racines communes en t. Cela a lieu a fortiori pour M_{n-2}, $M_{n-3} \cdots$ etc.

Etant données deux fonctions de t: x_i, x_k développées suivant les puissances de la variable, supposons que les développements commencent par une même puissance de t. Appliquant alors la substitution

$$(17)\qquad \begin{aligned} \xi_i &= x_i \cos \Theta - x_k \sin \Theta, \\ \xi_k &= x_i \sin \Theta + x_k \cos \Theta, \end{aligned}$$

on peut disposer de Θ de manière à faire disparaitre dans ξ_k le coefficient de la première puissance de t qui entrait à la fois dans x_i et x_k.

Considérons dès lors notre courbe et supposons que M_1 soit un point de la courbe ne présentant aucune singularité. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont alors développées suivant les puissances de t on pourra en employant *au plus* $\frac{n(n-1)}{2}$ fois une transformation analogue à la transformation (17) amener $x_1, x_2, \cdots, x_n$ à la forme:

$$(18)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11} t + \frac{a_{12}}{1 \cdot 2} t^2 + \cdots + \frac{a_{1p}}{p!} t^p + \cdots + t^{n+1} f_1, \\ x_2 &= \frac{a_{22}}{1 \cdot 2} t^2 + \cdots + \frac{a_{2p}}{p!} t^p + \cdots + t^{n+1} f_2, \\ &\cdot \\ x_p &= \frac{a_{pp}}{p!} t^p + \cdots + t^{n+1} f_p, \\ &\cdot \\ x_n &= \frac{a_{nn}}{n!} t^n + t^{n+1} f_n. \end{aligned}$$

Les formules que nous avons données précédemment montrent que $M_1 x_1$ est la tangente, $M_1 x_1 x_2$ le plan osculateur, $\cdots$, $M_1 x_1 x_2 \cdots x_p$ l'espace linéaire osculateur à p dimensions. A une distance infiniment petite de l'origine correspondant à une valeur infiniment petite du premier ordre de t, on voit que x_1 sera du premier ordre, x_2 du second, $\cdots$ x_p du $p^{\text{ième}}$ $\cdots$ x_n du $n^{\text{ième}}$. *La distance d'un point infiniment voisin de M_1 à l'espace linéaire à p dimensions osculateur en M_1 est un infiniment petit du $p+1^{\text{ième}}$ ordre.* On aurait pu partir de cette propriété pour définir les différents espaces linéaires osculateurs.

On trouve simplement pour l'expression qui fournit dans ce cas le rayon de $p^{\text{ième}}$ courbure:

$$(19)\qquad \frac{1}{R_p^2} = \frac{2}{a_{11}^2} \, \frac{a_{p+1,\,p+1}^2}{a_{pp}^2} .$$

Les formules précédentes permettent également de résoudre facilement différentes questions se rapportant à la comparaison d'infiniments petits relatifs à l'arc de la courbe et à ses différents espaces linéaires osculateurs.

Les formules (18) et (19) nous apprennent que les projections orthogonales d'une courbe sur l'espace linéaire osculateur à p dimensions en un de ses points a en ce point mêmes rayons de première, deuxième $\cdots$ $(p-1)^{ième}$ courbure que la courbe primitive. Comme d'ailleurs l'élément d'arc est le même pour la courbe que pour sa projection, il en résulte qu'au point considéré $d\omega_1, d\omega_2, \cdots, d\omega_{p-1}$ sont les mêmes pour les deux courbes. De plus, et cela résultait évidemment de nos premières formules, l'espace linéaire à p dimensions contient tous les espaces linéaires osculateurs de dimension moindre relatifs au même point.

Supposons que la courbe proposée ait été projetée dans l'espace linéaire à p dimensions osculateur en M_1 et menons dans cet espace un système de p coordonnées rectangulaires $O, y_1 y_2 \cdots y_p$; projetons encore une fois la courbe sur l'espace à $p-1$ dimensions osculateur en M_1 où nous prenons un système de $p-1$ coordonnées rectangulaires $O, z_1 z_2 \cdots z_{p-1}$; nous y ajoutons O, z_p parallèle à la perpendiculaire à l'espace $O, z_1 z_2 \cdots z_{p-1}$ menée dans $O, y_1 y_2 \cdots y_p$. En M_1 nous avons dans l'espace linéaire à $p-1$ dimensions un $p-1^{èdre}$ $M_1 L_1 L_2 \cdots L_{p-1}$ formé par la tangente, la perpendiculaire à la tangente dans le plan osculateur, la perpendiculaire au plan osculateur dans l'espace à trois dimensions osculateur, $\cdots$, etc. Nous représentons dans le tableau suivant les cosinus des angles que font avec $O, z_1 z_2 \cdots z_p$ ces différentes directions

$$\begin{array}{cccccc}
 & z_1 & z_2 & \cdot\ z_i & \cdot\ z_{p-1} & z_p \\
L_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot\ \beta_{1i} & \cdot\ \beta_{1,\,p-1} & 0 \\
L_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot\ \beta_{2i} & \cdot\ \beta_{2,\,p-1} & 0 \\
L_k & \beta_{k,\,1} & \beta_{k,\,2} & \cdot\ \beta_{k,\,i} & \cdot\ \beta_{k,\,p-1} & 0 \\
L_{p-1} & \beta_{p-1,\,1} & \beta_{p-1,\,2} & \cdot\ \beta_{p-1,\,i} & \cdot\ \beta_{p-1,\,p-1} & 0 \\
z_p & 0 & 0 & \cdot\ 0 & \cdot\ 0 & 1
\end{array}$$

Si de plus nous représentons dans un tableau analogue les cosinus des angles faits par les axes $O, z_1 z_2 \cdots z_p$ avec $O, y_1 y_2 \cdots y_p$

$$\begin{array}{ccccc}
 & z_1 & z_2 & z_{p-1} & z_p \\
y_1 & \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{p-1,1} & \delta_{p,1} \\
y_2 & \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{p-1,2} & \delta_{p,2} \\
y_p & \gamma_{1,\,p} & \gamma_{2,\,p} & \gamma_{p-1,\,p} & \delta_{pp}
\end{array}$$

nous en déduisons par l'emploi du théorème des projections généralisé un tableau nous donnant les cosinus des angles faits par $M_1 L_1 L_2 \cdots L_{p-1} z_p$ avec $O, y_1 y_2 \cdots y_p$:

$$\begin{array}{lllll} & y_1 & y_2 & y_l & y_p \\ L_1 & \delta_{11} & \delta_{22} & \delta_{1l} & \delta_{1p} \\ L_2 & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{2l} & \delta_{2p} \\ L_k & \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{kl} & \delta_{kp} \\ z_p & \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{pl} & \delta_{pp} \end{array}$$

où nous posons:

$$\delta_{kl} = \sum_{i=1}^{p-1} \beta_{ki} \gamma_{il}, \qquad \begin{array}{l} k = 1 \cdot 2 \cdots p - 1, \\ l = 1 \cdot 2 \cdots p. \end{array}$$

Si nous supposons dès lors que le $p - 1^{\text{édre}}$ rectangulaire $M_1 L_1 L_2 \cdots L_{p-1}$ se déplaçant sur la courbe on ait les formules suivantes:

$$(20) \quad \begin{array}{lll} d\beta_{1i} & = \beta_{2i}\, d\omega_1 & \\ d\beta_{2i} & = \beta_{3i}\, d\omega_2 - & \beta_{1i}\, d\omega_1 \\ \vdots & & \\ d\beta_{ki} & = \beta_{k+1,i}\, d\omega_k - \beta_{k-1,i}\, d\omega_{k-1} & \\ \vdots & & \\ d\beta_{p-1,i} & = & - \beta_{p-2,i}\, d\omega_{p-2} \end{array} \qquad i = 1, 2, \cdots, p - 1$$

on en déduit:

$$d\delta_{kl} = \Sigma d\beta_{ki} \cdot \gamma_{il} = d\omega_k\, \Sigma \beta_{k+1,i} \gamma_{il} - d\omega_{k-1}\, \Sigma \beta_{k-1,i} \gamma_{il}$$
$$= \delta_{k+1,l}\, d\omega_k - \delta_{k-1,l}\, d\omega_{k-1}.$$

On a ainsi:

$$(21) \quad \begin{array}{lll} d\delta_{1l} & = \delta_{2l} & d\omega_1 \\ \vdots & & \\ d\delta_{kl} & = \delta_{k+1,l}\, d\omega_k - \delta_{k-1,l}\, d\omega_{k-1} & \\ \vdots & & \\ d\delta_{p-1,l} & = & - \delta_{p-2,l}\, d\omega_{p-2} \\ d\delta_{p,l} & = & 0 \end{array} \qquad l = 1, 2 \cdots p.$$

Si nous considérons en même temps notre courbe dans l'espace à p dimensions, au point M_1, $d\omega_k$, $d\omega_{k-1}$, $\delta_{k+1,l}$, $\delta_{k-1,l}$ sont les mêmes, $d\delta_{k,l}$ se mesure dans l'espace à $k + 1$ dimensions osculateur en M_1 qui est le même pour les deux courbes si $k < p - 1$. Les formules précédentes subsistent donc jusqu'à la $(p - 2)^{\text{ième}}$ pour notre courbe dans l'espace à p dimensions. Nous remplacerons les deux dernières par:

$$\begin{array}{ll} d\delta^{p-1,l} & = \varepsilon_1 - \delta_{p-2,l}\, d\omega_{p-2} \\ d\delta_{p,l} & = \varepsilon_2 \end{array}$$

ε_1 et ε_2 étant deux termes complémentaires que nous nous proposons de déterminer. Ces termes sont nuls si la courbe est située dans un espace linéaire à $p-1$ dimensions, c'est à dire si $d\omega_{p-1}=0$; donc

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1' d\omega_{p-1},\qquad \varepsilon_2=\varepsilon_2' d\omega_{p-1}.$$

D'autre part, comme par hypothèse notre système de coordonnées est rectangulaire:

$$\delta_{1,l}^2+\delta_{2,l}^2+\cdots+\delta_{p-1,l}^2+\delta_{p,l}^2=0;$$

et par suite

$$\delta_{1,l}\,d\cdot\delta_{1,l}+\cdots+\delta_{p-1,l}\,d\cdot\delta_{p-1,l}+\delta_{pl}\,d\cdot\delta_{pl}=0,$$

et on en déduit

$$\varepsilon_1=\varrho\cdot\delta_{p.l}\,d\omega_{p-1},\qquad \varepsilon_2=-\varrho\,\delta_{p-1,l}\,d\omega_{p-1}. \tag{22}$$

Si les équations de notre courbe sont:

$$y_1=y_1(t),\quad y_2=y_2(t),\ \cdots,\ y_p=y_p(t)$$

l'équation de l'espace osculateur à $p-1$ dimensions nous fournit l'expression de $\delta_{p.l}$. On a par exemple:

$$\delta_{p1}=\frac{\begin{vmatrix} y_2' & \cdots y_p' \\ y_2'' & \cdots y_p'' \\ & \\ y_2^{(p-1)} & \cdots y_p^{(p-1)} \end{vmatrix}}{M^{\frac{1}{2}}_{(p-1)}(y)},$$

$$\frac{d\delta_{p1}}{dt}=\frac{\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} y_2' & \cdots y_p' \\ y_2'' & \cdots y_p'' \\ & \\ y_2^{(p-2)} & \cdots y_p^{(p-2)} \\ y_2^{(p)} & \cdots y_p^{(p)} \end{vmatrix} M_{p-1}(y) \\ -\begin{vmatrix} y_2' & \cdots y_p' \\ y_2'' & \cdots y_p'' \\ & \\ y_2^{(p-2)} & \cdots y_p^{(p-2)} \\ y_2^{(p-1)} & \cdots y_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \left\{ \left\| \begin{matrix} y_1' & \cdots y_p' \\ y_1'' & \cdots y_p'' \\ & \\ y_1^{(p-2)} & \cdots y_p^{(p-2)} \\ y_2^{(p-1)} & \cdots y_p^{(p-1)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} y_1' & \cdots y_p' \\ y_1'' & \cdots y_p'' \\ & \\ y_1^{(p-2)} & \cdots y_p^{(p-2)} \\ y_1^{(p)} & \cdots y_p^{(p)} \end{matrix} \right\| \right\} \end{array}\right\}}{M^{\frac{3}{2}}_{p-1}(y)}.$$

L'application de la méthode qui nous a conduit de la formule (12) à la formule (13) nous donne ici:

$$\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{d\delta_{pl}}{dt}\right)^2=\frac{M_p(y)\,M_{p-2}(y)}{M_{p-1}^2}=\left(\frac{d\omega_{p-1}}{dt}\right)^2,$$

calculant d'autre part au moyen des formules (22) cette même somme nous en tirons

$$\varrho^2 = 1.$$

Nous pouvons prendre $\varrho = 1$ ($\varrho = -1$ correspondrait à la direction opposée de la perpendiculaire Mz_p). Comme les formules analogues aux formules (20) sont connues dans le plan et dans l'espace nous en concluons pour la courbe gauche dans un espace linéaire à n dimensions cette proposition*). *Représentons dans le tableau suivant les cosinus des angles que font les droites* $M_1L_1L_2 \cdots L_n$ *avec* $Ox_1x_2 \cdots x_n$, M_1L_1 *est la tangente en* M_1, M_1L_2 *la perpendiculaire à la tangente située dans le plan osculateur,* $\cdots$ M_1L_p *la perpendiculaire à l'espace linéaire à* $p-1$ *dimensions située dans l'espace linéaire osculateur à* p *dimensions,* $\cdots$ M_1L_n *la perpendiculaire à l'espace linéaire osculateur à* $n-1$ *dimensions:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_l & x_n \\
L_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1l} & \alpha_{1n} \\
L_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2l} & \alpha_{2n} \\
L_p & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \alpha_{pl} & \alpha_{pn} \\
L_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nl} & \alpha_{nn};
\end{array}$$

on a les formules suivantes que nous appellerons formules de déplacement du $n^{\text{ièdre}}$ *osculateur*

$$(23)\qquad \begin{array}{lcl}
d\alpha_{1l} = & \alpha_{2l}\,d\omega_1 & \\
d\alpha_{2l} = & \alpha_{3l}\,d\omega_2 - & \alpha_{1l}\,d\omega_1 \\
\vdots & & \\
d\alpha_{pl} = & \alpha_{p+1,l}\,d\omega_p - & \alpha_{p-1,l}\,d\omega_{p-1}\,\cdot \\
\vdots & & \\
d\alpha_{nl} = & & -\,\alpha_{n-1,l}\,d\omega_{n-1}
\end{array}\qquad l = 1, 2, \cdots, n.$$

On peut aussi alors écrire pour les équations de l'espace linéaire osculateur à p dimensions:

$$(24)\qquad X_i - x_i = \lambda_1\alpha_{1i} + \lambda_2\alpha_{2i} + \cdots + \lambda_p\alpha_{pi}.$$

Au point M_1 l'espace linéaire à $n-1$ dimensions perpendiculaire à la tangente a pour équation:

$$\sum_1^n (X_i - x_i)\,\alpha_{1i} = 0.$$

---

*) Formules de Serret-Frenet: Journal de Liouville, t. XVI_1 et XVII_1.

L'intersection de cet espace linéaire avec la tangente

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i}$$

donne $\lambda = 0$, ce qui était évident.

Deux espaces normaux consécutifs auront une intersection qui en tenant compte des relations (23) est formée par les deux équations

$$\sum (X_i - x_i)\, \alpha_{1i} = 0, \quad \sum (X_i - x_i)\, \frac{\alpha_{2i}}{R_1} - 1 = 0.$$

L'intersection avec le plan osculateur

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i}$$

se trouve alors en donnant à λ_1 et λ_2 les valeurs $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = R_1$.

Considérons encore l'intersection de trois espaces normaux consécutifs

$$\sum (X_i - x_i)\, \alpha_{1i} = 0, \quad \sum (X_i - x_i)\, \frac{\alpha_{2i}}{R_1} - 1 = 0,$$

$$\sum (X_i - x_i) \left(\frac{\alpha_{3i}}{R_1 R_2} + \alpha_{2i} \frac{d}{ds}\, \frac{1}{R_1} - \frac{\alpha_1}{R_1^2} \right) = 0.$$

L'intersection avec l'espace à trois dimensions osculateur

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \lambda_3 \alpha_{3i}$$

s'obtient en donnant à $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ les valeurs $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = R_1$, $\lambda_3 = R_2 R_1'$; remarquons qu'on peut écrire:

$$\lambda_3 = R_2 \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \frac{\lambda_1}{R_1} \right).$$

Supposons que par $k - 1$ dérivations successives et par l'emploi des relations (23) nous ayons trouvé pour l'intersection de k espaces normaux consécutifs:

$$(25) \quad \sum (X_i - x_i)\, \alpha_{1i} = 0, \qquad \sum (X_i - x_i)\, \frac{\alpha_{2i}}{R_1} - 1 = 0, \cdots,$$

$$\sum (X_i - x_i)(A_k \alpha_k + A_{k-1} \alpha_{k-1} + \cdots + A_1 \alpha_1) + B_1 = 0$$

et que cherchant l'intersection avec

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \cdots + A_k \alpha_{ki}$$

nous ayons trouvé:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = R_1, \quad \lambda_3 = R_2 \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \frac{\lambda_1}{R_1} \right),$$

$$\lambda_4 = R_3 \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \frac{\lambda_2}{R_2} \right), \cdots, \lambda_k = R_{k-1} \left(\frac{d\lambda_{k-1}}{ds} + \frac{\lambda_{k-2}}{R_{k-2}} \right);$$

pour trouver l'intersection de $k + 1$ espaces normaux consécutifs, nous devons joindre aux équations (25) la suivante, obtenue en dérivant une fois de plus et employant les relations (23):

$$\sum (X_i - x_i) \cdot \left| \begin{array}{l} \alpha_{k+1,i} \dfrac{A_k}{R_k} + \alpha_{k,i} A_k' - \alpha_{k-1,i} \dfrac{A_k}{R_{k-1}} \\ \qquad + \alpha_{k,i} \dfrac{A_{k-1}}{R_{k-1}} + \alpha_{k-1,i} A_{k-1}' - \alpha_{k-2,i} \dfrac{A_{k-1}}{R_{k-2}} \\ \qquad\qquad + \alpha_{k-1,i} \dfrac{A_{k-2}}{R_{k-2}} + \alpha_{k-2,i} A_{k-2}' - \cdots + \\ + \alpha_{4,i} \dfrac{A_3}{R_3} + \alpha_{3i} A_3' - \alpha_{2i} \dfrac{A_3}{R_2} \\ \qquad + \alpha_{3i} \dfrac{A_2}{R_2} + \alpha_{2i} A_2' - \alpha_{1i} \dfrac{A_2}{R_1} \\ \qquad\qquad + \alpha_{2i} \dfrac{A_1}{R_1} + \alpha_{1i} A_1' \end{array} \right| + B' - A_1 = 0.$$

L'intersection avec

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \cdots + \lambda_k \alpha_{ki} + \lambda_{k+1} \alpha_{k+1,i}$$

donne pour $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$ les mêmes valeurs que précédemment et λ_{k+1} se détermine au moyen de l'équation:

$$(26) \qquad \lambda_{k+1} \frac{A_k}{R_k} + \lambda_k \left| \begin{array}{l} A_k' \\ + \dfrac{A_{k-1}}{R_{k-1}} \end{array} \right. + \lambda_{k-1} \left| \begin{array}{l} - \dfrac{A_k}{R_{k-1}} \\ + A_{k-1}' \\ + \dfrac{A_{k-2}}{R_{k-2}} \end{array} \right. + \cdots + \lambda_2 \left| \begin{array}{l} - \dfrac{A_3}{R_2} \\ + A_2' \\ + \dfrac{A_1}{R_1} \end{array} \right. + \lambda_1 \left| \begin{array}{l} - \dfrac{A_2}{R_1} \\ + A_1' \end{array} \right. + B' - A_1 = 0.$$

Mais l'équation qui déterminait précédemment λ_k était

$$\lambda_k A_k + \lambda_{k-1} A_{k-1} + \cdots + \lambda_2 A_2 + B_1 = 0,$$

d'où on tire en dérivant toujours par rapport à s:

$$\lambda_k A_k' + \lambda_{k-1} A_{k-1}' + \cdots + \lambda_2 A_2',$$
$$+ A_k \frac{d\lambda_k}{ds} + A_{k-1} \frac{d\lambda_{k-1}}{ds} + \cdots + A_2 \frac{d\lambda_2}{ds} + B_1' = 0.$$

Substituant dans l'équation (26) la valeur de $\lambda_k A_k' + \lambda_{k-1} A_{k-1}' + \cdots + \lambda_2 A_2'$ qu'on obtient ainsi, l'équation devient en ordonnant par rapport aux A:

$$(27) \qquad A_k \left(\frac{\lambda_{k+1}}{R_k} - \frac{d\lambda_k}{ds} - \frac{\lambda_{k-1}}{R_{k-1}} \right) + A_{k-1} \left(\frac{\lambda_k}{R_{k-1}} - \frac{d\lambda_{k-1}}{ds} - \frac{\lambda_{k-2}}{R_{k-2}} \right) + \cdots$$
$$+ A_3 \left(\frac{\lambda_4}{R_3} - \frac{d\lambda_3}{ds} - \frac{\lambda_3}{R_2} \right) + A_2 \left(\frac{\lambda_3}{R_2} - \frac{d\lambda_2}{ds} - \frac{\lambda_1}{R_1} \right)$$
$$+ A_1 \left(\frac{\lambda_2}{R_1} - 1 \right) = 0.$$

Or les divers coefficients de $A_1 A_2 \cdots A_{k-1}$ sont nuls par hypothèse. A_k est égal comme on le voit facilement à $\frac{1}{R_1 R_2 \cdots R_{k-1}}$, il est différent de 0 si nous avons affaire à un point non singulier, donc:

$$(28) \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = R_1, \cdots, \lambda_{k+1} = R_k \left(\frac{d\lambda_k}{ds} + \frac{\lambda_{k-1}}{R_{k-1}} \right).$$

$$k = 2, 3 \cdots n - 1$$

A un point M_1 de la courbe correspondent donc en général $n - 1$ points $M_2 M_3 \cdots M_p \cdots M_n$; le point M_p est donné par les formules:

$$X_i - x_i = \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \cdots + \lambda_p \alpha_{pi}$$

où on donne aux λ les valeurs définies par les relations (28). Le point M_p est situé dans l'espace linéaire à p dimensions osculateurs en M_1 et les points $M_{p-1} \cdots M_2$, M_1 constituent ses projections sur les espaces linéaires osculateurs en M_1 à $p - 1, \cdots, 2, 1$ dimensions.

— —

$p + 1$ points consécutifs de la courbe déterminent en général un espace sphérique à $p - 1$ dimensions qui est contenu dans l'espace linéaire osculateur à p dimensions. Le calcul des coordonnées du centre de ces différents *espaces sphériques osculateurs* est précisément celui que nous avons fait pour déterminer $M_2 M_3 \cdots M_n$. La distance ϱ_p du point M_p au point M_1 ou rayon de l'espace sphérique osculateur à $p - 1$ dimensions résulte des formules précédentes

$$(29) \qquad \varrho_p^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_p^2.$$

Les mêmes formules nous permettent de déterminer l'arc de la courbe lieu de M_p. En dérivant par rapport à s_1 et tenant compte des relations (23) et (28) on a

$$(30) \qquad \frac{dX_i}{ds_1} = \frac{\alpha_{p,i} \lambda_{p+1} + \alpha_{p+1,i} \lambda_p}{R_p},$$

d'où

$$(31) \qquad \left(\frac{ds_p}{ds_1} \right)^2 = \frac{\lambda_{p+1}^2 + \lambda_p^2}{R_p^2}, \qquad p = 1, 2 \cdots n - 1,$$

et pour $p = n$ on trouve simplement

$$(32) \qquad \frac{dX_i}{ds_1} = \alpha_{n,i} \left(\frac{d\lambda_n}{ds} + \frac{\lambda_{n-1}}{R_{n-1}} \right),$$

d'où

$$(33) \qquad \left(\frac{ds_n}{ds_1} \right)^2 = \left(\frac{d\lambda_n}{ds} + \frac{\lambda_{n-1}}{R_{n-1}} \right)^2.$$

L'expression (30) peut s'écrire

$$(34) \qquad \frac{dX_i}{ds_1} = \frac{d\omega_p}{ds_p} \left(\alpha_{p,i} \lambda_{p+1} + \alpha_{p+1,i} \lambda_p \right).$$

En désignant par $M_p T_p$ la tangente en M_p, elle est d'après cette formule située dans le plan $M_{p-1}M_pM_{p+1}$; on en déduit aussi immédiatement

$$(35)\quad \cos(M_{p-1}M_pT_p) = \lambda_{p+1}\frac{d\omega_p}{ds_p}, \qquad \sin(M_{p+1}M_pT_p) = \lambda_p\frac{d\omega_p}{ds_p},$$

c'est à dire que la tangente en M_p est la perpendiculaire abaissée de ce point sur $M_{p-1}M_{p+1}$. Des formules (35) on déduit que la tangente en M_n est la droite M_nM_{n-1}. Par des dérivations successives et l'application des relations (23) nous reconnaitrions qu'en M_n le plan osculateur est le plan $M_nM_{n-1}M_{n-2}, \cdots$ l'espace linéaire à p dimensions osculateur en M_n est l'espace $M_nM_{n-1}\cdots M_{n-p}$ et ensuite qu'en désignant par $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_p \cdots \Omega_{n-1}$ les angles qui relativement à la courbe M_n repondent aux angles $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_p \cdots \omega_{n-1}$ relatifs à la courbe M_1 on a:

$$(36)\quad d\Omega_1 = d\omega_{n-1},\quad d\Omega_2 = d\omega_{n-2},\quad d\Omega_p = d\omega_{n-p}\cdots d\Omega_{n-1} = d\omega_1,$$

ce qui est la généralisation du théorème de Fourier relatif aux courbes dans l'espace à trois dimensions. On connait d'ailleurs ds_n, on peut donc calculer les différents rayons de courbure en M_n à la courbe lieu de M_n.

Si une courbe est tracée sur un espace sphérique à $n - 1$ dimensions la quantité $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$ est constante et égale au rayon de la sphère.

Occupons-nous de la réciproque. D'après la formule (32) pour que M_n soit un point fixe, il faut et il suffit que

$$(37)\quad \frac{d\lambda_n}{ds} + \frac{\lambda_{n-1}}{R_{n-1}} = 0.$$

Supposons λ_n différent de 0, on peut écrire cette équation

$$\lambda_n\frac{d\lambda_n}{ds} + \lambda_{n-1}\frac{\lambda_n}{R_{n-1}} = 0,$$

ou bien

$$\lambda_n\frac{d\lambda_n}{ds} + \lambda_{n-1}\left(\frac{\lambda_n}{R_{n-1}} - \frac{\lambda_{n-2}}{R_{n-2}}\right) + \lambda_{n-2}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{R_{n-2}} - \frac{\lambda_{n-3}}{R_{n-3}}\right) + \cdots$$
$$+ \lambda_3\left(\frac{\lambda_4}{R_3} - \frac{\lambda_2}{R_2}\right) + \lambda_2\cdot\frac{\lambda_3}{R_2} = 0,$$

c'est à dire en tenant compte des relations (28):

$$\lambda_n\frac{d\lambda_n}{ds} + \lambda_{n-1}\frac{d\lambda_{n-1}}{ds} + \cdots + \lambda_3\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\frac{d\lambda_2}{ds} = 0,$$

d'où:

$$(38)\quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \cdots + \lambda_n^2 = C^2.$$

Si cette condition est remplie, la condition (37) le sera aussi, et alors la courbe sera sur un espace sphérique à $n-1$ dimensions, à moins que λ_n ne soit nul.

Proposons-nous comme application *de déterminer les courbes qui ont en tous leurs points les mêmes rayons de courbure.* Nous avons à distinguer deux cas, suivant que n est pair ou impair.

Supposons n pair et prenons pour simplifier l'écriture $n=4$. Des relations:

$$\frac{d\alpha_{1i}}{ds}=\frac{\alpha_{2i}}{R_1}, \quad \frac{d\alpha_{2i}}{ds}=\frac{\alpha_{3i}}{R_2}-\frac{\alpha_{1i}}{R_1}, \quad \frac{d\alpha_{3i}}{ds}=\frac{\alpha_{4i}}{R_3}-\frac{\alpha_{2i}}{R_1},$$

$$\frac{d\alpha_{4i}}{ds}=-\frac{\alpha_{3i}}{R_3}$$

on tire par des dérivations successives

$$(39) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\alpha_{1i}}{ds^2} &= c_1\alpha_{1i}+c_2\alpha_{3i}, \\ \frac{d^4\alpha_{1i}}{ds^4} &= c_3\alpha_{1i}+c_4\alpha_{3i}. \end{aligned}$$

Eliminant entre ces deux équations α_{3i} on en déduit une équation différentielle linéaire à coefficients constants:

$$(40) \qquad C_1\frac{d^4\alpha_{1i}}{ds^4}+C_2\frac{d^2\alpha_{1i}}{ds^2}+C_3\alpha_{1i}=0,$$

d'où nous déduisons:

$$\alpha_{1i}=m_1\beta_{1i}\cos\frac{s}{a_1}-m_1\beta_{2i}\sin\frac{s}{a_1}+m_2\beta_{3i}\cos\frac{s}{a_2}-m_2\beta_{4i}\sin\frac{s}{a_2},$$

$$(i=1,\,2,\,3,\,4);$$

nous supposons

$$m_1^2+m_2^2=1,$$

a_1 et a_2 sont déterminés par l'équation:

$$C_1-C_2a^2+C_3a^4=0.$$

De ce que en tous les points de la courbe on doit avoir $\Sigma\alpha_{1i}^2=$ on déduit que les β sont les cosinus directeurs d'un 4-èdre rectangulaire. Prenant de nouveaux axes parallèles à ce 4-èdre, on a:

$$\alpha_{11}=m_1\cos\frac{s}{a_1}, \qquad \alpha_{12}=-m_1\sin\frac{s}{a_1},$$

$$\alpha_{13}=m_2\cos\frac{s}{a_2}, \qquad \alpha_{14}=-m_2\sin\frac{s}{a_1},$$

intégrant sans introduire de constantes, ce qui revient à un déplacement de l'origine, on a pour les équations de la courbe cherchée:

$$x_1 = m_1 a_1 \sin \frac{s}{a_1}, \qquad x_2 = m_1 a_1 \cos \frac{s}{a_2},$$

$$x_3 = m_2 a_2 \cos \frac{s}{a_2}, \qquad x_4 = m_2 a_2 \cos \frac{s}{a_2}.$$

De même dans le cas général on a

$$x_{2k-1} = m_k a_k \sin \frac{s}{a_k}, \qquad x_{2k} = m_k a_k \cos \frac{s}{a_k}, \qquad k = 1, 2 \cdots n$$

avec la condition

$$(41) \qquad m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = 1.$$

S'il s'agit d'un espace de dimension impaire, de l'espace à 5 dimensions par exemple, on tire des cinq relations (23) par des dérivations successives $\frac{d^2\alpha_{2i}}{ds^2}$ et $\frac{d^2\alpha_{4i}}{ds^2}$ qui ne contiennent que α_{2i} et α_{4i}. Eliminant α_{4i} on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(42) \qquad C_1' \frac{d^4\alpha_{2i}}{ds^4} + C_2' \frac{d^2\alpha_{2i}}{ds^2} + C_3' = 0,$$

et nous en déduirons:

$$\alpha_{2i} = -R_1 \left(\frac{m_1 \beta_{1i}}{a_1} \cos \frac{s}{a_1} + \frac{m_1 \beta_{2i}}{a_1} \sin \frac{s}{a_1} + \frac{m_2 \beta_{3i}}{a_2} \cos \frac{s}{a_2} + \frac{m_2 \beta_{4i}}{a_2} \sin \frac{s}{a_2} \right)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

et en intégrant

$$\alpha_{1i} = m_1 \beta_{1i} \cos \frac{s}{a_1} - m_1 \beta_{2i} \sin \frac{s}{a_1} + m_2 \beta_{3i} \cos \frac{s}{a_2}$$

$$- m_2 \beta_{4i} \sin \frac{s}{a_2} + \frac{p^2}{1+p^2} \beta_{5i}, \quad i = 1,2,3,4,5$$

où nous supposons:

$$m_1^2 + m_2^2 = 1.$$

Or on reconnait que les β sont les cosinus directeurs d'un 5èdre rectangulaire. Prenant de nouveaux axes parallèles à ce 5èdre, on a

$$\alpha_{11} = m_1 \cos \frac{s}{a_1}, \qquad \alpha_{12} = -m_1 \sin \frac{s}{a_1},$$

$$\alpha_{13} = m_2 \cos \frac{s}{a_2}, \qquad \alpha_{14} = -m_2 \sin \frac{s}{a_2},$$

$$\alpha_{15} = \frac{p^2}{1+p^2},$$

et en intégrant sans introduire de constantes:

$$x_1 = m_1 a_1 \sin \frac{s}{a_1}, \qquad x_2 = m_1 a_1 \cos \frac{s}{a_1},$$

$$x_3 = m_2 a_2 \sin \frac{s}{a_2}, \qquad x_4 = m_2 a_2 \cos \frac{s}{a_2},$$

$$x_5 = \frac{p^2}{1+p^2} s.$$

Dans le cas général, on a:

$$(43a)\qquad x_{2k-1} = m_k a_k \sin\frac{s}{a_k}, \qquad x_{2k} = m_k a_k \cos\frac{s}{a_k},$$

$$k = 1, 2 \cdots n,$$

et de plus

$$(43b)\qquad x_{2n+1} = \frac{p^2}{1+p^2}\, s$$

avec la condition

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = 1.$$

La courbe (43) est située sur un espace cylindrique de génératrices parallèles à Ox_{2n+1} et dont la base dans l'espace perpendiculaire $Ox_1 x_2 \cdots x_{2n}$ est une courbe ayant en tous ses points les mêmes rayons de courbure, et elle coupe les génératrices sous un angle constant.

Dans les espaces à dimension paire on peut déterminer des courbes algébriques ayant la propriété dont il s'agit; dans les espaces à dimension impaire, ces courbes sont transcendantes. Pour ces courbes on peut calculer facilement les valeurs des λ:

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = R_1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \dfrac{R_1 R_3}{R_2}, \cdots \\ \lambda_{2k} = \dfrac{R_1 R_3 \cdots R_{2k-1}}{R_2 R_4 \cdots R_{2k-2}}, \qquad \lambda_{2k+1} = 0 \cdots . \end{array}\right.$$

Dans un espace à $2n$ dimensions on a

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{2n}^2 = \text{const.}$$

et comme λ_{2n} est différent de 0 la courbe est sur un espace sphérique à $2n - 1$ dimensions ce que montrent d'ailleurs les équations (41).

Dans un espace à $2n + 1$ dimensions, on a également

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{2n+1}^2 = \text{const.},$$

mais comme $\lambda_{2n+1} = 0$ on ne peut pas en conclure que la courbe est sur un espace sphérique à $2n$ dimensions. Et en effet, cela n'a pas lieu, car alors

$$\frac{d\lambda_{2n+1}}{ds} + \frac{\lambda_{2n}}{R_{2n}} = \frac{R_1 R_3 \cdots R_{2n-1}}{R_2 R_4 \cdots R_{2n}}$$

et cette expression est différente de 0.

Leipsic, 3. Juin 1881.

Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie.

Von

A. Hurwitz in Hildesheim.

I.

Bekanntlich ist die Gleichung

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = A_2\lambda_1^2 + 2B_2\lambda_1 + C_2 = A_1\lambda_2^2 + 2B_1\lambda_2 + C_1 = 0, \tag{1}$$

wo A_i, B_i, C_i ganze rationale Functionen zweiten Grades von λ_i bedeuten, das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1C_1}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{B_2^2 - A_2C_2}}. \tag{2}$$

Deutet man nun λ_1 und λ_2 als Parameter zweier rationalen einstufigen Mannigfaltigkeiten M_1 resp. M_2, so stellt die Gleichung (1) die allgemeinste $(2-2)$-deutige Beziehung zwischen den Elementen dieser Mannigfaltigkeiten dar.

Es ist bekannt und durch eine leichte Rechnung ohne Weiteres zu verificiren, dass die rationalen Invarianten der vier Elemente von M_1, welche durch die Gleichung

$$B_1^2 - A_1C_1 = 0$$

bestimmt werden, mit denen der vier Elemente von M_2, deren Parameter die Wurzeln von

$$B_2^2 - A_2C_2 = 0$$

sind, gleichen Werth besitzen.

Diese zwei Mal vier Elemente sind offenbar diejenigen „Doppelelemente" von M_1 resp. M_2, denen zwei zusammenfallende Elemente in M_2 resp. M_1 correspondiren.

Wir wollen uns nun irgend eine $2-2$-deutige Beziehung zwischen den Elementen von M_1 und M_2 gegeben denken. Dieselbe sei jedoch in dem Sinne allgemein, dass die vier Doppelelemente in M_1 wie in

M_2 vier *getrennte* Elemente sind. Wegen der Gleichheit der Invarianten können wir nun die Parametervertheilung auf M_1 und M_2 so treffen, dass sowohl den vier Doppelelementen in M_1, wie auch denen in M_2, die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k}$$

zufallen.

Dann wird aber die Gleichung (1), welche die 2 — 2-deutige Beziehung darstellt, eine solche Form annehmen, dass die aus ihr abgeleitete Differentialgleichung (2) folgende wird:

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\overline{1-\lambda_1^2}\cdot\overline{1-\varkappa^2\lambda_1^2}}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\overline{1-\lambda_2^2}\cdot\overline{1-\varkappa^2\lambda_2^2}}}.$$

Gehen wir nunmehr von den Integralen zu den elliptischen Functionen über, so erhalten wir den *Fundamentalsatz:*

1. „*Sind zwei rationale einstufige Mannigfaltigkeiten* (2 — 2)-*deutig algebraisch auf einander bezogen, so ist bei geeigneter Wahl der Parametervertheilung die Beziehung so dargestellt, dass einem Elemente* $\lambda_1 = \operatorname{sn} u$*) *der einen Mannigfaltigkeit die Elemente*

$$\lambda_2' = \operatorname{sn}(u + C) \quad \textit{und} \quad \lambda_2'' = \operatorname{sn}(u - C)$$

der andern Mannigfaltigkeit entsprechen.

Dabei bedeutet C eine der Beziehung eigenthümliche Constante, und die Parametervertheilung ist so zu treffen, dass den Doppelelementen in der einen wie in der andern Mannigfaltigkeit die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k}$$

beigelegt werden."

Umgekehrt:

2. „*Lässt man einem Elemente* $\operatorname{sn} u$ *einer rationalen einstufigen Mannigfaltigkeit die Elemente* $\operatorname{sn}(u+C)$ *und* $\operatorname{sn}(u-C)$ *einer zweiten solchen Mannigfaltigkeit entsprechen, so ist dadurch eine* 2 — 2-*deutige Beziehung zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit festgesetzt, deren Doppelelemente in der einen wie in der anderen Mannigfaltigkeit die Parameter* $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ *besitzen.*"

---

*) Ich gebrauche die Gudermann'sche Abkürzung von sin am *u*. — Uebrigens habe ich nur um der Gewohnheit der Mathematiker zu folgen die Jacobi'sche Function sin am *u* eingeführt. An ihre Stelle kann jede andere zweiwerthige elliptische Function treten, entsprechend dem Umstande, dass die elliptische Differentialgleichung in die allgemeine kanonische Gestalt

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)(\lambda_1-d)}} = \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2-a)(\lambda_2-b)(\lambda_2-c)(\lambda_2-d)}}$$

gesetzt werden kann.

In Bezug auf den letzten Satz ist jedoch zu bemerken, dass in dem *einen* Falle, wo die Constante C einer halben Periode von sn u gleich ist, die 2 — 2-deutige Beziehung in eine projectivische Beziehung zwischen den Mannigfaltigkeiten ausartet.

Ich füge den Sätzen 1. und 2. noch einen dritten allgemeinen Satz hinzu, der jedoch von geringerer Bedeutung ist.

Je vier Elemente a, b, c, d einer einstufigen rationalen Mannigfaltigkeit bestimmen nämlich drei quadratische Involutionen. Denn vier Elemente können auf drei Arten in zwei Elementepaare angeordnet werden (ab, cd; ac, bd; ad, bc;), und durch zwei Elementepaare ist eine quadratische Involution eindeutig bestimmt.

Unser Satz lautet nun so:

3. „*Sind zwei rationale einstufige Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 2 — 2-deutig auf einander bezogen, so bestimmen die vier Doppelelemente von M_1 dieselben drei quadratischen Involutionen, wie die vier Elemente von M_1, welche den Doppelelementen von M_2 entsprechen.*“ *)

Dass dieser Satz richtig bleibt, wenn man in der Aussage M_1 mit M_2 vertauscht, ist selbstverständlich.

Zum Beweise bemerken wir, dass in der Darstellung durch elliptische Functionen nach Satz 1. sowohl die Doppelelemente von M_1 wie auch die von M_2 die Parameter

$$+1 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4}\right), \quad -1 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4}\right), \quad +\frac{1}{k} = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}\right),$$
$$-\frac{1}{k} = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2}\right)^{**)}$$

erhalten. Daher haben die Elemente von M_1, welche den Doppelelementen von M_2 entsprechen, gleichfalls nach Satz 1. die Parameter

$$\lambda_1 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + C\right), \qquad \lambda_2 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - C\right),$$
$$\lambda_3 = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2} + C\right), \qquad \lambda_4 = \operatorname{sn}\left(-\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2} - C\right),$$

welche Werthe paarweise einander entgegengesetzt gleich sind. Also liegen die Elementenpaare λ_1, λ_2; λ_3, λ_4; $+1$, -1 und $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ harmonisch zu den Elementen 0 und ∞.

Die überhaupt möglichen Weisen, wie man die Werthe ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ den Doppelelementen von M_1 und denen von M_2 als Parameter zuweisen kann, liefern so, wie man leicht abzählt, drei verschiedene Anordnungen der acht in M_1 betrachteten Elemente zu vier Elementepaaren in Involution, womit dann unser Satz bewiesen ist.

---

*) Man kann dieses auch so ausdrücken:

„Die beiden in Betracht gezogenen Elementenquadrupel von M_1 besitzen *dieselbe* Covariante sechster Ordnung.“

**) Die nach Jacobi mit $4K$ und $2iK'$ bezeichneten Perioden von sn u nennen wir ω_1 und ω_2 respective.

Die Sätze 1. und 2. enthalten Alles, was aus der Theorie der elliptischen Functionen, neben deren Periodicität, in den Anwendungen auf die geometrischen Schliessungsprobleme*) benutzt worden ist, und ich lege besonderes Gewicht darauf, dass sie in der gegebenen geometrischen Formulirung scharf das Gemeinsame bezeichnen in den Ueberlegungen, die von der Theorie der elliptischen Functionen aus zu den hierher gehörigen Theoremen hinführen.

Auch die elliptische Parametervertheilung auf Curven vom Geschlechte 1 lässt sich auf unsern Satz 1. direct basiren. Bei der ebenen Curve 3. Ordnung z. B. braucht man nur die Parameter zweier Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf der Curve liegen, als Coordinaten einzuführen.

Ohne auf alles dieses näher einzugehen, sei es mir gestattet einige neue Anwendungen dieser fruchtbaren Methode zu geben, wobei es mir hauptsächlich darauf ankommt zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich dieselbe in der oben aufgestellten geometrischen Formulirung für geometrische Probleme verwerthen lässt.

II.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise will ich im Folgenden *einen Punkt P einer Raumcurve 3ter Ordnung einen Tangentialpunkt einer Geraden G nennen, wenn die durch P und G gehende Ebene die Raumcurve in einem von P verschiedenen Punkte berührt.*

Es ist klar, dass jede die Raumcurve nicht treffende Gerade vier Tangentialpunkte besitzt. Dagegen ist jeder beliebige Punkt der Raumcurve Tangentialpunkt für jede beliebige Tangente der Curve. Es sei nun eine Raumcurve 3ter Ordnung C_3 und eine dieselbe nicht treffende Gerade G_1 gegeben. Durch G_1 legen wir alle möglichen Ebenen. Jede solche Ebene schneidet die C_3 in 3 Punkten, und die Gesammtheit dieser Punktetripel bildet offenbar auf der Curve eine Involution 3ten Grades.

Lassen wir nun je zwei Punkte der Raumcurve einander entsprechen, deren Verbindungsgerade G_1 trifft, so dass also in jedem Tripel der erwähnten Involution je zwei Punkte immer dem dritten als entsprechende zugehören, so ist damit eine 2 — 2-deutige Beziehung zwischen den Punkten der C_3 hergestellt.

---

*) In der That kommen alle diese Probleme auf die Untersuchung von 2 — 2-deutigen Beziehungen zwischen rationalen Mannigfaltigkeiten hinaus. Siehe: Mathem. Annalen XV, pag. 8, wo diese Probleme auf ihren algebraischen Kern zurückgeführt sind.

Ertheilen wir den Doppelelementen dieser Beziehung, also den *Tangentialpunkten* der Geraden G_1 die Parameter

$$+1, \quad -1, \quad +\frac{1}{k}, \quad -\frac{1}{k},$$

so wird die 2 — 2-deutige Beziehung nach unserem Satze 1. der Art sein, dass dem Punkte $\operatorname{sn} u$ die Punkte $\operatorname{sn}(u+C)$ und $\operatorname{sn}(u-C)$ entsprechen. Die letzteren Punkte sind aber dann auch zwei sich entsprechende Punkte und es folgt daher:

„*Die Constante C ist ein Periodendrittheil* $\frac{\Omega_1}{3}$, *so dass je drei Punkten, die von einer durch die Gerade* G_1 *gelegten Ebene auf* C_3 *ausgeschnitten werden, die Parameter*

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_1}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\frac{\Omega_1}{3}\right)$$

zukommen.“

Den Tangentialpunkten A_1, A_2, A_3, A_4 der Geraden G_1 entsprechen dabei die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3, B_4 der die Gerade G_1 treffenden Tangenten, jeder doppelt gezählt. Unser allgemeiner Satz 3. ergiebt daher, unter Berücksichtigung einer bekannten Eigenschaft der Raumcurve 3. Ordnung, folgendes Theorem:

„*Das aus den Tangentialpunkten einer Geraden als Ecken gebildete Tetraeder und das in gleicher Weise durch die Berührungspunkte der jene Gerade treffenden Tangenten bestimmte Tetraeder liegen so zu einander, dass jedes Paar von gegenüberliegenden Kanten des einen Tetraeders mit je einem Paar gegenüberliegender Kanten des anderen Tetraeders* 4 *Erzeugende eines Hyperboloides bilden.*“

Die 9 incongruenten Periodendrittel vertheilen sich bei Ausschluss des Periodendrittels 0 in vier Paare, wie

$$\frac{\Omega_1}{3}, \; 2\frac{\Omega_1}{3}; \quad \frac{\Omega_2}{3}, \; 2\frac{\Omega_2}{3}; .$$

$$\frac{\Omega_3}{3}=\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}, \; 2\frac{\Omega_3}{3}; \quad \text{und} \quad \frac{\Omega_4}{3}=\frac{\Omega_1-\Omega_2}{3}, \; 2\frac{\Omega_4}{3}.$$

Wir sahen, dass bei Zuweisung der Punkte

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_1}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\frac{\Omega_1}{3}\right),$$

die durch diese Punktetripel gehenden Ebenen die Gerade G_1 enthalten.

Nach der Umkehrung unseres allgemeinen Satzes folgt nun:

„*Die durch die Schaar der Punktetripel*

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega_\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u+2\frac{\Omega_\alpha}{3}\right)$$

bestimmten Ebenen gehen durch eine feste Gerade G_α, *deren Tangentialpunkte die Punkte* ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ *sind.*"

Also:

„*Jeder Geraden* G_1 *sind in Bezug auf eine Raumcurve* 3^{ter} *Ordnung* 3 *andere Gerade* G_2, G_3, G_4 *eindeutig zugewiesen. Und zwar haben alle diese Geraden dieselben Tangentialpunkte.*"

Man erkennt leicht die Richtigkeit der Umkehrung dieses Satzes:

„*Sind die* 4 *Tangentialpunkte einer Geraden in Bezug auf eine gegebene Raumcurve* 3^{ter} *Ordnung gegeben, so ist die Gerade* 4-*deutig bestimmt.**) *Den überhaupt möglichen auf einer Raumcurve* 3^{ter} *Ordnung liegenden Punktquadrupeln entsprechend, ordnen sich also die sämmtlichen Geraden des Raumes in Gruppen von je vieren.*" —

Eine Ebene durch G_α schneidet die C_3 in den Punkten

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3}\right).$$

Dann schneiden die durch G_β und diese 3 Punkte gelegten Ebenen in den weiteren Punkten

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3} + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3} + \frac{\Omega_\beta}{3}\right), \\ \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\alpha}{3} + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right), & \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\alpha}{3} + 2\,\frac{\Omega_\beta}{3}\right), \end{array}$$

Hier lehrt der Augenschein, dass je 3 in eine Horizontalreihe geschriebene Punkte wieder mit G_α in einer Ebene liegen. Folglich:

„*Legt man durch eine der* 4 *Geraden, die zu denselben Tangentialpunkten gehören, eine Ebene, verbindet die* 3 *Schnittpunkte dieser Ebene mit der* C_3 *durch neue Ebenen mit irgend einer andern der* 4 *Geraden, so bestimmen diese neuen Ebenen* 6 *weitere Schnittpunkte auf der* C_3, *die sich auf zwei durch die erstere Gerade gehenden Ebenen vertheilen.*"

Betrachtet man jetzt die 9 Punkte

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega_\mu}{3}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 2\,\frac{\Omega_\mu}{3}\right), \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

so erkennt man, dass sich der soeben ausgesprochene Satz in folgenden, mehr sagenden, einschliessen lässt:

„*In Bezug auf jedes durch eine Raumcurve* 3^{ter} *Ordnung bestimmtes Geradenquadrupel* (G) *gruppiren sich die Punkte der Curve ihrerseits zu je neun. Jede Ebene durch eine der Geraden von* (G), *welche einen der neun Punkte enthält, geht zugleich durch zwei weitere dieser Punkte, der Art, dass sich die neun Punkte auf vier Weisen als Durchschnittspunkte der Curve mit drei Ebenen eines Ebenenbüschels auffassen lassen.*"

---

*) Wir nehmen dabei stillschweigend an, dass die Punkte getrennt liegen und die zu bestimmende Gerade keine Tangente der Raumcurve sein darf.

Die Analogie dieses Satzes mit den Gruppirungssätzen der neun Wendepunkte einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung ist in die Augen springend.

Als bemerkenswerth, wenn auch in den obigen Sätzen implicite enthalten, ist noch folgender Satz anzuführen:

„*Aus den* 16 *Berührungspunkten der die Geraden eines Geradenquadrupels treffenden Tangenten der Raumcurve lassen sich* 4 *Tetraeder bilden, so dass die Seitenflächen irgend eines dieser Tetraeder der Reihe nach durch die* 4 *Geraden des Quadrupels hindurchlaufen.*"

III.

Wir betrachten auf einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung zwei Punkte P und P', und fassen diese als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel auf. Nennen wir zwei Strahlen, von denen der eine durch P, der andere durch P' läuft, dann einander entsprechend, wenn sie sich in einem Punkte der Curve 3^{ter} Ordnung treffen, so haben wir damit eine 2 — 2-deutige Beziehung zwischen den Strahlbüscheln festgesetzt, indem jedem Strahle aus P zwei Strahlen aus P', und umgekehrt jedem Strahle von P' zwei Strahlen durch P zugehören.

Die Doppelelemente dieser 2 — 2-deutigen Beziehung sind im Strahlbüschel P die vier von P aus an die Curve gelegten Tangenten, im Strahlbüschel P' die vier in gleicher Weise von P' ausgehenden Tangenten der Curve.

Nach unsern an die Spitze dieser Arbeit gestellten Sätzen haben diese zwei Tangentenquadrupel dasselbe Doppelverhältniss, womit ein bekannter Satz aus der Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung auf's Neue bewiesen ist. Das allgemeine Theorem 3. liefert, auf die Beziehung zwischen den Büscheln P und P' angewandt, folgenden Satz:

„*Legt man von einem Punkte P einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung die vier Tangenten an diese und zieht von demselben Punkte aus die vier Strahlen nach den Berührungspunkten der vier Tangenten, die von einem ganz beliebigen andern Punkte der Curve ausgehen, so haben die beiden durch P laufenden Strahlenquadrupel dieselbe Covariante sechster Ordnung, die acht sie constituirenden Strahlen lassen sich also auf drei Weisen zu vier Strahlenpaaren in Involution anordnen.*"

Dieser Satz ergiebt sich übrigens auch unschwer aus bekannten Sätzen über die Hesse'sche Correspondenz auf der Curve 3^{ter} Ordnung *).

Die von uns betrachtete 2—2-Correspondenz zwischen den Strahlbüscheln P und P' wird nun nach Satz 1. analytisch so darzustellen sein, dass dem Strahle $\operatorname{sn} u$ von P die Strahlen $\operatorname{sn}(u+C)$ und

---

*) Siehe z. B. Schröter, Mathem. Annalen Bd. V, pag. 50.

$\operatorname{sn}(u - C)$ von P' entsprechen. Dabei sind die Strahlen durch die ihnen zukommenden Parameter bezeichnet.

Verlangt man jetzt, dass der Curve 3^{ter} Ordnung ein Steiner'sches $2n$-Eck einbeschrieben werden könne, dessen Seiten abwechselnd durch P und P' laufen, so sieht man, dass diesen Seiten als Strahlen der Büschel P und P' die Parameter zufallen: $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn}(u + C)$, $\operatorname{sn}(u + 2C) \cdots \operatorname{sn}(u + (2n - 1) C)$ und dass nothwendig der Strahl vom Parameter $\operatorname{sn}(u + 2nC)$ mit dem Strahle $\operatorname{sn} u$ identisch sein, also

$$C = \frac{\Omega}{2n} \text{ sein muss,}$$

wo Ω eine Periode von $\operatorname{sn} u$ bezeichnet.*)

Bei diesem Werthe von C ist es klar, dass

$$\operatorname{sn}(u + 2nC) = \operatorname{sn} u$$

unabhängig von dem Werthe von u, *woraus der Satz der Steiner'schen Polygone folgt.*

Folgender interessante Umstand scheint bis jetzt dabei nicht bemerkt zu sein:

„Ergänzt man ein zu dem Punktepaar P, P' gehöriges Steiner'sches $2n$-Eck zu einem vollständigen $2n$-Seit, indem man die n durch P laufenden Seiten mit den n durch P' laufenden Seiten zum Schnitt bringt, so liegen, falls n eine ungerade Zahl ist, immer n Eckpunkte des so erhaltenen vollständigen $2n$-Seits auf einem durch P und P' gehenden Kegelschnitt. Ferner bleibt dieser Kegelschnitt derselbe für alle unzählig vielen Steiner'schen Polygone, die zu P und P' gehören, auch läuft derselbe durch vier von den 16 Punkten hindurch, in denen die vier von P an die Curve 3^{ter} Ordnung gehenden Tangenten von den vier in gleicher Weise durch P' laufenden getroffen werden."

In der That sind, wie schon bemerkt,

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(u + 2 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 4 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right) \cdots \operatorname{sn}\left(u + 2(n-1)\frac{\Omega}{2n}\right)$$

die Parameter der n durch P laufenden Seiten des Polygons und

$$\operatorname{sn}\left(u + \frac{\Omega}{2n}\right), \quad \operatorname{sn}\left(u + 3 \cdot \frac{\Omega}{2n}\right) \cdots \operatorname{sn}\left(u + (2n-1)\frac{\Omega}{2n}\right)$$

die Parameter der n durch P' laufenden Seiten. Ist nun n eine un-

---

*) Die Werthe u, für welche

$$2u + 2nC \equiv \frac{\omega_1}{2} \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

und also auch $\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u + 2nC)$, liefern nur singuläre $2n$-Ecke der veangten Art.

gerade Zahl, so kommt unter den durch P' laufenden Strahlen der Strahl vom Parameter $\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega}{2}\right)$ vor, und allgemein findet sich zu jedem der n Strahlen durch P je ein Strahl durch P', dessen Argument $u+k\cdot\frac{\Omega}{2n}$ sich von dem Argumente des durch P gehenden Strahles um $\pm\frac{\Omega}{2}$, also um eine halbe Periode unterscheidet. Nach dem Ausnahmefalle des Satzes 2. sind daher die n Strahlen durch P projectivisch zu den n Strahlen durch P', woraus sofort die Richtigkeit des ersten Theiles unseres Satzes erhellt.

Da die betrachtete Projectivität dadurch hergestellt ist, dass dem Strahle $\operatorname{sn} u$ aus P immer der Strahl $\operatorname{sn}\left(u+\frac{\Omega}{2}\right)$ aus P' entspricht, so ist klar, dass der im ersten Theil des Satzes genannte Kegelschnitt für alle zu P und P' gehörige Steiner'sche Polygone derselbe ist, und dass den Strahlen ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ von P die Strahlen ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ von P', letztere in einer bestimmten Reihenfolge genommen, correspondiren. Damit sind auch die weiteren Theile unseres Satzes vollkommen erwiesen.

Ist n eine gerade Zahl $=2m$, so folgt aus ähnlichen Gründen:

„Die $2m$ durch P laufenden Seiten eines zu dem Punktepaare P, P' gehörigen Steiner'schen $4m$-Ecks lassen sich in m Strahlenpaare einer quadratischen Involution anordnen. Diese Involution bleibt dieselbe, welches der unzählig vielen zu P und P' gehörigen Polygone man auch auswählen mag.) Gleiches gilt von den durch P' laufenden Seiten.“*

Der letzte Satz lässt sich auch ohne Schwierigkeit mit Hülfe der elliptischen Parametervertheilung auf der Curve 3^{ter} Ordnung erhalten. Dass sich ganz ähnliche Sätze für Raumcurven 4^{ter} Ordnung erster Species mit derselben Leichtigkeit aus unsern allgemeinen Sätzen ergeben, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

IV.

Ich wende mich zu andern Anwendungen der an die Spitze dieser Abhandlung gestellten Sätze, werde mich jedoch dabei, da die Schlüsse der Art nach bei allen diesen Anwendungen dieselben sind, theils auf kurze Andeutungen beschränken, theils nur Resultate angeben.

Die Gesammtheit der Kreise, welche zwei feste Kreise berühren, zerfällt — den beiden Aehnlichkeitspunkten der festen Kreise entsprechend — in zwei getrennte Schaaren. Irgend ein Kreis einer einzelnen dieser Schaaren wird von zwei Kreisen derselben Schaar berührt, und jede einzelne dieser Schaaren schickt zwei ihrer Kreise durch einen willkürlich gegebenen Punkt.

---

*) Diese Involution ist eine derjenigen, von denen der Satz pag. 62 handelt.

Diese Angaben genügen, um aus unseren allgemeinen Sätzen einerseits die Richtigkeit der die Steiner'schen Kreisreihen betreffenden Sätze zu erweisen, andererseits den folgenden Satz mit Leichtigkeit herzuleiten:

Es seien zwei feste Kreise gegeben, von denen man sich den einen M_1 innerhalb des anderen M_2 liegend denken möge. Ferner sei ein dritter fester Kreis M_3 gegeben, dessen Peripherie ganz in dem zwischen den ersten beiden Kreisen liegenden Raume verlaufen soll.*)

Wir betrachten nun die sämmtlichen Kreise, welche in dem Raume zwischen M_1 und M_2 liegend diese beiden Kreise berühren — M_1 von aussen, M_2 von innen — und wollen nun je zwei dieser berührenden Kreise einander *benachbart* nennen, wenn einer ihrer beiden Schnittpunkte auf dem festen Kreise M_3 gelegen ist. Hiernach ist klar, dass jeder Kreis zwei Nachbarn besitzt, einen rechten und einen linken.

„*Construiren wir nun von einem der M_1 und M_2 berührenden Kreise als erstem ausgehend eine Reihe von Kreisen, von denen jeder spätere der rechte Nachbar des unmittelbar vorhergehenden ist, so sind zwei Fälle möglich: Entweder die Reihe ist commensurabel, d. h. wir kommen schliesslich zu einem n^{ten} Kreise, dessen rechter Nachbar wieder der erste, Ausgangs-Kreis ist, oder dieser Umstand trifft niemals ein. Welcher von beiden Fällen nun stattfindet, hängt nur von der gegenseitigen Lage der drei Kreise M_1, M_2, M_3 ab, so dass die Reihe immer commensurabel ist, von welchem Kreise, als erstem, man auch ausgehen mag, wenn sie es ein einziges Mal ist.*“ —

V.

Endlich wollen wir noch eine Anwendung unserer Principien auf ein Beispiel machen, das einen eigenthümlichen von dem aller bis jetzt bekannten Beispiele verschiedenen Charakter hat, und welches zu den interessantesten Problemen Anlass bietet. Ich habe diese Untersuchungen jedoch noch nicht vollständig erledigt und muss mich daher auf wenige Bemerkungen beschränken.

Die ebene Curve 4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe hat bekanntlich einen Doppelpunkt, zwei Rückkehrpunkte, eine Doppeltangente und zwei Wendetangenten. Sie hat das Geschlecht Null und hängt von einer wesentlichen, gegenüber linearen Transformation unveränderlichen Constanten, ihrer absoluten Invariante, ab. Als diese absolute Invariante kann man z. B. das Doppelverhältniss der vier Parameter ansehen, die bei irgend einer auf der Curve festgelegten Parametervertheilung den beiden im Doppelpunkt vereinigten Punkten der Curve und den beiden Rückkehrpunkten zufallen.

---

*) Diese Lagenangaben sind nur der Anschaulichkeit wegen gemacht.

Lässt man nun zwei Punkte dieser Curve sich entsprechen, wenn ihre Verbindungsgerade die Curve in einem dritten Punkte berührt, so hat man dadurch eine 2 — 2 Correspondenz zwischen den Punkten der Curve hergestellt. Bei geeigneter Vertheilung der Parameter auf die Punkte der Curve werden dann dem Punkte vom Parameter $\operatorname{sn} u$ die Punkte $\operatorname{sn}(u + C)$ und $\operatorname{sn}(u - C)$ correspondiren. Der Werth der Constanten C und der Modul k von $\operatorname{sn} u$ werden dabei offenbar Functionen der absoluten Invariante der Curve sein.

Verlangt man nun, dass ein eigentliches (nicht singuläres) n-Eck existirt, welches der Curve gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, d. h. dessen n Ecken auf der Curve liegen, während gleichzeitig seine n Seiten Tangenten der Curve sind, so muss die Constante C ein Perioden-n-Theil sein, und folglich giebt es unzählig viele solche n-Ecke, wenn es ein einziges giebt. Die Bedingung aber, dass C der n^{te} Theil einer Periode sein soll, liefert für die absolute Invariante der Curve eine algebraische Gleichung mit Zahlencoefficienten. Nach alledem können wir sagen:

„*Die ebenen Curven 4^ter^ Ordnung und 4^ter^ Classe theilen sich in zwei Gruppen. In der einen Gruppe finden sich nur solche Curven, bei denen keine n-Ecke existiren, welche der Curve zugleich ein- und umbeschrieben sind. Dagegen theilen sich die Curven der andern Gruppe — den ganzen positiven Zahlen entsprechend — in unzählig viele Classen.*

Für jede Curve einer solchen Classe giebt es unzählig viele n-Ecke, welche der Curve zugleich ein- und umbeschrieben sind, und die absoluten Invarianten der Curven derselben Classe sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit Zahlencoefficienten.“

VI.

Es sei schliesslich noch folgende allgemeine Bemerkung gestattet: Wie der Fundamentalsatz der Algebra durch seine geometrische Formulirung im Correspondenzprincip zu einem der fruchtbarsten Werkzeuge geometrischer Forschung wird, so gewinnt jeder analytische Satz, welcher einer ähnlichen Umsetzung fähig ist, durch diese eine grosse Beweglichkeit in seiner Anwendbarkeit. Die obigen Entwicklungen bilden ein neues Beispiel für diese Thatsache.

Wie in ähnlicher Weise das Abel'sche Theorem ausgenutzt werden kann, denke ich demnächst zu zeigen.

Leipzig, den 22. Juni 1881.

Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Von

A. Hurwitz in Hildesheim.

Betrachtet man den Modul k des elliptischen Integrals erster Gattung als Function des Periodenverhältnisses ω, so ist bekanntlich eine Haupteigenschaft dieser Function in dem folgenden Satze ausgesprochen:

„*Zwischen den Werthen $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ besteht eine algebraische Gleichung, wenn die Argumente ω und ω_1 eine Relation der Gestalt*

$$a\omega\omega_1 + b\omega + c\omega_1 + d = 0$$

befriedigen, wo a, b, c, d ganze Zahlen sind, deren Determinante $ad - bc$ positiv ausfällt.“*)

Es knüpft sich nun naturgemäss an diese Eigenschaft des Moduls die folgende Aufgabe an, deren Erledigung der Zweck der vorliegenden Arbeit ist:**)

„*Alle algebraischen Gleichungen zwischen ω und ω_1 zu bestimmen, welche der Anforderung genügen, dass die Werthe $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ selbst algebraisch zusammenhängen, wenn ω und ω_1 ihrerseits jene algebraische Gleichung befriedigen.*“

Den nachfolgenden Entwicklungen vorgreifend will ich gleich hier das Resultat unserer Untersuchung in folgendem Satze aussprechen:

Unter allen algebraischen Gleichungen genügt nur die in ω und ω_1 bilineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten und positiver Determinante der gestellten Anforderung.

---

*) Der Modul k tritt hier und im Folgenden nur als Repräsentant einer ganzen Functionsclasse, nämlich der endlichwerthigen Modulfunctionen von endlichem Index auf. Es ist nur der concreteren Darstellungsweise halber, dass ich mich auf die Betrachtung des Moduls beschränke, eine Beschränkung, die übrigens bei den anzustellenden Untersuchungen um so weniger verschlägt, als jede andere Function der genannten Classe von Transcendenten eine algebraische Function des Moduls ist.

**) Es ist dieses dieselbe Aufgabe, auf welche ich im XVIII. Bande dieser Annalen, p. 566, gelegentlich hingewiesen habe.

Indem ich mich dem Beweise dieses Satzes zuwende, will ich annehmen

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

sei eine Gleichung, welche die geforderte Eigenschaft besitzt. Dann können wir zunächst voraussetzen, dass diese Gleichung irreductibel ist, denn widrigenfalls würden wir einen irreductibeln Factor derselben in Betracht ziehen. Tragen wir nunmehr successive $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3, \cdots$, an Stelle von ω in unsere Gleichung ein, so müssen wir schliesslich zu einer Zahl $\omega + n$ kommen, so dass die Gleichung

$$f(\omega + n, \bar{\omega}_1) = 0$$

mindestens eine Wurzel $\bar{\omega}_1^0$ liefert, die mit einer Wurzel ω_1^0 der ursprünglichen Gleichung

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

äquivalent ist, das heisst in folgender Weise zusammenhängt:

$$\bar{\omega}_1^0 = \frac{\alpha\omega_1^0 + \beta}{\gamma\omega_1^0 + \delta},$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist und α, β, γ, δ ganze Zahlen bedeuten.

In der That, der Modul k kann nur dann für verschiedene Argumente ω_1^0 und $\bar{\omega}_1^0$ denselben Werth annehmen, wenn dieselben in der angegebenen Art zusammenhängen.*) Für die Argumente ω, $\omega + 1, \cdots$, nimmt der Modul aber nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Werthen an, und unter den zu allen diesen Argumenten $\omega + n$ vermöge $f(\omega, \omega_1) = 0$ gehörigen Werthen ω_1, muss man daher unzählig oft zwei solche wie ω_1^0 und $\bar{\omega}_1^0$ auswählen können, die in der genannten Relation stehen, da widrigenfalls zu *einem* Werthe $k(\omega)$ unzählig viele Werthe $k(\omega_1)$ gehören würden.

Somit ist klar, dass für irgend einen Werth von n und für passende Werthe von α, β, γ, δ die beiden Gleichungen

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

und

$$f\left(\omega + n, \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}\right) = 0$$

eine Wurzel ω_1^0 und folglich — wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ — alle Wurzeln gemeinsam haben. Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

---

*) Des Näheren ist $k(\omega) = k(\omega_1)$ dann und nur dann, wenn in der Beziehung

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \pmod{4}$$

ist.

1) Die Substitution

$$\omega_1' = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$$

ist *parabolisch*.

In diesem Falle können wir dieselbe in folgende Gestalt setzen:*)

$$\frac{a\omega_1' + b}{c\omega_1' + d} = \frac{a\omega_1 + b}{c\omega_1 + d} + k,$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet. Führen wir jetzt die Grösse

$$\Omega_1 = \frac{a\omega_1 + b}{c\omega_1 + d}$$

statt ω_1 in unsere Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ ein, so geht letztere über in eine irreductible Gleichung

$$f_1(\omega, \Omega_1) = 0,$$

und von dieser neuen Gleichung wird nun verlangt, dass sie sich reproducirt, wenn $\omega + n$ statt ω und gleichzeitig $\Omega_1 + k$ statt Ω_1 gesetzt wird.

Deuten wir aber ω und Ω_1 als Cartesische Coordinaten in der Ebene, so stellt $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ eine irreductible algebraische Curve vor, die bei einer endlichen Translation der Ebene in sich übergehen soll. Die Curve ist daher nothwendig eine in der Richtung der Translation laufende Gerade, die Gleichung $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ also linear in ω und Ω_1. Wir erkennen so, wenn wir schliesslich wieder ω_1 an Stelle von Ω_1 einführen, dass unsre ursprüngliche Gleichung $f(\omega, \omega_1) = 0$ nothwendig bilinear in ω und ω_1 war.

2) Die Substitution

$$\omega_1' = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$$

ist *elliptisch* oder *hyperbolisch*. Dann lässt sich dieselbe in die Gestalt setzen:*)

$$\frac{\omega_1' - a}{\omega_1' - b} = \lambda \cdot \frac{\omega_1 - a}{\omega_1 - b}, \quad \lambda \gtrless 1,$$

und unsere Gleichung

$$f(\omega, \omega_1) = 0$$

geht, durch Einführung der Grösse

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1 - a}{\omega_1 - b}$$

an Stelle von ω_1, in eine neue irreductible Gleichung

$$f_1(\omega, \Omega_1) = 0$$

über.

---

*) Siehe Klein, Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Math. Annalen XIV, pag. 122—124.

Diese letztere Gleichung soll nun ungeändert bleiben, wenn ω in $\omega + n$ und gleichzeitig Ω_1 in $\lambda\Omega_1$ verwandelt wird.

Deuten wir wiederum ω und Ω_1 als Cartesische Coordinaten, so muss also $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ eine irreductible algebraische Curve C vorstellen, die bei der linearen Transformation ihrer Ebene

$$\omega' = \omega + n, \quad \Omega_1' = \lambda \cdot \Omega_1$$

in sich übergeht. Daraus folgt aber, dass die Gleichung $f_1(\omega, \Omega_1) = 0$ ω gar nicht enthält, und *folglich* $f(\omega, \omega_1) = 0$ *gar keine Relation zwischen* ω *und* ω_1 *darstellt.*

Zunächst schliessen wir nämlich, dass die Curve C die Gerade $\Omega_1 = 0$ (ω-Axe) nur im unendlich fernen Punkte der letzteren treffen darf, da jeder im Endlichen liegende Schnittpunkt von C und $\Omega_1 = 0$ eine unendliche Zahl solcher Schnittpunkte hervorrufen würde. Demnach ist:

$$f_1(\omega, \Omega_1) \equiv \Omega_1 f_2(\omega, \Omega_1) + k_1;$$

es folgt:

$$\lambda \cdot f_2(\omega + n, \lambda\Omega_1) \equiv f_2(\omega, \Omega_1),$$

und daher muss die Curve $f_2(\omega, \Omega_1) = 0$ entweder die Gerade $\Omega_1 = 0$ als Bestandtheil enthalten, oder diese Gerade im unendlich fernen Punkte treffen. Es ist also

$$f_2(\Omega_1) \equiv \Omega_1 f_3(\omega, \Omega_1) + k_2.$$

Auf f_3 sind dieselben Schlüsse anwendbar, wie auf f_1 und f_2 u. s. f. Wir erhalten somit eine Reihe von Identitäten folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \Omega_1 f_2 + k_1, \\ f_2 &\equiv \Omega_1 f_3 + k_2, \\ &\vdots \\ f_n &\equiv \Omega_1 k_{n+1} + k_n. \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten die k_i constante Grössen. Aus diesen Identitäten ergiebt sich nun unmittelbar f_1 als ganze Function von Ω_1, und f_1 enthält also in der That gar nicht die Grösse ω.

Es ist somit erwiesen, dass nur in ω und ω_1 bilineare Relationen zu algebraischen Gleichungen zwischen den Werthen $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ des Moduls Anlass bieten können. Wir haben diese bilinearen Relationen noch näher in Bezug auf ihre Coefficienten zu untersuchen.

Bei dieser Untersuchung werden wir von der Gleichung

$$a\omega\omega_1 + b\omega + c\omega_1 + d = 0$$

anzunehmen haben, dass sie nur eine endliche Zahl von inäquivalenten Werthen ω_1 (resp. ω) liefert, wenn für ω (resp. ω_1) alle einer festen

Zahl äquivalenten*) Werthe eingetragen werden. Drücken wir nun zunächst aus, dass irgend eine ganze Zahl n existirt, so dass der zu $\omega + n$ gehörige Werth von ω_1 äquivalent ist dem zu ω gehörigen Werthe, so folgt:

Die Substitution

$$\begin{pmatrix} -b & -d-nb \\ a & c+na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} & \frac{d}{\Delta} \\ -\frac{a}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\Delta + abn}{\Delta} & \frac{b^2 n}{\Delta} \\ -\frac{a^2 n}{\Delta} & \frac{\Delta - abn}{\Delta} \end{pmatrix}$$

ist nothwendig ganzzahlig. Hierbei ist $ad - bc = \Delta$ gesetzt. Da sonach $\frac{abn}{\Delta}$ und $\frac{b^2 n}{\Delta}$ ganze Zahlen sein müssen, so muss

$$\frac{abn}{\Delta} : \frac{b^2 n}{\Delta} = \frac{a}{b}$$

eine rationale Zahl sein. Wegen der vollkommenen Gleichberechtigung von ω und ω_1 muss daher auch $\frac{a}{c}$ eine rationale Zahl sein. In gleicher Weise ergiebt sich aus der Forderung, dass für eine passende ganze Zahl n' der zu $-\frac{1}{\omega + n'}$ gehörige Werth von ω_1 dem zu ω gehörigen Werthe äquivalent sein wird, dass $\frac{c}{d}$ eine rationale Zahl sein muss.

Diese Resultate zusammengefasst ergeben schliesslich:

Die Verhältnisse $a : b : c : d$ müssen rationale Zahlen sein, und die Grössen a, b, c, d können daher als ganze Zahlen angenommen werden.

Damit ist der Beweis unserer Behauptung geliefert, bis auf die kleine in die Aussage unseres Satzes aufgenommene Beschränkung, dass nämlich die Determinante $ad - bc$ der bilinearen Gleichung positiv sein soll.

Dieser Zusatz motivirt sich durch die Eigenthümlichkeit des Moduls nur für Argumente mit positiver zweiter Ordinate definirt zu sein. Dadurch wird es nämlich erforderlich, dafür zu sorgen, dass zu Werthen ω mit positiver zweiter Ordinate nur Werthe ω_1 gehören, die gleichfalls in der positiven Halbebene liegen, was, wie man sich leicht überzeugt, durch die Annahme $ad - bc > 0$ erzielt wird.

Hildesheim, den 11. August 1881.

---

*) Zwei Werthe ω und ω_1 heissen äquivalent resp. inäquivalent, jenachdem es möglich resp. unmöglich ist, vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so zu bestimmen, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und $\omega = \frac{\alpha\omega_1 + \beta}{\gamma\omega_1 + \delta}$ ist. (Cf. p. 68.)

Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung.

Von

A. Enneper in Göttingen.

I.*)

In der Note „Problème de géométrie" (Journal de Mathématiques, T. VII, p. 65, Année 1842) hat Herr Puiseux zuerst nachgewiesen, dass nur für die Helix eines Kreiscylinders der Krümmungsradius und der Torsionsradius gleichzeitig constant sind. Eine Erweiterung dieses Satzes hat Herr Bertrand gegeben in: „Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes" (J. d. M., T. XIII, p. 423, A. 1848). Durch rein geometrische Betrachtungen hat Herr Bertrand gezeigt, dass für die Helix einer beliebigen Cylinderfläche das Verhältniss des Krümmungsradius zum Torsionsradius constant ist und umgekehrt. Durch eine gewandte analytische Rechnung, enthalten in „Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant" (J. d. M., T. XVI, p. 208, A. 1851), hat Herr Puiseux den erweiterten Satz deducirt. Mittels einfacherer und mehr symmetrischer Rechnungen hat Herr Serret in der Abhandlung „Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure" (J. d. M., T. XVI, p. 197, A. 1851) den Satz des Herrn Bertrand bewiesen. Eine weitere Ausdehnung haben die Sätze der Herren Puiseux und Bertrand in den „Bemerkungen über Curven doppelter Krümmung" erfahren, welche der Verfasser der vorliegenden Untersuchungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1866 mitgetheilt hat. (Nachrichten von der K. Gesellschaft d. Wissenschaften, Göttingen 1866, p. 134—140.) Im Punkte P einer Curve sei ϱ der Krümmungsradius, r der Torsionsradius, durch s werde der Bogen der Curve bezeichnet, von einem festen Punkte P_0 bis zum Punkte P gerechnet. Sind g und h Constanten, so ist durch die Gleichung:

---

*) Die in diesem Abschnitt enthaltenen Resultate sind entnommen aus den „Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften" Göttingen 1881, p. 291—301.

$$(1) \qquad \frac{\varrho}{r} = gs + h$$

eine geodätische Linie einer Kegelfläche charakterisirt. Für $g = 0$ geht die Kegelfläche in eine cylindrische Fläche über, auf welcher bekanntlich eine Helix geodätische Linie ist, man erhält dann den Satz des Herrn Bertrand. Eine conische Fläche lässt sich als besonderer Fall einer developpabeln Fläche auffassen, deren Wendecurve in jedem ihrer Punkte denselben constanten Krümmungsradius hat. Für eine geodätische Linie einer solchen developpabeln Fläche findet folgende Gleichung statt, in welcher a, b und c Constanten bedeuten:

$$(2) \qquad a^2\left[1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right] = \left[b\,\frac{\varrho}{r} - s + c\right]^2.$$

Es ist a der constante Krümmungsradius der Wendecurve einer developpabeln Fläche. Dem Fall $a = 0$ entspricht die Gleichung (1). Es lassen sich noch einige andere Relationen von der Art der Gleichung (2) aufstellen, wenn die Wendecurve einer developpabeln Fläche, auf welcher eine gegebene Curve geodätische Linie sein soll, einer bestimmten Bedingung zu genügen hat. Eine kurze Begründung einer allgemeinen Gleichung, welche die Gleichung (2) als besondern Fall enthält, bildet den Gegenstand dieser Mittheilung. Es musste dabei ein Weg eingeschlagen werden, welcher wesentlich von dem verschieden ist, auf dem sich die Gleichung (1) ergeben hat. Man kann allgemein eine Curve doppelter Krümmung als geodätische Linie einer developpabeln Fläche ansehen. In Beziehung hierauf besteht das folgende, leicht zu beweisende, beinah selbstverständliche Theorem:

Durch eine Curve doppelter Krümmung C lässt sich nur eine developpabele Fläche legen, auf welcher die Curve C geodätische Linie ist. Diese Fläche ist die, von Lancret aufgestellte, rectificirende Fläche der Curve C.

Dieser einfache Satz gestattet, mit geringem Aufwand von Rechnung, die Gleichung (2) und ähnliche Gleichungen herzustellen.

Es seien x, y und z die Coordinaten eines Punktes P einer Curve C. Im Punkte P sei ϱ der Krümmungsradius und r der Torsionsradius. Es seien ferner:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu;$$
$$l,\ m,\ n;$$

die Winkel, welche respective die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale der Curve C im Punkte P mit den Coordinatenaxen einschliessen. Ist allgemein s der Bogen der Curve, so können bekanntlich die sämmtlichen bemerkten Quantitäten als Functionen von s angesehen werden. Dem Punkte P der Curve C entspreche der

Punkt P_1 einer Curve C_1 mittels der Coordinaten x_1, y_1 und z_1. Im Punkte P_1 sollen die zu s, ϱ, r, α, λ, l u. s. w. entsprechenden Quantitäten mit dem Index 1 versehen werden. Es sei nun C_1 die Wendecurve der rectificirenden Fläche der Curve C und P_1 der Punkt von C_1, welcher mit dem Punkte P der Curve C auf derselben Generatrix der rectificirenden Fläche liegt. Zur Vereinfachung der folgenden Formeln setze man:

$$(3) \qquad \frac{\varrho}{r} = \operatorname{tang} u$$

und $\frac{du}{ds} = u'$. Zwischen den Coordinaten der Punkte P und P_1 bestehen dann die folgenden Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = x - \frac{\cos u}{u'} (\cos \alpha \sin u - \cos l \cos u), \\ y_1 = y - \frac{\cos u}{u'} (\cos \beta \sin u - \cos m \cos u), \\ z_1 = z - \frac{\cos u}{u'} (\cos \gamma \sin u - \cos n \cos u). \end{cases}$$

Nimmt man:

$$(5) \qquad \begin{cases} \cos \alpha_1 = \cos \alpha \sin u - \cos l \cos u, \\ \cos \beta_1 = \cos \beta \sin u - \cos m \cos u, \\ \cos \gamma_1 = \cos \gamma \sin u - \cos n \cos u, \end{cases}$$

da die Verbindungslinie der Punkte P und P_1 die Tangente zur Curve C_1 im Punkte P_1 ist, so geben die Gleichungen (4) nach s differentiirt, mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$\frac{ds_1}{ds} = \sin u - \frac{d \frac{\cos u}{u'}}{ds}.$$

Durch Multiplication mit $\cos u$ lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$(6) \qquad \cos u \frac{ds_1}{ds} = - \frac{d \frac{\cos^2 u}{u'}}{ds}.$$

Unter Zuziehung der Gleichung (3) leitet man durch Differentiation nach s der Gleichungen (5) die folgenden ab:

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho_1} \frac{ds_1}{ds} = u'.$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \cos \lambda_1 = \cos \alpha \cos u + \cos l \sin u, \\ \cos \mu_1 = \cos \beta \cos u + \cos m \sin u, \\ \cos \nu_1 = \cos \gamma \cos u + \cos n \sin u. \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) und (8) geben:

$$(9) \qquad \cos l_1 = - \cos \lambda, \quad \cos m_1 = - \cos \mu, \quad \cos n_1 = - \cos \nu.$$

Die Gleichungen (9) differentiire man nach s, unter Zuziehung der Gleichungen (3) und (8) folgt dann:

$$(10) \qquad \frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\varrho \cos u}.$$

Die Gleichungen (3), (6), (7) und (10) bilden die Basis der folgenden Entwicklungen.

Für eine Cylinderfläche als rectificirende Fläche sind in der Gleichung (5) α_1, β_1 und γ_1 constant, es ist dann in (7) $\varrho_1 = \infty$, also $u' = 0$ oder u ist constant. Die Gleichung (3) giebt dann den Satz des Herrn Bertrand. Für eine conische Fläche als rectificirende Fläche reducirt sich die Wendecurve C_1 auf einen Punkt, in den Gleichungen (4) sind dann x_1, y_1 und z_1 constant. Hieraus folgt $\frac{ds_1}{ds} = 0$. Die Gleichung (6) giebt dann:

$$\frac{\cos^2 u}{u'} = \frac{1}{g},$$

wo g eine Constante ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\frac{u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{ds} = g,$$

also

$$\operatorname{tang} u = gs + h,$$

wo h eine Constante ist. Setzt man links den Werth von $\operatorname{tang} u$ aus (3), so ergiebt sich wieder die Gleichung (1).

An Stelle der Gleichung (3) soll eine allgemeinere Gleichung aufgestellt werden, die zu einigen besonderen Fällen Veranlassung giebt. Zu diesem Zweck führe man den Contingenzwinkel $d\varepsilon$ und den Torsionswinkel $d\omega$ durch folgende Gleichungen ein:

$$(11) \qquad d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}, \qquad d\omega = \frac{ds}{r}.$$

In der Abhandlung: „Mémoire sur les lignes courbe non planes“ (Journal de l'Ecole Polytechnique. Tome XVIII, Cahier 30, p. 1—76, Paris 1845) hatte Herr de Saint-Venant (pag. 48 in der Anmerkung) folgende Frage aufgeworfen:

„Sur la surface gauche formée par l'ensemble des rayons de courbure d'une courbe donnée, peut-on tracer une seconde courbe, dont les génératrices de la surface soient aussi des rayons de courbure?“

Diese Frage findet sich beantwortet in Bertrand: „Mémoire sur les courbes à double courbure“ (Journ. de Math., T. XV, p. 347, Année 1850). Die gesuchte Bedingung ist enthalten in der Gleichung:

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{r} = 1,$$

wo a, b Constanten sind. Einen sehr einfachen analytischen Beweis hat Herr Serret gegeben in der Note „Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure“ (J. d. M., T. XVI, p. 499—500, A. 1851). Eine geometrische Deduction von Herrn Mannheim findet sich in „Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand.“ (J. d. M., 2. série, T. XVII, p. 403, A. 1872.)

Die Bedingung, dass die Hauptnormalen einer Curve gleichzeitig die Hauptnormalen einer zweiten Curve sind, soll für die Wendecurve C_1' der rectificirenden Fläche der Curve C angenommen werden, und zwar in folgender Form:

$$\frac{\cos p}{\varrho_1}+\frac{\sin p}{r_1}=\frac{1}{a}, \tag{12}$$

wo p und a Constanten sind. Die Gleichung (12) werde mit $\cos u\,\frac{ds_1}{ds}$ multiplicirt. Mit Hülfe der Gleichungen (6), (7) und (10) folgt dann:

$$\cos p\cdot\cos u\cdot u'+\frac{\sin p}{\varrho}=-\frac{1}{a}\,\frac{d\,\frac{\cos^2 u}{u'}}{ds}. \tag{13}$$

Man setze hierin $\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varepsilon}{ds}$. Bedeutet b eine Constante, so giebt die Gleichung (13) durch Integration:

$$\cos p\cdot\sin u+\varepsilon\cdot\sin p=-\frac{\cos^2 u}{a u'}+b, \tag{14}$$

oder mit $\frac{u'}{\cos^2 u}$ multiplicirt:

$$\cos p\,\frac{\sin u\cdot u'}{\cos^2 u}+\sin p\,\frac{\varepsilon\cdot u'}{\cos^2 u}=-\frac{1}{a}+\frac{b\cdot u'}{\cos^2 u}. \tag{15}$$

Es ist nun nach (3) und (10):

$$\frac{\varepsilon\cdot u'}{\cos^2 u}=\varepsilon\,\frac{d\operatorname{tang} u}{ds}=d\,\frac{\varepsilon\cdot\operatorname{tang} u}{ds}-\frac{\operatorname{tang} u}{\varrho}=d\,\frac{\varepsilon\operatorname{tang} u}{ds}-\frac{1}{r},$$

d. i.

$$\frac{\varepsilon\cdot u'}{\cos^2 u}=d\,\frac{\varepsilon\operatorname{tang} u-\omega}{ds}.$$

Die Gleichung (15) lässt sich also schreiben:

$$\cos p\cdot d\,\frac{\frac{1}{\cos u}}{ds}+\sin p\cdot d\,\frac{\varepsilon\operatorname{tang} u-\omega}{ds}=-\frac{1}{a}+b\,\frac{d\operatorname{tang} u}{ds}.$$

Bedeutet c eine Constante, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung durch Integration nach s:

$$\frac{\cos p}{\cos u}+\sin p\cdot(\varepsilon\operatorname{tang} u-\omega)=-\frac{s}{a}+b\operatorname{tang} u+c,$$

oder:

$$\frac{\cos p}{\cos u}+(\varepsilon\cdot\sin p-b)\operatorname{tang} u-(\omega\cdot\sin p-c)=-\frac{s}{a}. \tag{16}$$

Hierin ist u durch die Gleichung (3) bestimmt. *Die Gleichung (16) charakterisirt die geodätischen Linien einer developpabeln Fläche, deren Wendecurve die Eigenschaft hat, dass ihre Hauptnormalen gleichzeitig die Hauptnormalen einer zweiten Curve sind.*

Für $p = 0$ giebt die Gleichung (12) $\varrho_1 = a$. Die Gleichung (16) reducirt sich für $p = 0$ auf:

$$\frac{1}{\cos u} = b \cdot \operatorname{tang} u - \frac{s}{a} + c.$$

Setzt man $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ statt b und c, so giebt die vorstehende Gleichung, in Verbindung mit der Gleichung (3), durch Elimination von u:

$$a^2\left[1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right] = \left[b\frac{\varrho}{r} - s + c\right]^2.$$

Durch diese Gleichung sind die geodätischen Curven einer developpabeln Fläche charakterisirt, deren Wendecurve constanten Krümmungsradius hat. Für $p = \frac{\pi}{2}$ giebt die Gleichung (12) $r_1 = a$. Die Gleichung (16) giebt dann nach (3):

$$(17) \qquad (\varepsilon \cdot \sin p - b)\frac{\varrho}{r} - (\omega \sin p - c) = -\frac{s}{a}.$$

Durch diese Gleichung sind die geodätischen Linien einer developpabeln Fläche bestimmt, deren Wendecurve constanten Torsionsradius hat. Für $a = \infty$ bestimmt die Gleichung (12) eine Helix. Die Gleichungen (14) und (16) reduciren sich für $a = \infty$ auf:

$$\cos p \cdot \sin u + \varepsilon \sin p - b = 0,$$
$$\frac{\cos p}{\cos u} + (\varepsilon \cdot \sin p - b) \operatorname{tang} u = \omega \cdot \sin p - c.$$

Durch Elimination von u zwischen diesen Gleichungen folgt:

$$(18) \qquad (\varepsilon \cdot \sin p - b)^2 + (\omega \cdot \sin p - c)^2 = \cos^2 p.$$

Setzt man

$$b = \varepsilon_0 \cdot \sin p, \quad c = \omega_0 \cdot \sin p, \quad \cot p = k,$$

so folgt:

$$(19) \qquad (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + (\omega - \omega_0)^2 = k^2.$$

Durch diese Gleichung sind die geodätischen Linien einer developpabeln Fläche charakterisirt, deren Wendecurve die Helix einer beliebigen Cylinderfläche ist. Man kann die Gleichung (18) auch aus der Gleichung (15) auf folgende Art herleiten. Für $a = \infty$ giebt die Gleichung (14)

$$\cos p \cdot \sin u + \varepsilon \cdot \sin p - b = 0.$$

Wird u zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (3) eliminirt, so folgt:

$$\pm\frac{\varrho}{r} = \frac{\varepsilon\cdot\sin p - b}{\sqrt{\cos^2 p - (\varepsilon\cdot\sin p - b)}}.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\frac{\sin p}{\varrho}$, setze dann $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{ds}$ und $\frac{1}{r} = \frac{d\omega}{ds}$. Durch Integration nach s ergiebt sich wieder die Gleichung (18).

Für den Fall, dass ϱ_1 und r_1 beide constant sind, ist die Wendecurve der developpabeln Fläche die Helix eines Kreiscylinders. An Stelle der Gleichung (18) oder (19) lässt sich eine algebraische Gleichung zwischen ϱ und r aufstellen. Nimmt man zuerst ϱ_1 constant, so ist nach (12) $p = 0$, die Gleichung (14) giebt dann:

$$a\sin u = -\frac{\cos^2 u}{u'} + ab. \tag{20}$$

Ist r_1 allein constant, so hat man in (12) und (13) $\sin p = 1$. Man setze dann in der Gleichung (13) c statt a, so dass $r_1 = c$ ist. Die Gleichung (13) giebt dann:

$$\frac{c}{\varrho} = -\frac{d\frac{\cos^2 u}{u'}}{ds}.$$

Setzt man hierin aus der Gleichung (20) den Werth von $\frac{\cos^2 u}{u'}$, so folgt:

$$\frac{c}{\varrho} = a\cos u\cdot u'.$$

Die Elimination von u' zwischen der vorstehenden Gleichung und der Gleichung (20) führt auf:

$$\operatorname{tang} u + \frac{\varrho}{c}\cos^2 u = \frac{b}{\cos u}.$$

Wird endlich u zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (3) eliminirt, so erhält man:

$$\left[\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{c}\,\frac{1}{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}\right] = b^2\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right].$$

Die vorstehende Gleichung bestimmt die geodätischen Linien der developpabeln Fläche, welche eine Helix eines Kreiscylinders zur Wendecurve hat.

II.

In der oben erwähnten kurzen Abhandlung in den „Nachrichten von d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften. Göttingen 1866“ hatte der Verfasser eine Frage behandelt, auf die zurückzukommen er sich hier erlaubt. Es handelt sich dabei theils um weitere Ausführung von Rechnungen, theils um Aufstellung von Resultaten, die nicht ohne einiges Interesse sein möchten. Die Eigenthümlichkeit der Helix einer Cylinderfläche, dass in jedem Punkt das Verhältniss des Krümmungsradius zum Torsionsradius constant ist, hat auch die Helix der Fläche eines Kreiskegels. Es entsteht hierbei die Frage: Welche Curve kann gleichzeitig die Helix einer cylindrischen und einer conischen Fläche sein?

Die Generatricen einer cylindrischen Fläche seien der Axe der z parallel. Es sei q der constante Winkel, unter welchem eine Helix der cylindrischen Fläche ihre Generatricen schneidet. Bezeichnet V eine beliebige Function von v, deren Derivirte V', V'' etc. sein mögen, so lassen sich die Coordinaten x, y und z eines Punktes P der cylindrischen Helix auf folgende Art in Function einer Variabeln v darstellen:

$$(1)\qquad x = V''\cos v + V'\sin v,\quad y = V''\sin v - V'\cos v,$$
$$z = (V'' + V)\cot q.$$

Die beiden ersten Gleichungen (1) geben

$$(2)\qquad \begin{aligned} x\cos v_0 + y\sin v_0 &= V''\cos(v-v_0) + V'\sin(v-v_0),\\ -x\sin v_0 + y\cos v_0 &= V''\sin(v-v_0) - V'\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Ergiebt sich bei einer Bestimmung von V durch Integration, dass V eine Function von $v - v_0$ ist, wo v_0 eine Constante bedeutet, so zeigen die Gleichungen (2), dass sich die Constante v_0 nur auf eine Drehung des Coordinatensystems um die Axe der z bezieht, also, unbeachtet der Allgemeinheit, $v_0 = 0$ genommen werden kann.

Sind α, β und γ die Winkel, welche die Tangente der cylindrischen Helix mit den Coordinatenaxen einschliesst, so geben die Gleichungen (1)

$$(3)\qquad \cos\alpha = \cos v\sin q,\quad \cos\beta = \sin v\sin q,\quad \cos\gamma = \cos q.$$

Die Spitze einer conischen Fläche werde zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen. Soll der Punkt P einer Helix der conischen Fläche angehören, welche Curve die Generatricen der Fläche unter dem constanten Winkel p schneiden möge, so findet die Gleichung statt:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \cos p\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Die vorstehende Gleichung giebt infolge der Gleichungen (1) und (3):

$$V'' + V\cos^2 q = \cos p\cdot\sqrt{(V''+V\cos^2 q)^2 + (V'^2 + V^2\cos^2 q)\sin^2 q}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{V''+V\cos^2 q}{\sqrt{V'^2+V^2\cos^2 q}} = \cot p\sin q.$$

Wird die vorstehende Gleichung mit V' multiplicirt, darauf integrirt, so folgt:

$$(4)\qquad \sqrt{V'^2 + V^2\cos^2 q} = V\cot p \sin q + c,$$

wo c eine Constante bedeutet. Aus der Gleichung (4) ergiebt sich unmittelbar die folgende:

$$(5)\qquad V'^2\sin^2 p + V^2(\sin^2 p - \sin^2 q) - 2\,Vc\cdot \sin p \cos p \sin q = c^2 \sin^2 p.$$

Es sei zuerst $p > q$. Aus der Gleichung (5) folgt:

$$(6)\qquad \frac{V'^2 \sin^2 p}{\sin^2 p - \sin^2 q} + \left[V - \frac{c \sin p \cos p \sin q}{\sin^2 p - \sin^2 q}\right]^2 = \left[\frac{c \sin^2 p \cos q}{\sin^2 p - \sin^2 q}\right]^2.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(7)\qquad \frac{\sin p}{\sqrt{\sin^2 p - \sin^2 q}} = g,$$

wo also $g > 1$, so erhält man aus der Gleichung (6), mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$(8)\qquad V = cg^2 \cot p \sin q - c \cos q\, g^2 \cos \frac{v}{g},$$

also:

$$(9)\qquad V' = c\cos q \cdot g \sin \frac{v}{g}, \qquad V'' = c \cos q \cdot \cos \frac{v}{g}.$$

Die Werthe von V, V' und V'' aus (8) und (9) substituire man in die Gleichungen (1). Zur Vereinfachung nehme man $c\cos q = k$, $\frac{v}{g} = u$ und setze im Werthe von z für g^2 den Werth aus (7). Es folgt dann:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= k[\cos u \cos gu + g \sin u \sin gu], \\ y &= k[\cos u \sin gu - g \sin u \cos gu], \\ z &= k\,\frac{\sin p \cos p - \sin q \cos q \cos u}{\sin^2 p - \sin^2 q}. \end{aligned}\right.$$

Nach (7) und (10) ist:

$$x^2 + y^2 = k^2(\cos^2 u + g^2 \sin^2 u) = k^2\,\frac{\sin^2 p - \sin^2 q \cos^2 u}{\sin^2 p - \sin^2 q}.$$

Wird auf der rechten Seite $\cos u$ mit Hülfe der dritten Gleichung (10) ersetzt, so erhält man:

$$(11)\qquad \frac{\sin^2 p - \sin^2 q}{k^2 \sin^2 p}(x^2 + y^2) + \frac{(\sin^2 p - \sin^2 q)^2}{k^2 \sin^2 p \cos^2 q}\left[z - k\,\frac{\sin p \cos p}{\sin^2 p - \sin^2 q}\right]^2 = 1.$$

Zur Vereinfachung setze man:

$$\frac{k^2 \sin^2 p \cos^2 q}{(\sin^2 p - \sin^2 q)^2} = a^2, \qquad \frac{k^2 \sin^2 p}{\sin^2 p - \sin^2 q} = b^2,$$

also:

$$\frac{k \sin p \cos p}{\sin^2 p - \sin^2 q} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung (11) einfacher auf folgende Weise darstellen:

$$(12) \qquad \frac{[z \pm \sqrt{a^2 - b^2}]^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1.$$

Die beiden ersten Gleichungen (10) bestimmen eine *Epicykloide*. Aus den Gleichungen (10) und (12) folgt:

Wird die grosse Axe einer Ellipse zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Curve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen constanten Winkel bilden, so schneidet die Curve C auch die Generatricen einer conischen Fläche unter einem constanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte der Ellipse ist. Die Projection der Curve C auf eine Ebene, senkrecht zur Rotationsaxe, ist eine Epicykloide.

Wenn $q > p$ ist, so giebt die Gleichung (6):

$$(13) \qquad \frac{V'^2 \sin^2 p}{\sin^2 q - \sin^2 p} = \left[\frac{V + c \sin p \cos p \sin q}{\sin^2 q - \sin^2 p}\right]^2 - \left[\frac{c \sin^2 p \cos q}{\sin^2 q - \sin^2 p}\right]^2.$$

Setzt man:

$$(14) \qquad \frac{\sin p}{\sqrt{\sin^2 q - \sin^2 p}} = g,$$

so giebt die Gleichung (13):

$$(15) \qquad V + \frac{c \sin p \cos p \sin q}{\sin^2 q - \sin^2 p}$$

$$= \frac{c \sin^2 p \cos q}{\sin^2 q - \sin^2 p} \cdot \frac{e^{\frac{v}{g}} + e^{-\frac{v}{g}}}{2} = c \cos q \cdot g^2 \frac{e^{\frac{v}{g}} + e^{-\frac{v}{g}}}{2},$$

also:

$$(16) \qquad V' = c \cdot \cos q g \frac{e^{\frac{v}{g}} - e^{-\frac{v}{g}}}{2}, \qquad V'' = c \cos q \frac{e^{\frac{v}{g}} + e^{-\frac{v}{g}}}{2}.$$

Aus (15) und (16) setze man die Werthe von V, V' und V'' in die Gleichungen (1), darauf zur Vereinfachung $c \cos q = k$ und $v = gu$. Für x, y und z ergeben sich dann die Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} x = k\left[\frac{e^u + e^{-u}}{2} \cos gu + g \frac{e^u - e^{-u}}{2} \sin gu\right], \\ y = k\left[\frac{e^u + e^{-u}}{2} \sin gu - g \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cos gu\right], \\ z = k \frac{-\sin p \cos p + \sin q \cos q \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\sin^2 q - \sin^2 p}. \end{cases}$$

Bildet man $x^2 + y^2$, substituirt für g seinen Werth aus (14), so folgt aus den Gleichungen (17):

$$(18)\quad \frac{(\sin^2 q - \sin^2 p)^2}{k^2 \sin^2 p \cos^2 q}\left[z + \frac{k \sin p \cos p}{\sin^2 q - \sin^2 p}\right]^2 - \frac{\sin^2 q - \sin^2 p}{k^2 \sin^2 p}(x^2 + y^2) = 1.$$

Für:

$$\frac{k^2 \sin^2 p \cos^2 q}{(\sin^2 q - \sin^2 p)^2} = a^2, \qquad \frac{k^2 \sin^2 p}{\sin^2 q - \sin^2 p} = b^2,$$

also:

$$\frac{k \sin p \cos p}{\sin^2 q - \sin^2 p} = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

lässt sich die Gleichung (18) einfacher wie folgt schreiben:

$$\frac{[z \pm \sqrt{a^2 + b^2}]^2}{a^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung giebt den analogen Satz zu dem obigen:

Wird die grosse Axe einer Hyperbel zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Curve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen constanten Winkel bilden, so schneidet auch die Curve C die Generatricen einer conischen Fläche unter einem constanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte der Hyperbel ist.

Für den Fall, dass $q = p$, reducirt sich die Gleichung (5) auf:

$$V'^2 = 2c \cdot \cos p \cdot V + c^2.$$

Hieraus folgt:

$$2c \cos p \cdot V + c^2 = (vc \cos p)^2.$$

Für den vorstehenden Werth von V geben die Gleichungen (1):

$$\frac{x}{c} = \cos p \cdot (\cos v + v \sin v), \qquad \frac{y}{c} = \cos p \cdot (\sin v - v \cos v),$$

$$(19)\qquad \frac{z}{c} = \frac{v^2 + 1}{2 \sin p} \cos^2 p - \frac{\sin p}{2}.$$

Die beiden Gleichungen für x und y bestimmen die *Evolvente eines Kreises.* Aus den Gleichungen (19) findet man leicht:

$$x^2 + y^2 = 2c \sin p \cdot \left(z + \frac{c \sin p}{2}\right).$$

Aus dem Vorstehenden folgt:

Wird die Axe einer Parabel zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Curve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen constanten Winkel p bilden, so schneidet die Curve C auch die Generatricen einer conischen Fläche unter dem constanten Winkel p, deren Spitze der Brennpunkt der Parabel ist. Die Projection der Curve C auf eine Ebene, senkrecht zur Rotationsaxe, ist die Evolvente eines Kreises.

Ist in der Gleichung (5) $c = 0$, setzt man, wie in (14)

$$\frac{\sin p}{\sqrt{\sin^2 q - \sin^2 p}} = g,$$

so ist:

$$V'g = V,$$

oder

$$V = kg^2 e^{\frac{v}{g}},$$

wo k eine Constante bedeutet. Die Gleichungen (1) werden für den vorstehenden Werth von V:

$$x = ke^{\frac{v}{g}} \cdot [\cos v + g \sin v], \qquad y = ke^{\frac{v}{g}} [\sin v - g \cos v], \tag{20}$$

$$z = k(g^2 + 1) \cot q \cdot e^{\frac{v}{g}}.$$

Die Gleichungen für x und y bestimmen eine *logarithmische Spirale*. Hieraus folgt: *Ist der gemeinschaftliche Durchschnitt der Fläche eines Kreiskegels mit einer cylindrischen Fläche — deren Generatricen der Axe des Kegels parallel sind — auf jeder der beiden Flächen eine Helix, so ist die Projection der Helix auf eine Ebene, senkrecht zur Axe der Kegelfläche, eine logarithmische Spirale.*

In Beziehung auf die Werthe von x und y der Gleichungen (10), (17), (19) und (20) lässt sich noch folgende Bemerkung machen. Es sei P_1 ein Punkt einer planen Schnittcurve, deren Ebene senkrecht auf den Generatricen einer Cylinderfläche steht. Im Punkte P_1 sei ϱ_1 der Krümmungsradius und s_1 der Bogen der ebenen Curve. Soll der gemeinschaftliche Durchschnitt der cylindrischen Fläche mit einer conischen Fläche, auf beiden Flächen eine Helix sein, so besteht die Gleichung:

$$\varrho_1^2 = As_1^2 + 2Bs_1 + C,$$

wo A, B und C Constanten sind. Statt von den Gleichungen (1) auszugehen, kann man die entsprechenden Gleichungen für eine Helix einer conischen Fläche zu Grunde legen. Die auszuführenden Rechnungen werden aber dann bedeutend weitläufiger und complicirter wie bei dem im Vorstehenden eingeschlagenen Verfahren.

Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes.

Par

P. Appell à Paris.

Introduction.

En généralisant la série hypergéométrique de Gauss, M. Heine a découvert des fonctions nouvelles qui ont avec les fonctions Θ les mêmes rapports que les intégrales Eulériennes avec la fonction sinus. Ces fonctions de M. Heine sont formées avec la moitié des facteurs qui constituent les fonctions Θ de même que la fonction $\Gamma(x)$ est formée avec la moitié des facteurs qui constituent la fonction $\sin \pi x$*). On a ainsi une double série de fonctions: d'un coté les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, et de l'autre les fonctions Eulériennes et les fonctions O et Φ de M. Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes à plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction Eulérienne Γ et à la fonction O de M. Heine et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$ comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1.

Dans le présent mémoire, je m'occupe d'abord de l'étude des principales propriétés de ces fonctions; puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes du calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et de certains produits infinis.

Quelques uns des résultats exposés dans ce mémoire ont fait l'objet de trois Notes présentées à l'Académie des sciences et insérées dans les Comptes Rendus: tome 86, page 953; t. 89, p. 841 et 1031.

I. Définition et propriétés des fonctions O.

1. — Désignons par:

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \tag{1}$$

$(n+1)$ quantités imaginaires telles que, dans les rapports

---

*) Man vergl. die Arbeit von Scheibner: Ueber periodische Functionen, Berichte der Gesellschaft d. W. zu Leipzig, 1862. D. R.

$$\frac{\omega_1}{\omega},\quad \frac{\omega_2}{\omega},\ \ldots,\ \frac{\omega_n}{\omega},$$

les coefficients de $\sqrt{-1}$ soient positifs et posons:

$$(2)\qquad q_1 = e^{i\frac{\pi\omega_1}{\omega}},\quad q_2 = e^{i\frac{\pi\omega_2}{\omega}},\ \ldots,\ q_n = e^{i\frac{\pi\omega_n}{\omega}};\quad (i = \sqrt{-1}).$$

Les modules de ces quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont moindres que l'unité, et le produit:

$$(3)\qquad O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \prod_{m_\varrho=0}^{m_\varrho=\infty}\left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \ldots q_n^{2m_n}\right).$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

est convergent, quelle que soit la valeur attribuée à la variable x. Ce produit (3) est étendu à toutes les valeurs entières positives de m_1, $m_2, \ldots, m_n$, zéro compris.

La fonction $O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ ainsi définie est une fonction entière de x admettant la période ω.

Si l'on augmente x d'une des quantités $\omega_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$ la fonction O se reproduit divisée par une fonction analogue formée avec les n quantités

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{\varrho-1},\ \omega_{\varrho+1},\ \ldots,\ \omega_n,$$

c'est à dire avec les quantités (1) à l'exclusion de ω_ϱ.

Ainsi l'on a:

$$(4)\qquad \begin{cases} O(x + \omega \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ O(x + \omega_\varrho \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \dfrac{O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{O(x \mid \omega, \omega_1, \ldots, \omega_{\varrho-1}, \omega_{\varrho+1}, \ldots, \omega_n)} \end{cases}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

La multiplication de l'argument dans cette fonction se fait par la formule:

$$(5)\qquad \begin{cases} O(mx \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ = \displaystyle\prod_{\lambda_\varrho=0}^{\lambda_\varrho=m-1} O\left(x + \frac{\lambda\omega}{m} + \frac{\lambda_1\omega_1}{m} + \frac{\lambda_2\omega_2}{m} + \cdots + \frac{\lambda_n\omega_n}{m} \;\middle|\; \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right), \end{cases}$$

le produit étant étendu aux valeurs entières de $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ depuis 0 jusqu'à $m - 1$. Le second membre de cette formule (5) contient m^{n+1} facteurs.

Pour démontrer la formule (5), remplaçons, dans le second nombre de cette formule, les fonctions O par leurs expressions (3) et formons d'abord le produit des facteurs

$$1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left(x + \frac{\lambda\omega}{m} + \frac{\lambda_1\omega_1}{m} + \cdots + \frac{\lambda_n\omega_n}{m}\right)} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \cdots q_n^{2mn}$$

pour lesquels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, m_1, m_2, \ldots, m_n$ ont la même valeur, λ variant de 0 à $m - 1$. Ce produit est, en vertu des propriétés des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité:

$$(6) \qquad 1 - e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}} q_1^{2(mm_1+\lambda_1)} q_2^{2(mm_2+\lambda_2)} \cdots q_n^{2(mm_n+\lambda_n)}.$$

Il reste alors à former le produit de tous les facteurs tels que (6) en faisant varier $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de 0 à ∞ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de 0 à $m - 1$. Or, l'exposant de q_ϱ^2 c'est à dire $(m m_\varrho + \lambda_\varrho)$ prend de cette façon toutes les valeurs entières de 0 à $+\infty$ et ne prend qu'une fois chacune de ces valeurs; le produit des facteurs (6) est donc:

$$\prod_{m_\varrho=0}^{m_\varrho=\infty}\left(1 - e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \cdots q_n^{2m_n}\right)$$

ou bien: $O(mx|\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$; ce qui démontre la relation (5).

Les zéros de la fonction $O(x|\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ sont donnés par l'expression

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= \mu\omega - \mu_1\omega_1 - \mu_2\omega_2 - \cdots - \mu_n\omega_n, \\ \mu &= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty, \\ \mu_\varrho &= 0, +1, +2, \cdots + \infty, \quad (\varrho = 1, 2, \cdots, n); \end{aligned}$$

ces zéros sont tous simples, à condition de regarder comme des zéros distincts ceux qui proviennent de valeurs différentes attribuées à $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; mais il peut arriver que plusieurs systèmes de valeurs des entiers $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ donnent pour x la même valeur dans l'expression (7). Il est à remarquer que la valeur $x = 0$ ne peut être obtenue qu'*une* fois en faisant:

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0.$$

En effet, si l'on a:

$$\mu\omega - \mu_1\omega_1 - \cdots - \mu_n\omega_n = 0,$$

en divisant par ω, l'on obtient:

$$(8) \qquad \mu - \mu_1\frac{\omega_1}{\omega} - \cdots - \mu_n\frac{\omega_n}{\omega} = 0;$$

comme $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont positifs ou nuls et que les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans $\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_2}{\omega}, \cdots, \frac{\omega_n}{\omega}$ sont tous *positifs*, l'équation (8) entraîne:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$

et, par suite, $\mu = 0$.

2. La connaissance des zéros des fonctions entières O permet de décomposer ces fonctions en facteurs primaires suivant la méthode de

M. Weierstrass. Prenons, par exemple, la fonction $O(x|\omega, \omega_1)$ qui n'est autre que la fonction $O\left(q_1{}^2, \frac{x}{\omega_1} - 1\right)$ de M. Heine (Voir Journal de Crelle t. 34, p. 290, ou Handbuch der Kugelfunctionen p. 109); on a:

$$(9) \qquad O(x|\omega,\ \omega_1) = e^{ax^2+bx+c} \cdot x \cdot \prod{}' \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2}$$

$$w = \mu\omega - \mu_1\omega_1,$$

$$\mu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \pm \infty,$$

$$\mu_1 = 0,\ +1,\ +2,\ \cdots + \infty,$$

$$(\mu = \mu_1 = 0 \text{ étant excepté}).$$

Dans cette formule (9) les lettres a, b, c désignent des constantes. On voit que le produit doublement infini (9) est formé en prenant la *moitié* des facteurs primaires qui constituent la fonction

$$\sigma\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{2},\ \frac{\omega_1}{2}\right)$$

de Mr. Weierstrass; de même que $\frac{1}{\Gamma(x)}$ est formé en prenant la *moitié* des facteurs primaires qui constituent $\sin \pi x$.

La fonction générale $O\,(x \mid \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$ peut de même, à un facteur exponentiel près

$$e^{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+1} x^{n+1}}$$

être considérée comme la limite du produit

$$(10) \qquad x \cdot \prod{}' \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{w}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{x}{w}\right)^{n+1}}$$

où:

$$w = \mu\omega - \mu_1\omega_1 - \mu_2\omega_2 - \cdots - \mu_n\omega_n;$$

le produit étant étendu aux valeurs:

$$\mu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \pm \infty,$$

$$\mu_\varrho = 0,\ +1,\ +2,\ \cdots + \infty \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, n)$$

la combinaison $w = 0$ étant exceptée.

Pour montrer directement que la fonction (10) ne diffère de

$$O\,(x \mid \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$$

que par un facteur exponentiel, formons le produit (10) en prenant les facteurs dans l'ordre suivant. Faisons d'abord le produit des facteurs primaires (10) dans lesquels $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ont la même valeur, μ variant de $-\infty$ à $+\infty$; ce produit est une fonction

$$f\,(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n),$$

et il restera à faire le produit:

$$\prod f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

chacun des entiers μ_ϱ variant de 0 à ∞.

Lorsque l'on prend les facteurs dans l'ordre que je viens d'indiquer, le produit

$$(11) \qquad x \cdot \prod_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = 0}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = \infty} \cdot \prod_{\mu = -\infty}^{\mu = +\infty} \cdot \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w}} \text{ (excepté, } w = 0)$$

st convergent; le produit des autres facteurs:

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{w}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{x}{w}\right)^{n+1}}$$

pris dans le même ordre est convergent aussi et donne un facteur exponentiel:

$$e^{a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n+1} x^{n+1}}.$$

Pour former le produit (11) supposons d'abord que, dans le premier produit

$$(12) \qquad \prod_{\mu = -\infty}^{\mu = +\infty} \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w}},$$

les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, ne soient pas tous nuls, et posons, pour abréger,

$$\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \cdots + \mu_n \omega_n = \nu;$$

ce produit (12) a pour limite:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{\omega}(x + \nu)}{\sin \frac{\pi \nu}{\omega}} e^{-\frac{\pi x}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi \nu}{\omega}};$$

si, au contraire, on suppose:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$

et qu'on ajoute au produit (12) le facteur x qui précède le produit (11); on a le produit

$$x \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\mu\omega}\right) e^{\frac{x}{\mu\omega}} (\mu = 0 \text{ excepté}),$$

c'est à dire $\frac{\omega}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\omega}$.

Donc enfin, le produit (11) est

$$(13) \qquad \frac{\omega}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\omega} \prod{}' \frac{\sin \pi (x + \nu)}{\sin \frac{\pi \nu}{\omega}} e^{-\frac{\pi x}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi \nu}{\omega}},$$

le produit $\prod{}'$ étant étendu aux valeurs:

$$\mu_\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,\quad (\varrho = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

d'où l'on excepte la combinaison $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$.

Or, en se servant de l'identité

$$\sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i}$$

et se rappelant que

$$e^{\frac{i\pi\omega_\varrho}{\omega}} = q_\varrho,\quad (\varrho = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

on met ce produit (13) sous la forme:

$$(14)\quad \frac{\omega i}{2\pi}\, e^{-\frac{\pi x i}{\omega}} \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}\right) \prod{}' \frac{1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \cdots q_n^{2\mu_n}}{1 - q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \cdots q_n^{2\mu_n}} \cdot e^{-\frac{\pi x}{\omega}\left(i + \operatorname{cotg}\frac{\pi\nu}{\omega}\right)}.$$

Le produit

$$(15)\qquad \prod{}' e^{-\frac{\pi x}{\omega}\left(i + \operatorname{cotg}\frac{\pi\nu}{\omega}\right)}$$

est convergent et sa limite est de la forme e^{ax}; le produit

$$\prod{}' \left(1 - q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \ldots q_n^{2\mu_n}\right)$$

qui se trouve au dénominateur a pour limite une constante; et le produit

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}\right) \prod{}' \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \ldots q_n^{2\mu_n}\right)$$

est la fonction $O(x \mid \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$. Donc l'expression (14) et, par suite, l'expression (11) sont de la forme

$$e^{a_0 + a_1 x} \,.\, O(x \mid \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$$

comme on devait le trouver.

Remarque. Le produit (15) est convergent, car la série

$$(16)\qquad \frac{\pi}{\omega} \sum{}' \left(i + \operatorname{cotg}\frac{\pi\nu}{\omega}\right) = \frac{2i\pi}{\omega} \sum{}' \frac{q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \cdots q_n^{2\mu_n}}{q_1^{2\mu_1} q_2^{2\mu_2} \cdots q_n^{2\mu_n} - 1}$$

est convergente; la somme Σ' étant étendue aux mêmes valeurs que le produit Π' (13). On voit facilement que la somme de cette série (16) est la valeur que prend la fonction

$$\frac{d \log \left[\dfrac{O(x \mid \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)}{1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}}\right]}{dx}$$

pour $x = 0$.

3. On peut supposer, comme cas particulier de ce qui précède, que deux ou plusieurs des quantités

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

deviennent égales entre elles.

Supposons, par exemple, $\omega_n = \omega_1$; alors

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_1) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2(m_1+m_n)} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}\right),$$

$m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$ variant de 0 à $+\infty$. La somme $m_1 + m_n$ prend $(m+1)$ fois une même valeur entière positive m; on a donc:

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_1) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}\right)^{m+1}$$

et par suite

$$O(x + \omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_1)$$
$$= \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2(m+1)} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}\right)^{m+1};$$

d'autre part

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = \prod \left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}\right).$$

Si, à l'aide de ces expressions, nous prenons d'un coté la dérivée

$$\frac{d \log O(x + \omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_1)}{dx}$$

et d'un autre coté la dérivée

$$\frac{d \log O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{d\omega_1},$$

nous voyons que ces deux dérivées sont égales l'une et l'autre à la série:

$$-\sum_{m_\varrho=0}^{m_\varrho=\infty} \frac{2m_1\pi i}{\omega} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}}{1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \dots q_{n-1}^{2m_{n-1}}}.$$

$$(\varrho = 1, 2, \dots, n-1).$$

On a donc la relation

$$(17) \qquad \frac{d \log O(x + \omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_1)}{dx}$$
$$= \frac{d \log O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{d\omega_1},$$

qui permet de ramener les dérivées des fonctions O par rapport à une période ω_ϱ à des dérivées de fonctions O par rapport à x. Nous faisons plus loin (§ 10.) une application intéressante de cette formule (17).

D'une façon plus générale, si, dans la fonction

$$O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

k périodes sont égales

$$\omega_n = \omega_{n-1} = \cdots = \omega_{n-k+2} = \omega_1,$$

cette fonction devient

$$\prod_{m_\varrho=0}^{m_\varrho=\infty}\left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2(m_1+m_n+m_{n-1}+\cdots+m_{n-k+2})} \cdot q_2^{2m_2} \cdots q_{n-k+1}^{2m_{n-k+1}}\right)$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

La somme

$$m_1 + m_n + m_{n-1} + \cdots + m_{n-k+2}$$

reprend une valeur entière positive donnée m un nombre

$$(m, k) = \frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot m}$$

de fois; par suite la fonction O considérée devient dans ce cas:

$$\prod\left(1 - e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} q_1^{2m} q_2^{2m_2} \cdots q_{n-k+1}^{2m_{n-k+1}}\right)^{(m,k)}, \tag{18}$$

les entiers $m, m_2, \ldots, m_{n-k+1}$ variant, comme dans tous les produits précédents, de 0 à $+\infty$.

II. Applications des fonctions précédemment définies.

4. On sait que l'on peut avec la fonction $\Gamma(x)$ et ses dérivées logarithmiques former une fonction uniforme $F(x)$ satisfaisant à l'une ou l'autre des relations

$$F(x+\omega) = \varphi(x)\, F(x)$$

ou

$$F(x+\omega) = \varphi(x) + F(x)$$

$\varphi(x)$ étant une *fonction rationnelle* donnée de x.

Proposons-nous, par analogie avec ce problème, de former une fonction *uniforme* $F(x)$ satisfaisant à l'un ou l'autre des groupes de relations

$$\left\{\begin{aligned} F(x+\omega\ ) &= F(x) \\ F(x+\omega_1) &= \varphi(x)\, F(x) \end{aligned}\right. \tag{19}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} F(x+\omega\ ) &= F(x) \\ F(x+\omega_1) &= \varphi(x) + F(x), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme *donnée*.

Remarquons d'abord que la fonction $\varphi(x)$ doit admettre la période ω. En effet, on tire, par exemple, des deux équations (19)

$$F(x+\omega+\omega_1) = \varphi(x)\, F(x),$$

$$F(x+\omega_1+\omega) = \varphi(x+\omega)\, F(x),$$

donc:

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x).$$

Il résulte de là que, si la fonction $\varphi(x)$ n'admet pas la période ω, il est impossible de satisfaire aux équations (19) ou (20) à l'aide d'une fonction $F(x)$ uniforme; mais alors il pourra exister des fonctions $F(x)$ non uniformes, satisfaisant à ces équations, ainsi que nous en donnons plus loin un exemple (§ 6.).

Puisque la fonction $\varphi(x)$ doit admettre la période ω, il y a lieu de distinguer deux cas: ou bien cette fonction est simplement périodique, ou bien elle est doublement périodique et admet, outre la période ω, une autre période ω_2.

5. Supposons d'abord que $\varphi(x)$ soit simplement périodique, et plus particulièrement que $\varphi(x)$ soit une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}$.

Dans ce cas les fonctions $F(x)$ satisfaisant aux équations (19) ou (20) peuvent être formées à l'aide de la fonction $O(x \mid \omega, \omega_1)$ et de ses dérivées logarithmiques.

Prenons d'abord les équations (19)

$$(19) \qquad \begin{aligned} F(x+\omega\ ) &= F(x) \\ F(x+\omega_1) &= \varphi(x)\, F(x) \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}$

Si l'on pose:

$$e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} = z$$

on a:

$$\varphi(x) = A z^m \prod \frac{1-az}{1-bz}$$

A, a, b étant des constantes différentes de 0 et m un entier positif ou négatif.

Posons en outre:

$$a = e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}}, \qquad b = e^{\frac{2\pi\beta i}{\omega}}, \ldots$$

la fonction $\varphi(x)$ prend la forme:

$$\varphi(x) = A e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}} \prod \frac{1-e^{\frac{2\pi(x+\alpha)i}{\omega}}}{1-e^{\frac{2\pi(x+\beta)i}{\omega}}}.$$

Or on a:

$$(21) \qquad \begin{cases} O(x+\omega\ \mid \omega, \omega_1) = O(x \mid \omega, \omega_1), \\ O(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}} \cdot O(x \mid \omega, \omega_1). \end{cases}$$

Considérons alors la fonction:

$$f(x) = \prod \frac{O(x+\beta \mid \omega, \omega_1)}{O(x+\alpha \mid \omega, \omega_1)};$$

puis formons à l'aide des fonctions Θ ou de la fonction σ de Mr. Weierstrass une fonction intermédiaire de Mr. Hermite $f_1(x)$ telle que l'on aît:

$$f_1(x+\omega)=f_1(x),$$

$$f_1(x+\omega_1)=Ae^{\frac{2m\pi xi}{\omega}}f_1(x);$$

il suffira de prendre:

$$F(x)=f(x)\cdot f_1(x)$$

pour avoir une fonction satisfaisant à la question. La fonction la plus générale satisfaisant à la question est égale à la précédente multipliée par une fonction possédant les périodes ω et ω_1.

Par exemple supposons:

$$\varphi(x)=\sin\frac{2\pi x}{\omega}=-\frac{1}{2i}e^{\frac{-2\pi xi}{\omega}}\left(1-e^{\frac{4\pi xi}{\omega}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2i}e^{-\frac{2\pi xi}{\omega}}\left(1-e^{\frac{2\pi xi}{\omega}}\right)\left(1-e^{\frac{2\pi\left(x+\frac{\omega}{2}\right)i}{\omega}}\right).$$

Soit $f_1(x)$ une fonction uniforme telle que

$$f_1(x+\omega)=f_1(x),$$

$$f_1(x+\omega_1)=-\frac{1}{2i}e^{-\frac{2\pi xi}{\omega}}f_1(x);$$

fonction que l'on sait former à l'aide des fonctions Θ. On a, en prenant:

$$\Phi(x)=\frac{f_1(x)}{O(x\,|\,\omega,\omega_1)\cdot O\left(x+\frac{\omega}{2}\,\middle|\,\omega,\omega_1\right)}$$

une fonction uniforme satisfaisant aux deux relations:

$$\Phi(x+\omega)=\Phi(x),\quad \Phi(x+\omega_1)=\sin\frac{2\pi x}{\omega}\,\Phi(x).$$

6. Pour donner un exemple de fonction $F(x)$ non uniforme vérifiant les équations (19) lorsque $\varphi(x)$ n'admet pas la période ω, supposons

$$\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{\omega}=-\frac{1}{2i}e^{-\frac{\pi xi}{\omega}}\left(1-e^{\frac{2\pi xi}{\omega}}\right). \tag{22}$$

Soit alors $f(x)$ une fonction uniforme formée à l'aide des fonctions Θ de telle façon que l'on aît:

$$f(x+\omega)=f(x),\quad f(x+\omega_1)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{2\pi xi}{\omega}}\cdot f(x);$$

on aura une fonction $F(x)$ satisfaisant aux relations (19) dans lesquelles $\varphi(x)$ a la valeur (22) en prenant

$$F(x) = \frac{1}{O(x \mid \omega, \omega_1)} \cdot \sqrt{f(x)}.$$

Cette fonction $F(x)$ n'est pas uniforme.

7. Passons à la deuxième question, et proposons-nous de former une fonction uniforme $F(x)$ vérifiant les relations (20) où $\varphi(x)$ désigne une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}$. Si l'on pose

$$e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} = z = \frac{1}{u},$$

la fonction $\varphi(x)$ devient rationnelle en u, et cette fonction rationnelle de u décomposée en fractions simples prend la forme:

$$\varphi(x) = \mathrm{H} + \sum \lambda_n u^{-n} + \sum \left[\frac{A_1}{u-a} + \frac{A_2}{(u-a)^2} + \cdots + \frac{A_s}{(u-a)^s}\right]$$

où n désigne un entier positif ou négatif et a une constante différente de zéro. Faisons

$$a = e^{\frac{2\pi \alpha i}{\omega}}$$

et remplaçons u par $e^{-\frac{2\pi x i}{\omega}}$; nous arrivons à mettre $\varphi(x)$ sous la forme

$$(23) \qquad \varphi(x) = \mathrm{H} + \sum \lambda_n e^{\frac{2n\pi x i}{\omega}}$$

$$+ \sum \left[\frac{A_1}{a} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi(x+\alpha)i}{\omega}}}{1 - e^{\frac{2\pi(x+\alpha)i}{\omega}}} + \cdots + \frac{A_s}{a^s} \frac{e^{\frac{2s\pi(x+\alpha)i}{\omega}}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi(x+\alpha)i}{\omega}}\right)^s}\right].$$

Cela posé, faisons

$$(24) \qquad \begin{cases} \Phi_1(x) = e^{\frac{2\pi x i}{\omega}} \cdot \dfrac{d \log O(x \mid \omega, \omega_1)}{dz} \\ \Phi_2(x) = \dfrac{e^{\frac{4\pi x i}{\omega}}}{1} \cdot \dfrac{d^2 \log O(x \mid \omega, \omega_1)}{dz^2} \qquad \left(z = e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi_k(x) = \dfrac{e^{\frac{2k\pi x i}{\omega}}}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)} \cdot \dfrac{d^k \log O(x \mid \omega, \omega_1)}{dz^k} \end{cases}$$

Ces fonctions vérifient les équations

$$\Phi_k(x+\omega)=\Phi_k(x),$$

$$(24') \qquad \Phi_k(x+\omega_1)=\Phi_k(x)+\frac{e^{\frac{2k\pi x i}{\omega}}}{\left(1-e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}\right)^k},$$

ainsi qu'il résulte immédiatement des équations (21) ou de l'expression suivante de $\Phi_k(x)$:

$$(25) \qquad \Phi_k(x)=-\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{e^{\frac{2k\pi x i}{\omega}}\,q_1^{2mk}}{\left(1-e^{\frac{2\pi x i}{\omega}}\,q_1^{2m}\right)^k}.$$

La fonction $\Phi_1(x)$ n'est autre que la fonction

$$-\Phi\left(q_1^2,\ \frac{x}{\omega_1}-1\right)$$

de M. Heine. (Voir Handbuch der Kugelfunctionen p. 111.)

Désignons par $f_n(x)$ et $\psi(x)$ les fonctions

$$f_n(x)=e^{\frac{2n\pi x i}{\omega}}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2n\pi\omega_1 i}{\omega}}-1},$$

$$\psi(x)=-\frac{\omega}{2\pi i}\,\frac{d\log\Theta(x\,|\,\omega,\omega_1)}{dx}\ ^{*})$$

de telle façon que l'on aît les équations

$$(26) \qquad \begin{aligned} f_n(x+\omega)&=f_n(x); & f_n(x+\omega_1)&=f_n(x)+e^{\frac{2n\pi x i}{\omega}},\\ \psi(x+\omega)&=\psi(x); & \psi(x+\omega_1)&=\psi(x)+1. \end{aligned}$$

Cela posé, la fonction cherchée $F(x)$ est donnée par la formule

$$F(x)=\mathrm{H}\,\psi(x)+\sum\lambda_n f_n(x)$$

$$+\sum\left[\frac{A_1}{a}\Phi_1(x+\alpha)+\frac{A_2}{a^2}\Phi_2(x+\alpha)+\cdots+\frac{A_s}{a^s}\Phi_s(x+\alpha)\right].$$

En effet, en vertu des relations (24') et (26) cette fonction $F(x)$ satisfait aux équations (20) dans lesquelles $\varphi(x)$ a la valeur donnée (23).

La fonction la plus générale satisfaisant aux relations (20) est la fonction que nous venons de trouver augmentée d'une fonction quelconque ayant les deux périodes ω, ω_1.

8. Supposons maintenant que, dans les formules (19) ou (20); $\varphi(x)$ désigne une fonction doublement périodique aux périodes ω, ω_2 n'ayant pas d'autre point singulier essentiel que le point ∞. La fonction

---

*) $\Theta(x\,|\,\omega,\omega_1)$ désigne la fonction Θ formée avec les périodes ω et ω_1 (voir Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques 2⁰ édition p. 114).

élémentaire à l'aide de laquelle nous formerons la fonction $F(x)$ est la fonction $O\,(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)$.

D'après les formules précédentes (4), on a

$$(27)\qquad \begin{cases} O(x+\omega \mid \omega, \omega_1, \omega_2) = O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_1), \\ O(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_2) = \dfrac{O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)}{O(x \mid \omega, \omega_2)}, \\ O(x+\omega_2 \mid \omega, \omega_1, \omega_2) = \dfrac{O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)}{O(x \mid \omega, \omega_1)}. \end{cases}$$

Rappelons en outre les formules:

$$O(x \mid \omega, \omega_1)\, O(\omega_1 - x \mid \omega, \omega_1) = a_1 e^{\frac{\pi x i}{\omega}}\, \Theta_1(x \mid \omega, \omega_1)\,{}^{*)},$$

$$O(x \mid \omega, \omega_2)\, O(\omega_2 - x \mid \omega, \omega_2) = a_2 e^{\frac{\pi x i}{\omega}}\, \Theta_1(x \mid \omega, \omega_2),$$

dans lesquelles a_1 et a_2 désignent des constantes faciles à déterminer.

D'après cela, si nous posons:

$$(28)\qquad N(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2) = \frac{O(-x+\omega_1+\omega_2 \mid \omega, \omega_1, \omega_2)}{O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_2)},$$

cette fonction $N(x)$ vérifie les relations:

$$(28')\qquad \begin{cases} N(x+\omega) = N(x), \\ \dfrac{N(x+\omega_1)}{N(x)} = a_2 e^{\frac{\pi x i}{\omega}}\, \Theta_1(x \mid \omega, \omega_2), \\ \dfrac{N(x+\omega_2)}{N(x)} = a_1 e^{\frac{\pi x i}{\omega}}\, \Theta_1(x \mid \omega, \omega_1). \end{cases}$$

Revenons maintenant à notre problème. La fonction donnée $\varphi(x)$ aux périodes ω, ω_2 peut se mettre sous la forme:

$$(29)\qquad \varphi(x) = A e^{\frac{2m\pi x i}{\omega}} \prod_h \frac{\Theta_1(x-a_h \mid \omega, \omega_2)}{\Theta_1(x-b_h \mid \omega, \omega_2)}.$$

Formons, avec les fonctions Θ, une fonction $F_1(x)$ satisfaisant aux relations:

---

*) $\Theta_1(x \mid \omega, \omega')$ est la fonction $\Theta_1(x)$ formée avec les périodes ω, ω'. (Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques p. 114.) L'on a de plus:

$$a_1 = -\frac{i}{\sqrt{q_1}\cdot(q_1)}, \qquad a_2 = -\frac{i}{\sqrt{q_2}\cdot(q_2)},$$

où

$$(q) = \prod_1^{\infty}(1-q^{2n}).$$

$$F_1(x + \omega) = F_1(x),$$

$$F_1(x + \omega_1) = A e^{\frac{\pi i}{\omega}(\Sigma a_h - \Sigma b_h) + \frac{2m\pi x i}{\omega}} . F_1(x).$$

La fonction

$$(30) \qquad F(x) = F_1(x) \prod_h \frac{N(x - a_h)}{N(x - b_h)}$$

est la fonction cherchée satisfaisant aux équations (19) dans lesquelles $\varphi(x)$ a la valeur (29).

La fonction ainsi obtenue $F(x)$ (30) satisfait, en outre, à une relation de la forme

$$F(x + \omega_2) = \chi(x)\, F(x)$$

où $\chi(x)$ désigne une fonction doublement périodique aux périodes ω et ω_1, ainsi qu'il résulte de la dernière des relations (28').

9. J'arrive enfin au dernier problème, celui de former une fonction uniforme $F(x)$ vérifiant les équations (20) dans lesquelles $\varphi(x)$ désigne une fonction uniforme doublement périodique n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point ∞ et admettant les périodes ω et ω_2.

En décomposant cette fonction en éléments simples par la méthode de M. Hermite, on la met sous la forme

$$(31) \qquad \varphi(x) = C + \sum [A_0 Z(x - a \,|\, \omega, \omega_2) + A_1 Z'(x - a \,|\, \omega, \omega_2) \\ + \cdots + A_s Z^{(s)}(x - a \,|\, \omega, \omega_2)]$$

où

$$Z(x \,|\, \omega, \omega_2) = \frac{d \log \Theta_1(x \,|\, \omega, \omega_2)}{dx}$$

et

$$\sum A_0 = 0.$$

La fonction élémentaire qui sert à former la fonction $F(x)$ est, dans ce cas,

$$(32) \qquad P(x \,|\, \omega, \omega_1, \omega_2) = \frac{d \log N(x \,|\, \omega, \omega_1, \omega_2)}{dx}.$$

Cette fonction $P(x)$ satisfait aux relations:

$$(32') \qquad \begin{cases} P(x + \omega\ ) = P(x), \\ P(x + \omega_1) = P(x) + \frac{\pi i}{\omega} + Z(x \,|\, \omega, \omega_2), \\ P(x + \omega_2) = P(x) + \frac{\pi i}{\omega} + Z(x \,|\, \omega, \omega_1). \end{cases}$$

La fonction cherchée $F(x)$ est alors

$$F(x) = C\psi(x)^{*)} + \sum [A_0 P(x - a) + A_1 P'(x - a) \\ + \cdots + A_s P^{(s)}(x - a)].$$

---

*) Voir les équations (26) pour la définition $\psi(x)$.

Cette fonction $F(x)$ satisfait en outre à une relation de la forme

$$F(x+\omega_2) = \chi(x) + F(x)$$

où $\chi(x)$ désigne une fonction doublement périodique aux périodes ω et ω_1.

10. Dans les deux paragraphes précédents (8) et (9) on peut supposer $\omega_2 = \omega_1$; dans ce cas le problème résolu (§ 8.) donne comme cas particulier un problème que s'est posé M. Picard (Comptes rendus t. 86, p. 657).

Les fonctions $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{2k+1}(z)$ considérées par M. Picard sont des fonctions O de M. Heine et la fonction

$$\Phi(z) = \prod_1^{\infty} \varphi_{2k+1}(z)$$

une fonction $O(x \mid \omega, \omega_1, \omega_1)$.

Mais il est à remarquer que, dans ce cas particulier considéré par M. Picard, les fonctions cherchées peuvent s'obtenir par la dérivation de fonctions Θ et de fonctions doublement périodiques par rapport aux périodes.

En effet, si, dans la formule (28), on suppose $\omega_2 = \omega_1$ et si l'on y remplace x par $x + \omega_1$, cette formule donne

$$N(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1) = \frac{O(-x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)}{\Theta(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)};$$

d'où l'on déduit d'après (32)

$$P(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1) = \frac{d\log O(-x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)}{dx} - \frac{d\log O(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)}{dx}.$$

Or, d'après la formule (17) du (§ 3.):

$$\frac{d\log O(-x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)}{dx} = -\frac{d\log O(-x \mid \omega, \omega_1)}{d\omega_1},$$

$$\frac{d\log O(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)}{dx} = \frac{d\log O(x \mid \omega, \omega_1)}{d\omega_1};$$

donc

$$P(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1) = -\frac{d\log O(x \mid \omega, \omega_1)\, O(-x \mid \omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

et par conséquent, en vertu de la relation (§ 8.)

$$O(x \mid \omega, \omega_1)\, O(-x \mid \omega, \omega_1) = a_1 \left(e^{\frac{\pi x i}{\omega}} - e^{-\frac{\pi x i}{\omega}}\right) \Theta_1(x \mid \omega, \omega_1),$$

$$(33) \qquad P(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1) = -\frac{d\log a_1}{d\omega_1} - \frac{d\log \Theta_1(x \mid \omega, \omega_1)}{d\omega_1}.$$

Ainsi $P(x+\omega_1 \mid \omega, \omega_1, \omega_1)$ s'exprime à l'aide de la dérivée de la fonction $\Theta_1(x \mid \omega, \omega_1)$ par rapport à ω_1. On conclut de l'équation (33) la suivante

$$N(x+\omega_1\,|\,\omega,\omega_1,\omega_1)=Ce^{-x\frac{d\log a_1}{d\omega_1}-\int\limits_{x_0}^{x+\omega_1}\frac{d\log\Theta_1(x\,|\,\omega,\omega_1)}{d\omega_1}dx}.$$

Il est aisé de vérifier directement que la fonction

$$Q(x+\omega_1)=-\frac{d\log\Theta_1(x\,|\,\omega,\omega_1)}{d\omega_1} \tag{34}$$

vérifie les relations (32') où $\omega_2=\omega_1$. On a en effet

$$\log\Theta_1(x+\omega_1)=\log\Theta_1(x)-\frac{2\pi x i}{\omega}-\log(-q_1)$$

d'où en dérivant par rapport à ω_1 et tenant compte de la notation (34) et de l'équation $\frac{d\log\Theta_1(x)}{dx}=Z(x)$:

$$-Q(x+2\omega_1)+Z(x+\omega_1)=-Q(x+\omega_1)-\frac{\pi i}{\omega};$$

d'où enfin en changeant $x+\omega_1$ en x

$$Q(x+\omega_1)-Q(x)=\frac{\pi i}{\omega}+Z(x);$$

ce qui est bien la seconde des relations (32'); quant à la relation

$$Q(x+\omega)=Q(x)$$

elle est évidente.

11. *Remarque.* Les résultats contenus dans le paragraphe précédent peuvent de la façon suivante être étendus à des fonctions de deux variables.

Soit

$$\Theta(x,y)=\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}c^{mx+ny+\frac{1}{2}(m^2\alpha+2mn\gamma+n^2\beta)};$$

cette fonction, comme l'on sait, vérifie les équations

$$\Theta(x+2\pi i,y)=\Theta(x,y);\quad\Theta(x,y+2\pi i)=\Theta(x,y),$$

$$\Theta(x+\alpha,y+\gamma)=e^{-x-\frac{\alpha}{2}}\Theta(x,y); \tag{35}$$

$$\Theta(x+\gamma,y+\beta)=e^{-y-\frac{\beta}{2}}\Theta(x,y).$$

Posons en outre

$$Q_\alpha(x+\alpha,y+\gamma)=-\frac{\partial\log\Theta(x,y)}{\partial\alpha},\ Q\ (x+\gamma,y+\beta)=-\frac{\partial\log\Theta(x,y)}{\partial\beta},$$

$$Z_x(x,y)=\frac{\partial\log\Theta(x,y)}{\partial x},\qquad Z_y(x,y)=\frac{\partial\log\Theta(x,y)}{\partial y};$$

on déduit des relations (35) les suivants en prenant les logarithmes et dérivant par rapport à α ou β:

$$(36)\quad \begin{cases} Q_\alpha(x+2\pi i, y) = Q_\alpha(x, y), \quad Q_\alpha(x, y+2\pi i) = Q_\alpha(x, y), \\ Q_\alpha(x+\alpha, y+\gamma) - Q_\alpha(x, y) = \frac{1}{2} + Z_x(x, y), \\ Q_\alpha(x+\gamma, y+\beta) = Q_\alpha(x, y). \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} Q_\beta(x+2\pi i, y) = Q_\beta(x, y); \quad Q_\beta(x, y+2\pi i) = Q_\beta(x, y), \\ Q_\beta(x+\alpha, y+\gamma) = Q_\beta(x, y), \\ Q_\beta(x+\gamma, y+\beta) - Q_\beta(x, y) = \frac{1}{2} + Z_y(x, y). \end{cases}$$

Si alors on a une fonction de deux variables x, y à quatre paires de périodes conjuguées de *la forme particulière*

$$\Psi(x, y) = C + \sum \left[A_0 Z_x(x+a, y+b) + A_1 \frac{dZ_x(x+a, y+b)}{dx} + \cdots \right.$$
$$\left. + A_s \frac{d^s Z_x(x+a, y+b)}{dx^s} \right]$$

où

$$\sum A_0 = 0,$$

la fonction

$$F(x,y) = -CZ_x(x,y)$$
$$+ \sum \left[A_0 Q_\alpha(x+a, y+b) + A_1 \frac{dQ_\alpha(x+a, y+b)}{dx} + \cdots \right.$$
$$\left. + A_s \frac{d^s Q_\alpha(x+a, y+b)}{dx^s} \right]$$

vérifie les équations:

$$(38)\quad \begin{cases} F(x+2\pi i, y) = F(x, y); \quad F(x, y+2\pi i) = F(x, y), \\ F(x+\alpha, y+\gamma) = F(x, y) + \Psi(x, y), \\ F(x+\gamma, y+\beta) = F(x, y). \end{cases}$$

Mais je laisse de coté ces considérations pour revenir aux fonctions d'une variable, et j'arrive à une autre application des fonctions

$$O(x \mid \omega, \omega_1).$$

12. On sait qu'à l'aide de la fonction $\Gamma(x)$ l'on peut exprimer la limite de tout produit convergent simplement infini dont le terme général est une fonction rationnelle du rang n; et qu'à l'aide des dérivées logarithmiques de $\Gamma(x)$ on peut exprimer la somme de toute série convergente simplement infinie dont le terme général est une fonction rationnelle du rang n.

Je vais montrer que l'on peut de même, à l'aide de la fonction $O(x \mid \omega, \omega_1)$ et de ses dérivées logarithmiques, exprimer la limite d'un produit convergent simplement infini ou d'une série convergente simplement infinie dont le terme général est une fonction rationnelle de $e^{\frac{2n\pi\omega_1 i}{\omega}}$ c'est à dire de q_1^{2n}, n désignant le rang du terme général.

En effet, soit d'abord $\varphi(u)$ une fonction rationnelle de u, et considérons un produit convergent de la forme

$$P = \prod_{n=0}^{n=\infty} \varphi(q_1^{2n}).$$

La fonction rationnelle $\varphi(u)$ peut se mettre sous la forme

$$\varphi(u) = A u^k \prod \frac{1 - au}{1 - bu},$$

k désignant un entier positif ou négatif, a et b des constantes différentes de 0. Soient:

$$a = e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}}, \quad b = e^{\frac{2\pi\beta i}{\omega}}, \ldots,$$

le produit P prend la forme

$$P = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[A q_1^{2nk} \prod \frac{1 - e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}} q_1^{2n}}{1 - e^{\frac{2\pi\beta i}{\omega}} q_1^{2n}} \right].$$

Comme le produit P est supposé convergent, on a

$$A = 1, \quad k = 0;$$

et par suite

$$P = \prod \frac{O(\alpha \mid \omega, \omega_1)}{O(\beta \mid \omega, \omega_1)}.$$

C'est ainsi que l'on peut exprimer à l'aide de la fonction $O(x \mid \omega, \omega_1)$ un grand nombre de produits convergents qui figurent dans la théorie des fonctions elliptiques.

13. Supposons maintenant que l'on aît une série convergente

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi(q_1^{2n}),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction rationnelle de u. Faisons $q_1^{2n} = \frac{1}{z}$, et décomposons la fonction rationnelle $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ en fractions simples

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = h + \sum \lambda_r z^r + \sum \left[\frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{A_s}{(z - a)^s} \right]$$

r désignant un entier positif ou négatif et a une constante différente de zéro. On conclut de là en remplaçant z par $\frac{1}{q_1^{2n}}$ et faisant

$$a = e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}}, \ldots:$$

$$\varphi(q_1^{2n}) = h + \sum \lambda_r q_1^{-2nr}$$
$$+ \sum \left[A_1 \frac{q_1^{2n}}{1 - e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}} q_1^{2n}} + A_2 \frac{q_1^{4n}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}} q_1^{2n}\right)^2} + \cdots \right.$$
$$\left. + A_s \frac{q_1^{2sn}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}} q_1^{2n}\right)^s} \right].$$

Comme la série S est convergente, la limite du terme général $\varphi(q_1^{2n})$ doit être zéro pour n infini; comme q_1^{2n} tend vers zéro, on voit que dans $\Sigma\lambda_r q_1^{-2nr}$ il ne peut y avoir que des exposants r négatifs et que h doit être nul. Les termes qui figurent dans $\Sigma\lambda_r q_1^{-2nr}$ forment, dans la série S, des progressions géométriques faciles à sommer; désignons par S_1 la somme de toutes ces progressions géométriques. Il ne reste plus alors, pour sommer la série, qu'à trouver l'expression de sommes telles que

$$(39) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q_1^{2kn}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}} q_1^{2n}\right)^k}.$$

Or, en se reportant à l'expression (25) de la fonction $\Phi_k(x)$ définie précédemment, on voit que la série (39) n'est autre que

$$- e^{-\frac{2k\pi\alpha i}{\omega}} \Phi_k(\alpha)$$

ou bien

$$- \frac{1}{a^k} \Phi_k(\alpha).$$

La somme cherchée S est donc

$$(40) \qquad S = S_1 - \sum \left[\frac{A_1}{a} \Phi_1(\alpha) + \frac{A_2}{a^2} \Phi_2(\alpha) + \cdots + \frac{A_s}{a^s} \Phi_s(\alpha) \right].$$

Klingenthal, au mois d'Aout 1881.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades.

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

In dem ersten Bande der mathematischen Annalen stellt Königsberger für die Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung einige Relationen zwischen den für die Nullwerthe der Argumente genommenen ϑ-Functionen auf. Er bemerkt am Schlusse, dass die aufgestellten Gleichungen die wahren Modulargleichungen nicht seien. Um diese zu finden, müssen in erster Linie Gleichungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln aufgestellt werden. Unter solchen Umständen dürfte eine Methode vielleicht nicht ohne Interesse sein, vermöge deren es möglich ist eine Reihe solcher Modulargleichungen mit leichter Mühe herzustellen. Allerdings wählen wir als Moduln nicht die von Rosenhain oder Richelot eingeführten, sondern legen unseren Betrachtungen vier Thetafunctionen zu Grunde, zwischen denen eine Göpel'sche biquadratische Relation besteht. Die hieraus entspringenden Moduln haben vor den früheren mehrfache Vorzüge voraus, wie Borchardt im 88. Bande der Comptes rendus bemerkt. Die Methode besteht wesentlich in einer Anwendung der Transformation zweiter Ordnung auf die Königsberger'schen Ausgangsgleichungen.

Nennen wir $\vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma \vartheta_\delta$ irgend vier beliebige Thetafunctionen der definirten Art für die Nullwerthe der Argumente, $0_\alpha 0_\beta 0_\gamma 0_\delta$ die entsprechenden transformirten Thetafunctionen, so genügt es für die Herleitung der Modulargleichungen Gleichungen zwischen den genannten acht Grössen abzuleiten. Die Theorie der linearen Transformation giebt dann eine Methode an die Hand, um aus ihnen Gleichungen zwischen beliebigen acht Thetafunctionen der definirten Art abzuleiten. Es mag hierauf bei dieser Gelegenheit nicht näher eingegangen werden, es möge die Bemerkung genügen, dass gerade bei den Modulargleichungen sich eine ungemein wichtige Anwendung der linearen

Transformation zeigt. (Siehe des Verfassers Arbeit über die lineare Transformation, Mathemat. Annalen, Band XVII.)

Wir wählen die Functionen ϑ_5, ϑ_{23}, ϑ_4, ϑ_{01}, O_5, O_{23}, O_4, O_{01}.

§ 1.

Königsberger geht von folgenden Gleichungen aus:

$$\begin{array}{ll}
\vartheta_{34}O_{34}+\vartheta_{03}O_{03}+\vartheta_{23}O_{23}=\vartheta_5O_5; & \vartheta_2O_2+\vartheta_4\,O_4+\vartheta_0\,O_0\,=\vartheta_5O_5; \\
\vartheta_4\,O_4\pm\vartheta_{14}O_{14}+\vartheta_{34}O_{34}=\vartheta_5O_5; & \vartheta_0O_0+\vartheta_{03}O_{03}+\vartheta_{01}O_{01}=\vartheta_5O_5; \\
\vartheta_{01}O_{01}\pm\vartheta_{14}O_{14}+\vartheta_{12}O_{12}=\vartheta_5O_5; & \vartheta_2O_2+\vartheta_{12}O_{12}+\vartheta_{23}O_{23}=\vartheta_5O_5.
\end{array}$$

Diese Gleichungen haben sämmtlich die Form:

$$x_1+x_2+x_3=x_4.$$

Mit Hülfe leichter Operationen findet man dann, dass alle Werthe, die dieser Gleichung Genüge leisten, zu gleicher Zeit die Gleichung befriedigen:

$$\begin{gathered}
[(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_2x_4)]^2 \\
-64x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2x_4{}^2=0.
\end{gathered}$$

Die Gleichung kann in mannigfache andere Formen gebracht werden. Eine derselben ist:

$$\begin{gathered}
[(x_1{}^2+x_2{}^2-x_3{}^2-x_4{}^2)^2+4x_1{}^2x_2{}^2-4x_3{}^2x_4{}^2)]^2 \\
-16x_1{}^2x_2{}^2(x_1{}^2+x_2{}^2-x_3{}^2-x_4{}^2)^2=0,
\end{gathered}$$

oder wenn wir $x_\alpha{}^2=\xi_\alpha$ setzen:

$$\begin{gathered}
[(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2+4\xi_1\xi_2-4\xi_3\xi_4]^2 \\
-16\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

In dieser Gleichung ist dann:

$$\xi_\alpha=\vartheta_s{}^2O_s{}^2,$$

und zwar entsprechen den Werthen von $\alpha:1,2,3,4$ vier Werthe ϑ_sO_s, die in einer linearen Gleichung zusammen vorkommen. Ein Blick auf diese Gleichungen lehrt, dass, wenn zwischen $x_1x_2x_3x_4$ eine lineare Beziehung besteht, immer zwei andere Grössen x_5x_6 bestimmt werden können, derart, dass zwischen $x_1x_2x_5x_6$ auch eine lineare Relation besteht.

Dann ist:

$$[(\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6)^2+4\xi_1\xi_2-4\xi_5\xi_6]^2-16\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6)^2=0.$$

Verbinden wir diese Gleichung mit Gleichung (1), so ergiebt sich:

$$\begin{gathered}
[(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2+4\xi_1\xi_2-4\xi_3\xi_4]\,[\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6] \\
=\pm[(\xi_1+\xi_2-\xi_5-\xi_6)^2+4\xi_1\xi_2-4\xi_5\xi_6]\,[\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4].
\end{gathered}$$

Solcher Gleichungen giebt es im Ganzen 15.

Dieselben lassen sich durch lineare Transformation alle aus einer ableiten. Wir gewinnen die 15 Fälle, indem wir an Stelle der Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Reihe nach setzen:

5, 23, 34, 03, 2, 12; 5, 12, 01, 14, 2, 23;
5, 03, 23, 34, 0, 01; 5, 01, 14, 12, 0, 03;
5, 34, 03, 23, 4, 14; 5, 2, 4, 0, 12, 23;
5, 14, 34, 4, 01, 12; 5, 0, 2, 4, 03, 01;
5, 4, 34, 14, 2, 0; 23, 14, 03, 4, 2, 01;
23, 4, 03, 14, 0, 12;
23, 01, 2, 14, 0, 34;
23, 0, 01, 34, 4, 12;
03, 12, 2, 34, 0, 14;
03, 2, 12, 34, 4, 01.

Fraglich bleibt das Vorzeichen. Um über dasselbe eine Bestimmung zu treffen, beschränken wir uns auf die Repräsentanten, für welche aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. wird $3\tau_{11}$, $3\tau_{12}$, $3\tau_{22}$.

Setzen wir $x = e^{\pi i \tau_{11}}$, $y = e^{\pi i \tau_{12}}$, $z = e^{\pi i \tau_{22}}$, so gelten bekanntlich für die Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente die Entwickelungen:

$$\vartheta_5 = 1+2x+2z+2x^4+2z^4+2x^9+2z^9+2xz(y^2+y^{-2}) \\ +2x^4z(y^4+y^{-4})+2xz^4(y^4+y^{-4})+\cdots,$$

$$\vartheta_{34} = 1+2x-2z+2x^4+2z^4+2x^9-2z^9-2xz(y^2+y^{-2}) \\ -2x^4z(y^4+y^{-4})+2xz^4(y^4+y^{-4})+\cdots,$$

$$\vartheta_{12} = 1-2x+2z+2x^4+2z^4-2x^9+2z^9-2xz(y^2+y^{-2}) \\ +2x^4z(y^4+y^{-4})-2xz^4(y^4+y^{-4})+\cdots,$$

$$\vartheta_0 = 1-2x-2z+2x^4+2z^4-2x^9-2z^9+2xz(y^2+y^{-2}) \\ -2x^4z(y^4+y^{-4})-2xz^4(y^4+y^{-4})+\cdots,$$

$$\vartheta_{01} = 2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+2x^{\frac{1}{4}}z(y+y^{-1})+2x^{\frac{9}{4}}z(y^3+y^{-3})+\cdots,$$

$$\vartheta_2 = 2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}z(y+y^{-1})-2x^{\frac{9}{4}}z(y^3+y^{-3})+\cdots,$$

$$\vartheta_4 = 2z^{\frac{1}{4}}+2z^{\frac{9}{4}}+2z^{\frac{25}{4}}+2z^{\frac{1}{4}}x(y+y^{-1})+2z^{\frac{9}{4}}x(y^3+y^{-3})+\cdots,$$

$$\vartheta_{03} = 2z^{\frac{1}{4}}+2z^{\frac{9}{4}}+2z^{\frac{25}{4}}-2z^{\frac{1}{4}}x(y+y^{-1})+2z^{\frac{9}{4}}x(y^3+y^{-3})+\cdots,$$

$$\vartheta_{23} = 2x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)+2x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{9}{4}}\left(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}}\right) \\ +2x^{\frac{9}{4}}z^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}}\right)+\cdots,$$

$$-\vartheta_{14} = 2x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right) - 2x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{9}{4}}\left(y^{\frac{3}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$-2x^{\frac{9}{4}} z^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{3}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}\right) + \cdots .$$

Setzen wir diese Reihenentwickelungen ein, so zeigt es sich, dass stets das positive Zeichen zu nehmen ist.

Somit erhalten die Gleichungen die Gestalt:

$$[(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2 + 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_3\xi_4]\,[\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6]$$
$$= [(\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6)^2 + 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_5\xi_6]\,[\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4],$$

oder:

$$(2) \qquad (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_5 + \xi_6 - \xi_3 - \xi_4) + (\xi_3 - \xi_4)^2 (\xi_1 + \xi_2 - \xi_5 - \xi_6)$$
$$+ (\xi_5 - \xi_6)^2 (\xi_3 + \xi_4 - \xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Die weitere Aufgabe besteht in einer Transformation der Gleichungen (1) und (2).

§ 2.

Wir setzen in den Gleichungen (1) und (2) an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. $\frac{\tau_{11}}{2}$, $\frac{\tau_{12}}{2}$, $\frac{\tau_{22}}{2}$ also an Stelle von $3\tau_{11}$, $3\tau_{12}$, $3\tau_{22}$ resp. $3\cdot\frac{\tau_{11}}{2}$, $3\cdot\frac{\tau_{12}}{2}$, $3\cdot\frac{\tau_{22}}{2}$, oder was dasselbe sagt: $\frac{3\tau_{11}}{2}$, $\frac{3\tau_{12}}{2}$, $\frac{3\tau_{22}}{2}$. Dann wird:

$$\vartheta_5{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = \vartheta_5{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 + \vartheta_1{}^2 + \vartheta_{01}{}^2.$$

$$\vartheta_0{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = \vartheta_5{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 - \vartheta_4{}^2 - \vartheta_{01}{}^2.$$

$$\vartheta_{12}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = \vartheta_5{}^2 - \vartheta_{23}{}^2 + \vartheta_4{}^2 - \vartheta_{01}{}^2.$$

$$\vartheta_{31}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = \vartheta_5{}^2 - \vartheta_{23}{}^2 - \vartheta_4{}^2 + \vartheta_{01}{}^2.$$

$$\vartheta_{11}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_{23} - \vartheta_{01}\vartheta_4);$$

$$\vartheta_{23}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_{23} + \vartheta_{01}\vartheta_4).$$

$$\vartheta_{03}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_4 - \vartheta_{23}\vartheta_{01});$$

$$\vartheta_4{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_4 + \vartheta_{23}\vartheta_{01}).$$

$$\vartheta_2{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_{01} - \vartheta_4\vartheta_{23});$$

$$\vartheta_{01}{}^2\left(0, 0, \frac{\tau_{11}}{2}, \frac{\tau_{12}}{2}, \frac{\tau_{22}}{2}\right) = 2(\vartheta_5\vartheta_{01} + \vartheta_4\vartheta_{23}).$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die transformirten Thetafunctionen. Es sind diese Relationen zuerst von **Göpel** aufgedeckt worden.

Die hier gebrauchten Formeln sind einer Arbeit von **Rohn** im XV. Bande der Annalen entnommen.

Werden diese Werthe in die Gleichungen (1) und (2) eingesetzt, so erhalten wir eine Reihe von Modulargleichungen achten und sechsten Grades. Es sollen dieselben nicht sämmtlich aufgestellt werden. Wir begnügen uns damit, drei Gleichungen achten und drei Gleichungen sechsten Grades anzugeben.

Um die Form derselben zu einer möglichst übersichtlichen zu machen, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$a = \vartheta_5{}^2 O_5{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 O_{23}{}^2 + \vartheta_{01}{}^2 O_{01}{}^2 + \vartheta_4{}^2 O_4{}^2;$$
$$b = \vartheta_5{}^2 O_{23}{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 O_5{}^2 + \vartheta_{01}{}^2 O_4{}^2 + \vartheta_4{}^2 O_{01}{}^2;$$
$$b_1 = \vartheta_5{}^2 O_4{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 O_{01}{}^2 + \vartheta_{01}{}^2 O_{23}{}^2 + \vartheta_4{}^2 O_5{}^2;$$
$$b_2 = \vartheta_5{}^2 O_{01}{}^2 + \vartheta_{23}{}^2 O_4{}^2 + \vartheta_{01}{}^2 O_5{}^2 + \vartheta_4{}^2 O_{23}{}^2;$$

$$c = 2(\vartheta_5 \vartheta_{23} O_5 O_{23} + \vartheta_{01} \vartheta_4 O_{01} O_4); \quad d = 2(\vartheta_5 \vartheta_{23} O_{01} O_4 + \vartheta_{01} \vartheta_4 O_5 O_{23});$$
$$c_1 = 2(\vartheta_5 \vartheta_4 O_5 O_4 + \vartheta_{23} \vartheta_{01} O_{23} O_{01}); \quad d_1 = 2(\vartheta_5 \vartheta_4 O_{23} O_{01} + \vartheta_{23} \vartheta_{01} O_5 O_4);$$
$$c_2 = 2(\vartheta_5 \vartheta_{01} O_5 O_{01} + \vartheta_4 \vartheta_{23} O_4 O_{23}); \quad d_2 = 2(\vartheta_5 \vartheta_{01} O_4 O_{23} + \vartheta_4 \vartheta_{23} O_5 O_{01}).$$

Dann lauten drei Modulargleichungen achten Grades:

$$(d_1{}^2 + d_2{}^2 - 2c_1 c_2)^2 - 4(c_1{}^2 - d_1{}^2)(c_2{}^2 - d_2{}^2) = 0; \tag{3}$$
$$(d_2{}^2 + d^2 - 2c_2 c)^2 - 4(c_2{}^2 - d_2{}^2)(c^2 - d^2) = 0; \tag{4}$$
$$(d^2 + d_1{}^2 - 2cc_1)^2 - 4(c^2 - d^2)(c_1{}^2 - d_1{}^2) = 0. \tag{5}$$

Ferner drei Gleichungen sechsten Grades:

$$d^2(c_2 - c_1) + d_1{}^2(c - c_2) + d_2{}^2(c_1 - c) = 0; \tag{6}$$
$$bd(c_2 - c_1) + b_1 d_1(c - c_2) + b_2 d_2(c_1 - c) = 0; \tag{7}$$
$$(b^2 - c^2)(c_2 - c_1) + (b_1{}^2 - c_1{}^2)(c - c_2) + (b_2{}^2 - c_2{}^2)(c_1 - c) = 0. \tag{8}$$

Gleichung (3) ergiebt sich unmittelbar aus Gleichung (1), wenn man

$$\xi_1 = \vartheta_{03}{}^2 O_{03}{}^2, \quad \xi_2 = \vartheta_4{}^2 O_4{}^2, \quad \xi_3 = \vartheta_2{}^2 O_2{}^2, \quad \xi_4 = \vartheta_{01}{}^2 O_{01}{}^2,$$

setzt.

Analog ergeben sich die Gleichungen (4) und (5), die aus Gleichung (3) auch durch lineare Transformation erhalten werden können.

Gleichung (6) ergiebt sich aus Gleichung (2), indem man

$$\xi_1 = \vartheta_{23}{}^2 O_{23}{}^2, \quad \xi_2 = \vartheta_{14}{}^2 O_{14}{}^2, \quad \xi_3 = \vartheta_{03}{}^2 O_{03}{}^2,$$
$$\xi_4 = \vartheta_4{}^2 O_4{}^2, \quad \xi_5 = \vartheta_2{}^2 O_2{}^2, \quad \xi_6 = \vartheta_{01}{}^2 O_{01}{}^2$$

setzt.

Die beiden andern Gleichungen ergeben sich durch einfache Verbindungen einiger Gleichungen sechsten Grades.

Weitere Transformationen behält der Verfasser sich vor.

§ 3.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen sind zunächst nur für die Repräsentanten abgeleitet, für welche aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} resp. wird $3\tau_{11}$, $3\tau_{12}$, $3\tau_{22}$. Es soll nun bewiesen werden, dass ihnen auch die übrigen Repräsentanten Genüge leisten.

Wir wählen als Repräsentanten der 40 nicht äquivalenten Classen folgende Systeme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & 3 & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Es sind dieses dieselben Systeme, von denen Königsberger im 67. Bande des Crelle'schen Journals Gebrauch macht.

Die Thetafunctionen ϑ_5, ϑ_{23}, ϑ_{01}, ϑ_4 bleiben ungeändert, wenn man auf die Moduln eine lineare Transformation anwendet:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

bei welcher $a_0 \equiv b_1 \equiv c_2 \equiv d_3 \equiv 1 \bmod. 8$ ist, während die anderen Zahlen durch acht theilbar sind.

Die von uns gebrauchten Grössen 0_5, 0_{23}, 0_4, 0_{01} entsprechen der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Es wäre nun bewiesen, dass sämmtliche 40 repräsentirende Systeme 0_5, 0_{23}, 0_{01}, 0_4 Wurzeln unserer Gleichung sind, wenn die Zahlen $a_0, a_1 \cdots d_3$ so bestimmt werden können, dass:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

ist, wenn die erste Determinante rechts zu einem beliebigen Repräsentanten gehört, während die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1 \cdots \delta_3$ Zahlen einer linearen Transformation sind, für welche:

$$\frac{\mathfrak{q}(\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m})+\mathfrak{p}(\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n})+(\mu q+p\nu)-(\mathfrak{m}_1\mathfrak{q}_1+\mathfrak{p}_1\mathfrak{n}_1)}{2}-\frac{\omega}{4}\equiv 0 \text{ mod. } 2$$

und

$$\mathfrak{m}\equiv\mu \text{ mod. } 2, \quad \mathfrak{n}\equiv\nu \text{ mod. } 2, \quad \mathfrak{p}\equiv p \text{ mod. } 2, \quad \mathfrak{q}\equiv q \text{ mod. } 2$$

ist, vorausgesetzt, dass unter den Zahlen μ, ν, p, q der Reihe nach verstanden werden:

$$0, 0, 0, 0; \quad 1, 1, 0, 0; \quad 1, 0, 0, 0; \quad 0, 1, 0, 0.$$

(Siehe des Verfassers Arbeit über lineare Transformation, Bd. XVII dieser Annalen.)

Die Richtigkeit der Behauptung zeigt eine einfache Rechnung. Es lässt sich dieser Satz ohne Schwierigkeit für beliebige unpaare primzahlige Transformationsgrade und für beliebige Göpel'sche Moduln verallgemeinern. Er bildet ein Analogon zu dem Irreductibilitätssatze bei den Modulargleichungen der elliptischen Functionen.

Es lassen sich überhaupt unter Annahme der eingeführten Moduln unschwer die meisten Sätze über die gewöhnlichen Modulargleichungen der elliptischen Functionen auf die hyperelliptischen übertragen. Es dürfte sich daher empfehlen, einer ersten Theorie jener Gleichungen die genannten Moduln zu Grunde zu legen.

Rostock, den 7. August 1881.

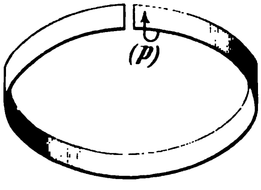
Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie.

Von

Oskar Simony in Wien.

(Mit 8 lithograph. Tafeln.)

Biegt man die beiden Enden eines rechteckigen Papierstreifens nach dem Muster der nebenstehenden schematischen Figur gegen einander und verdreht dessen rechtseitiges Ende um irgend ein ganzes Vielfaches von 180^0 : $r \times 180^0$, so liefert die Vereinigung beider Enden stets einen ringförmig geschlossenen Streifen, dessen Gesammttorsion *positiv* oder *negativ* genannt werden mag, je nachdem die erwähnte Verdrehung im Sinne des Pfeiles (p) oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist. Die Ausführung eines die Mittellinie des Streifens *vollständig* durchlaufenden Schnittes liefert dann wieder *einen* beziehungsweise *zwei* ringförmig geschlossene Streifen, für welche die nachstehenden einfachen Gesetze gelten.*)



1) Ist r eine *ungerade* Zahl, also gleich $\pm (2a + 1)$, so erhält man einen einzigen ringförmig geschlossenen Streifen mit einem längs desselben verschiebbaren Knoten, welcher für $r = + (2a + 1)$ als *positiver Knoten* a^{ter} *Art* (Taf. II., Fig. 9), für $r = - (2a + 1)$ als *negativer Knoten* a^{ter} *Art* (Taf. II., Fig. 10) auftritt. Die Gesammtverdrehung des neu erzeugten Streifens ist stets gleichsinnig mit jener des ursprünglichen, ihr absoluter Betrag jedoch auf $4(a + 1) \times 180^0$ gestiegen.

2) Ist r eine *gerade* Zahl, also gleich $\pm 2a$, so liefert der erwähnte Längsschnitt immer zwei ringförmig geschlossene Streifen,

---

*) S. h. die dritte Auflage meiner Brochure: *Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen" und verwandter merkwürdiger Probleme* (Wien, Gerold & Co., 1881). — Man findet daselbst auch jene Erscheinungen besprochen, welche *unverdrehte*, biegsame Ringe bei längs ihren Mittellinien in sich selbst zurückkehrenden Längsschnitten zeigen.

welche für $r = +2a$ mit einander in einer *positiven Verbindung* a^{ter} *Art* (Taf. II., Fig. 7), für $r = -2a$ in einer *negativen Verbindung* a^{ter} *Art* (Taf. II., Fig. 8) stehen und dieselbe Gesammtverdrehung wie der ursprüngliche Streifen besitzen.

Dies vorausgeschickt ziehen wir zunächst jene Gebilde in Betracht, welche aus einer ebenen, vollkommen biegsamen Fläche von der Gestalt der Fig. 1 (Taf. I.) entstehen, indem man das Ende (B) nach einer oder mehreren Drehungen um je 180° mit dem unverdrehten Ende (A), ferner das gleichfalls um ein ganzes Vielfaches von 180° verdrehte Ende (C) mit dem unverdrehten Ende (D) vereinigt und durch die so erhaltene *geschlossene Fläche erster Classe* den in sich selbst zurücklaufenden Schnitt: *aodcoba* führt.

Die durch diesen Schnitt erzeugten neuen Flächen zerfallen hinsichtlich *ihres Flächeninhaltes* in folgende vier Gruppen:

(α) Solche geschlossene Flächen (F_1), welche sich aus einem einzigen Viertel der ursprünglichen Fläche (Taf. I., Fig. 3) herstellen lassen.

(β) Solche geschlossene Flächen (F_2), welche man aus zwei nach dem Muster der Fig. 4 (Taf. I.) mit einander vereinigten Vierteln der ursprünglichen Fläche erzeugen kann.

(γ) Solche geschlossene Flächen (F_3), welche aus drei nach dem Muster der Fig. 5 (Taf. I.) mit einander verbundenen Vierteln der ursprünglichen Fläche herstellbar sind.

(δ) Solche geschlossene Flächen (F_4), welche, abgesehen von etwaigen Knoten, Verschlingungen und Torsionen einer ebenen Fläche von der Gestalt der Fig. 6 (Taf. I.) entsprechen.

Die jeweiligen Gesammtverdrehungen von F_1, F_2, F_3, F_4 sind ihrem Sinne und ihrer Grösse nach natürlich von jenen Drehungen abhängig, welche die Enden (B) und (C) der ursprünglichen Fläche vor ihrer Vereinigung mit den Enden (A) und (D) erhielten. Hierbei nennen wir speciell jede Drehung des Endes (B) um irgend ein ganzes Vielfaches von 180° : $a_1 \times 180^0$ *positiv* oder *negativ*, je nachdem dieselbe im Sinne des Pfeiles p_1 (Taf. I., Fig. 2) oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist, und ertheilen analog bei einer Verdrehung des Endes (C) um $a_2 \times 180^0$ dem Factor a_2 das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die betreffende Verdrehung im Sinne des Pfeiles p_2 oder im entgegengesetzten Sinne stattgefunden hat. Unter diesen Annahmen lassen sich dann die jeweiligen Gesammtverdrehungen:

$$T_1 = x_1 \times 180^0, \quad T_2 = x_2 \times 180^0, \quad T_3 = x_3 \times 180^0, \quad T_4 = x_4 \times 180^0$$

der Flächen:

$$F_1, \qquad F_2, \qquad F_3, \qquad F_4$$

ihrem Sinne und ihrer Grösse nach auf dieselbe Art wie die jeweilige Gesammttorsion eines ringförmig geschlossenen Streifens ermitteln und sind vollständig bestimmt, sobald die Zeichen und die numerischen Werthe der Torsionscoefficienten x_1, x_2, x_3, x_4 angegeben werden.

Auf Grundlage der hier eingeführten Nomenclatur ergiebt sich jetzt für die *aus einer geschlossenen Fläche erster Classe* durch den erwähnten Schnitt erzeugbaren Gebilde das nachstehende Schema, welches auch nach einer Vertauschung von a_1 mit a_2 gültig bleibt *und daher alle von der Null verschiedenen Specialisirungen der Torsionscoefficienten* a_1, a_2 *umfasst:*

$$\text{(I)} \cdots a_1 = \pm 1.$$

$$(1) \cdots a_2 = \pm (2k + 1).$$

(α) $\cdots a_1 = +1$, $a_2 = +(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit einem positiven Knoten k^{ter} Art. $x_4 = 4(k + 2)$.

(β) $\cdots a_1 = +1$, $a_2 = -(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit einem negativen Knoten k^{ter} Art. $x_4 = -4k$.

(γ) $\cdots a_1 = -1$, $a_2 = +(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit einem positiven Knoten k^{ter} Art. $x_4 = 4k$.

(δ) $\cdots a_1 = -1$, $a_2 = -(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit einem negativen Knoten k^{ter} Art. $x_4 = -4(k + 2)$.

$$(2) \cdots a_2 = \pm 2k.$$

(α) $\cdots a_1 = +1$, $a_2 = +2k$: Eine Fläche F_3 in einer positiven Verbindung k^{ter} Art mit eine Fläche F_1. $x_3 = 2(k+2)$, $x_1 = 2k$.

(β) $\cdots a_1 = +1$, $a_2 = -2k$: Eine Fläche F_3 in einer negativen Verbindung k^{ter} Art mit einer Fläche F_1. $x_3 = -2(k - 2)$, $x_1 = -2k$.

(γ) $\cdots a_1 = -1$, $a_2 = +2k$: Eine Fläche F_3 in einer positiven Verbindung k^{ter} Art mit einer Fläche F_1. $x_3 = 2(k-2)$, $x_1 = 2k$.

(δ) $\cdots a_1 = -1$, $a_2 = -2k$: Eine Fläche F_3 in einer negativen Verbindung k^{ter} Art mit einer Fläche F_1. $x_3 = -2(k + 2)$, $x_1 = -2k$.

$$\text{(II)} \cdots a_1 \gtrless \pm 1.$$

$$(1) \cdots a_1 = \pm (2h + 1),\ a_2 = \pm (2k + 1).$$

(α) $\cdots a_1 = +(2h + 1)$, $a_2 = +(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit zwei Knoten, nämlich einem positiven Knoten h^{ter} Art und einem positiven Knoten k^{ter} Art. $x_4 = 4(k + h + 2)$.

(β) $\cdots a_1 = +(2h + 1)$, $a_2 = -(2k + 1)$: Eine Fläche F_4 mit zwei Knoten, nämlich einem positiven Knoten h^{ter} Art und einem negativen Knoten k^{ter} Art. $x_4 = -4(k - h)$.

(γ) $\cdots$ $a_1 = -(2h+1)$, $a_2 = +(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit zwei Knoten, nämlich einem negativen Knoten h^{ter} Art und einem positiven Knoten k^{ter} Art. $x_4 = 4(k-h)$.

(δ) $\cdots$ $a_1 = -(2h+1)$, $a_2 = -(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit zwei Knoten, nämlich einem negativen Knoten h^{ter} Art und einem negativen Knoten k^{ter} Art. $x_4 = -4(k+h+2)$.

$$(2) \cdots a_1 = \pm 2h, \quad a_2 = \pm (2k+1):$$

(α) $\cdots$ $a_1 = +2h$, $a_2 = +(2k+1)$: Eine Fläche F_3 mit einem positiven Knoten k^{ter} Art, welche mit einer Fläche F_1 in einer positiven Verbindung h^{ter} Art steht. $x_3 = 2(2k+h+2)$, $x_1 = 2h$.

(β) $\cdots$ $a_1 = +2h$, $a_2 = -(2k+1)$: Eine Fläche F_3 mit einem negativen Knoten k^{ter} Art, welche mit einer Fläche F_1 in einer positiven Verbindung h^{ter} Art steht. $x_3 = -2(2k-h+2)$, $x_1 = 2h$.

(γ) $\cdots$ $a_1 = -2h$, $a_2 = +(2k+1)$: Eine Fläche F_3 mit einem positiven Knoten k^{ter} Art, welche mit einer Fläche F_1 in einer negativen Verbindung h^{ter} Art steht. $x_3 = 2(2k-h+2)$, $x_1 = -2h$.

(δ) $\cdots$ $a_1 = -2h$, $a_2 = -(2k+1)$: Eine Fläche F_3 mit einem negativen Knoten k^{ter} Art, welche mit einer Fläche F_1 in einer negativen Verbindung h^{ter} Art steht. $x_3 = -2(2k+h+2)$, $x_1 = -2h$.

$$(3) \cdots a_1 = \pm 2h, \quad a_2 = \pm 2k.$$

(α) $\cdots$ $a_1 = +2h$, $a_2 = +2k$: Eine Fläche F_2 mit dem Torsionscoefficienten: $2(k+h)$ und zwei von einander isolirte Flächen F_1. Die erste derselben steht mit F_2 in einer positiven Verbindung h^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $2h$, die zweite Fläche F_1 steht mit F_2 in einer positiven Verbindung k^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $2k$.

(β) $\cdots$ $a_1 = +2h$, $a_2 = -2k$: Eine Fläche F_2 mit dem Torsionscoefficienten: $-2(k-h)$ und zwei von einander isolirte Flächen F_1. Die erste derselben steht mit F_2 in einer positiven Verbindung h^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $2h$, die zweite Fläche F_1 steht mit F_2 in einer negativen Verbindung k^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $-2k$.

(γ) $\cdots$ $a_1 = -2h$, $a_2 = +2k$: Eine Fläche F_2 mit dem Torsionscoefficienten: $2(k-h)$ und zwei von einander isolirte Flächen F_1. Die erste derselben steht mit F_2 in einer negativen Verbindung h^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $-2h$, die zweite Fläche F_1 steht mit F_2 in einer positiven Verbindung k^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $2k$.

(δ) $\cdots$ $a_1 = -2h$, $a_2 = -2k$: Eine Fläche F_2 mit dem Torsionscoefficienten: $-2(k+h)$ und zwei von einander isolirte Flächen F_1. Die erste derselben steht mit F_2 in einer negativen Verbindung h^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $-2h$, die zweite Fläche F_1 steht mit F_2 in einer negativen Verbindung k^{ter} Art und besitzt den Torsionscoefficienten: $-2k$.

Wir wenden uns nunmehr zur Beschreibung jener Gebilde, welche aus einer ebenen, vollkommen biegsamen Fläche von der Gestalt der Fig. 1 entstehen, wenn man das Ende (B) nach einer oder mehreren Drehungen um je 180° mit dem unverdrehten Ende (D), ferner das gleichfalls um irgend ein ganzes Vielfaches von 180° verdrehte Ende (A) mit dem unverdrehten Ende (C) vereinigt und durch die auf diese Art hergestellte *geschlossene Fläche zweiter Classe* den in sich selbst zurückkehrenden Schnitt: $aobdoca$ führt. Hierbei ist gemäss unseren früheren Feststellungen jede Drehung des Endes (B) um irgend ein ganzes Vielfaches von $180^0 : b_1 \times 180^0$ als *positiv* oder *negativ* zu bezeichnen, je nachdem sie von (C) gegen (A) hin oder von (A) gegen (C) hin stattgefunden hat, und muss analog jede Torsion des Endes (A) um ein beliebiges ganzes Vielfaches von $180^0 : b_2 \times 180^0$ als *positiv* oder *negativ* in Rechnung gezogen werden, je nachdem dieses Ende von (B) gegen (D) hin oder von (D) gegen (B) hin gedreht worden ist.

Die Erfüllung der Forderung, die in Betracht kommenden Gebilde *möglichst einfach* zu beschreiben, bedingt hier die Einführung folgender Hülfsbegriffe:

(1) Lässt sich eine geschlossene Fläche auf einer zweiten, gleichfalls geschlossenen Fläche nach dem Muster von einer der vier schematischen Figuren: 20, 21, 22, 23 (Taf. III.) aufhängen, so besteht *eine Doppelverbindung beider Flächen.*

(2) Enthält eine geschlossene Fläche einen Knoten erster oder höherer Art, welcher nach dem Muster von einer der vier schematischen Figuren: 24, 25, 26, 27 (Taf. IV.) mit einer Verbindung erster oder höherer Art combinirt ist, so besitzt die Fläche nach unserer Ausdrucksweise *eine Verknüpfung.*

(3) Tritt eine geschlossene Fläche nach dem Muster von einer der vier schematischen Figuren: 28, 29, 30, 31 (Taf. V.) *zweimal* in je eine Verbindung erster oder höherer Art mit sich selbst, so besitzt diese Fläche *eine Verschlingung.*

(4) Tritt eine geschlossene Fläche nach dem Muster von einer der vier schematischen Figuren: 32, 33, 34, 35 (Taf. VI.) in eine *Doppelverbindung* mit sich selbst, so entsteht nach unserer Bezeichnungsweise *ein Doppelknoten.*

Hierbei kann jede Doppelverbindung, Verknüpfung etc. in vier Typen: [(+) (+)], [(+) (—)], [(—) (+)], [(—) (—)] auftreten, und zwar sind speciell:

die Figuren 20, 24, 28, 32 von dem Typus: $[(+)_a\,(+)_b]$,
„ „ 21, 25, 29, 33 „ „ „ : $[(+)_a\,(-)_b]$,
„ „ 22, 26, 30, 34 „ „ „ : $[(-)_a\,(+)_b]$,
„ „ 23, 27, 31, 35 „ „ „ : $[(-)_a\,(-)_b]$.

Um jedoch diese Hülfsbegriffe *ohne scheinbare Widersprüche* verwerthen zu können, bedarf man der Kenntniss folgender Thatsachen, welche sich sowohl graphisch als auch experimentell leicht verificiren lassen:

1. Die Doppelverbindungen von den Typen: $[(+)_a\,(+)_b]$ und $[(+)_b\,(+)_a]$ sind stets in einander transformirbar. Dasselbe gilt für die Doppelverbindungen von den Typen: $[(-)_a\,(-)_b]$ und $[(-)_b\,(-)_a]$. Ist b speciell gleich Null, so reduciren sich die beiden erstgenannten Doppelverbindungen auf die *positive* Verbindung a^{ter} Art, die beiden letztgenannten Doppelverbindungen auf die *negative* Verbindung a^{ter} Art.

2. Die Doppelverbindung von dem Typus: $[(+)_a\,(-)_b]$ kann stets in jene von dem Typus: $[(-)_{b-1}(+)_{a+1}]$ verwandelt werden. Ebenso lässt sich die Doppelverbindung von dem Typus $[(-)_a(+)_b]$ in jene von dem Typus: $[(+)_{b-1}\,(-)_{a+1}]$ umformen. Für $b = 1$ entsprechen demnach die beiden erstgenannten Doppelverbindungen einer *positiven* Verbindung $(a + 1)^{\text{ter}}$ Art, die beiden letztgenannten Doppelverbindungen einer *negativen* Verbindung $(a + 1)^{\text{ter}}$ Art.

3. Die vier Haupttypen der möglichen Verknüpfungen einer geschlossenen Fläche reduciren sich für $b = 0$ insgesammt auf Knoten nullter oder höherer Art und zwar die Verknüpfungen von dem Typus: $[(+)_a\,(+)_b]$ resp. $[(+)_a\,(-)_b]$ auf die *positiven* Knoten $(a - 1)^{\text{ter}}$ resp. a^{ter} Art, hingegen die Verknüpfungen von dem Typus: $[(-)_a\,(+)_b]$ resp. $[(-)_a\,(-)_b]$ auf die *negativen* Knoten a^{ter} resp. $(a - 1)^{\text{ter}}$ Art. Alle übrigen Verknüpfungen sind *keiner weiteren Reduction* fähig und auch mit Ausnahme der beiden auf Taf. II. (Fig. 11, 12) abgebildeten Verknüpfungen, welche zwei einfache Umformungen der Verschlingung von dem Typus $[(-)_1\,(+)_1]$ (Taf. II., Fig. 13) vorstellen, nicht in einander transformirbar.

4. Die beiden Verschlingungen von den Typen: $[(+)_a\,(+)_b]$ und $[(+)_b\,(+)_a]$ sind einander äquivalent, desgleichen jene von den Typen: $[(-)_a\,(-)_b]$ und $[(-)_b\,(-)_a]$. Ist b speciell gleich 1, so reduciren sich die beiden erstgenannten Verschlingungen auf die *Verknüpfung* von dem Typus: $[(-)_1\,(+)_{a-1}]$, die beiden letztgenannten Verschlingungen auf die *Verknüpfung* von dem Typus: $[(+)_1\,(-)_{a-1}]$.

5. Ebenso sind die beiden Verschlingungen von den Typen: $[(+)_a\,(-)_b]$ und $[(-)_b\,(+)_a]$, folglich auch jene von den Typen: $[(-)_a\,(+)_b]$ und $[(+)_b\,(-)_a]$ einander äquivalent. — Ist b speciell gleich 1, so reduciren sich die beiden erstgenannten Verschlingungen

auf die *Verknüpfung* von dem Typus: $[(+)_1(+)_a]$, die beiden letztgenannten Verschlingungen auf die *Verknüpfung* von dem Typus: $[(-)_1(-)_a]$.

6. Die Verschlingung von dem Typus: $[(+)_a(+)_b]$ kann stets in einen Doppelknoten von dem Typus: $[(+)_{a-1}(+)_{b-1}]$ umgestaltet werden. Analog lässt sich die Verschlingung von dem Typus: $[(-)_a(-)_b]$ in einen Doppelknoten von dem Typus: $[(-)_{a-1}(-)_{b-1}]$ umformen. In Hinblick auf den *vierten* Satz sind demnach auch einerseits die Doppelknoten von den Typen: $[(+)_a(+)_b]$ und $[(+)_b(+)_a]$, andererseits jene von den Typen: $[(-)_a(-)_b]$ und $[(-)_b(-)_a]$ in einander transformirbar.

7. Die Verschlingung von dem Typus: $[(+)_a(-)_b]$ lässt sich allgemein in einen Doppelknoten von dem Typus: $[(+)_{a-1}(-)_b]$ umgestalten. Analog kann die Verschlingung von dem Typus: $[(-)_a(+)_b]$ in einen Doppelknoten von dem Typus: $[(-)_{a-1}(+)_b]$ umgeformt werden. In Hinblick auf den *fünften* Satz sind demnach auch einerseits die Doppelknoten von den Typen: $[(+)_a(-)_b]$ und $[(-)_{b-1}(+)_{a+1}]$, andererseits jene von den Typen: $[(-)_a(+)_b]$ und $[(+)_{b-1}(-)_{a+1}]$ in einander transformirbar.

Endlich muss bei der *descriptiven* Verwerthung der hier eingeführten Hülfsbegriffe noch der Thatsache Rechnung getragen werden, dass die früher definirten Verknüpfungen und Verschlingungen resp. Doppelknoten *je nach der Art ihrer Auflösung verschiedene* Torsionszahlen liefern, also *experimentell* im Allgemeinen nur die *ausserhalb* der betreffenden Verknüpfung resp. Verschlingung auftretenden Torsionen um je 180°, welche in ihrer Gesammtheit die jeweilige *äussere Verdrehung:* $V = \xi \times 180^0$ der untersuchten Fläche bestimmen, *eindeutig* festgestellt werden können. — Zur Erläuterung des Gesagten mögen folgende specielle Ergebnisse dienen:

Ein mit der Verknüpfung von dem Typus: $[(+)_1(+)_1]$ versehenes, ringförmig geschlossenes Band, in welchem sich ausserhalb der Verknüpfung *keine* Torsion vorfindet, erhält eine solche von -4×180^0 resp. $+4 \times 180^0$, je nachdem man dasselbe nach dem Muster von Fig. 14 (Taf. II.) oder nach jenem von Fig. 15 in ein *unverknüpftes* Band verwandelt. Transformirt man jedoch die Verknüpfung früher in eine solche von dem Typus: $[(-)_1(-)_1]$, *wobei der ausserhalb derselben gelegene Theil des Bandes unverdreht bleibt*, so zeigt das Band eine Gesammtverdrehung von $+4 \times 180^0$ resp. -4×180^0, je nachdem dessen Umwandlung in ein *unverknüpftes* Band nach dem Muster von Fig. 17 oder nach jenem von Fig. 18 vorgenommen worden ist. — Beseitigt man endlich die Verknüpfung von dem Typus: $[(+)_1(+)_1]$ nach dem Muster von Fig. 16 und analog jene von dem Typus: $[(-)_1(-)_1]$ nach dem Muster von Fig. 19, so entsteht jedesmal ein *unverdrehtes* Band, d. h. man könnte zufolge *dieser sechs* Experimente den beiden Verknüpfungen jede der drei Torsionszahlen: $+4$, 0, -4 zuschreiben, obgleich, wie sich durch zwei weitere Versuche darthun lässt, nur *die mittlere die richtige* ist.

Construirt man sich nämlich zwei geschlossene Flächen *zweiter Classe*, von welchen die erste die Torsionscoefficienten: $b_1 = +2$, $b_2 = +3$, die zweite die Torsionscoefficienten: $b_1 = -2$, $b_2 = -3$ besitzt, und führt durch jede Fläche einen die beiden ursprünglichen Streifen halbirenden Schnitt, so liefert die *erste* Fläche eine geschlossene Fläche mit der Verknüpfung vom Typus: $[(+)_1\,(+)_1]$ und der äusseren Verdrehung: $V = +8 \times 180^0$, die *zweite* eine geschlossene Fläche mit der Verknüpfung vom Typus: $[(-)_1\,(-)_1]$ und der äusseren Verdrehung: $V = -8 \times 180^0$, mithin besteht, da die *Gesammtverdrehungen* der neu erzeugten Flächen offenbar *numerisch* gleich, aber ihren Zeichen nach *entgegengesetzt* sein müssen, für die, *beiden Verknüpfungen gemeinsame* Torsionszahl x die Gleichung: $8+x = -(-8+x) = 8-x$, woraus direct $x = 0$ folgt.

Dies vorausgeschickt ergiebt sich nunmehr für die *aus einer geschlossenen Fläche zweiter Classe* durch den Schnitt: *aobdoca* entstehenden Gebilde folgendes Schema, welches auch nach einer Vertauschung von b_1 mit b_2 giltig bleibt:

$$(\mathrm{I}) \cdots b_1 = \pm 1.$$

$$(1) \cdots b_2 = \pm(2k+1).$$

$(\alpha) \cdots b_1 = +1$, $b_2 = +(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer positiven Verbindung k^{ter} Art, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $2k$, die andere den Torsionscoefficienten: $2(k+2)$ besitzt.

$(\beta) \cdots b_1 = +1$, $b_2 = -(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer negativen Verbindung $(k+1)^{\text{ter}}$ Art, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $-2(k+1)$, die andere den Torsionscoefficienten: $-2(k-1)$ besitzt.

$(\gamma) \cdots b_1 = -1$, $b_2 = +(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer positiven Verbindung $(k+1)^{\text{ter}}$ Art, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $2(k-1)$, die andere den Torsionscoefficienten: $2(k+1)$ besitzt.

$(\delta) \cdots b_1 = -1$, $b_2 = -(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer negativen Verbindung k^{ter} Art, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $-2(k+2)$, die andere den Torsionscoefficienten: $-2k$ besitzt.

$$(2) \cdots b_2 = \pm 2k.$$

$(\alpha) \cdots b_1 = +1$, $b_2 = +2k$: Eine Fläche F_4 mit einem positiven Knoten $(k-1)^{\text{ter}}$ Art. $x_4 = 4(k+1)$.

$(\beta) \cdots b_1 = +1$, $b_2 = -2k$: Eine Fläche F_4 mit einem negativen Knoten k^{ter} Art. $x_4 = -4k$.

$(\gamma) \cdots b_1 = -1$, $b_2 = +2k$: Eine Fläche F_4 mit einem positiven Knoten k^{ter} Art. $x_4 = 4k$.

$(\delta) \cdots b_1 = -1$, $b_2 = -2k$: Eine Fläche F_4 mit einem negativen Knoten $(k-1)^{\text{ter}}$ Art. $x_4 = -4(k+1)$.

$$(\text{II}) \cdots b_1 \gtrless \pm 1.$$

$$(1) \cdots b_1 = \pm(2h+1),\ b_2 = \pm(2k+1).$$

$(\alpha) \cdots b_1 = +(2h+1)$, $b_2 = +(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer Doppelverbindung von dem Typus: $[(+)_h (+)_k]$ resp. $[(+)_k (+)_h]$, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $2(k+h)$, die andere den Torsionscoefficienten: $2(k+h+2)$ besitzt.

$(\beta) \cdots b_1 = +(2h+1)$, $b_2 = -(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer Doppelverbindung von dem Typus: $[(+)_h (-)_{k+1}]$ resp. $[(-)_k (+)_{h+1}]$, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $-2(k-h+1)$, die andere den Torsionscoefficienten: $-2(k-h-1)$ besitzt.

$(\gamma) \cdots b_1 = -(2h+1)$, $b_2 = +(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer Doppelverbindung von dem Typus: $[(-)_h (+)_{k+1}]$ resp. $[(+)_k (-)_{h+1}]$, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $2(k-h-1)$, die andere den Torsionscoefficienten: $2(k-h+1)$ besitzt.

$(\delta) \cdots b_1 = -(2h+1)$, $b_2 = -(2k+1)$: Zwei Flächen F_2 in einer Doppelverbindung von dem Typus: $[(-)_h (-)_k]$ resp. $[(-)_k (-)_h]$, von welchen die eine den Torsionscoefficienten: $-2(k+h+2)$, die andere den Torsionscoefficienten: $-2(k+h)$ besitzt.

$$(2) \cdots b_1 = \pm 2h,\ b_2 = \pm(2k+1).$$

$(\alpha) \cdots b_1 = +2h$, $b_2 = +(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit einer Verknüpfung von dem Typus: $[(+)_h (+)_k]$. $\mathfrak{x} = 2(k+h+2)$.

$(\beta) \cdots b_1 = +2h$, $b_2 = -(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit einer Verknüpfung von dem Typus: $[(+)_h (-)_k]$. $\mathfrak{x} = -2(k-h+1)$.

$(\gamma) \cdots b_1 = -2h$, $b_2 = +(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit einer Verknüpfung von dem Typus: $[(-)_h (+)_k]$. $\mathfrak{x} = 2(k-h+1)$.

$(\delta) \cdots b_1 = -2h$, $b_2 = -(2k+1)$: Eine Fläche F_4 mit einer Verknüpfung von dem Typus: $[(-)_h (-)_k]$. $\mathfrak{x} = -2(k+h+2)$.

$$(3) \cdots b_1 = \pm 2h,\ b_2 = \pm 2k.$$

$(\alpha) \cdots b_1 = +2h$, $b_2 = +2k$: Eine Fläche F_4 mit einer Verschlingung von dem Typus: $[(+)_h (+)_k]$ resp. $[(+)_k (+)_h]$. $\mathfrak{x} = 2(k+h+2)$.

$(\beta) \cdots b_1 = +2h$, $b_2 = -2k$: Eine Fläche F_4 mit einer Verschlingung von dem Typus: $[(+)_h (-)_k]$ resp. $[(-)_k (+)_h]$. $\mathfrak{x} = -2(k-h)$.

$(\gamma) \cdots b_1 = -2h,\ b_2 = +2k$: Eine Fläche F'_3 mit einer Verschlingung von dem Typus: $[(-)_h(+)_k]$ resp. $[(+)_k(-)_h]$. $\xi = 2(k-h)$.

$(\delta) \cdots b_1 = -2h,\ b_2 = -2k$: Eine Fläche F'_4 mit einer Verschlingung von dem Typus: $[(-)_h(-)_k]$ resp. $[(-)_k(-)_h]$. $\xi = -2(k+h+2)$.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die zur Aufstellung dieses Schema's*) eingeführten Begriffe: Doppelverbindung, Doppelknoten etc. *selbst wieder nur Specialisirungen von vier allgemeinen Gattungsbegriffen***) *bilden*, zu deren Aufstellung man durch die Untersuchung jener Gebilde gelangt, welche aus geschlossenen Flächen *mit mehr als vier bandförmigen Fortsätzen* durch gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen.

Diese Gattungsbegriffe sind folgende:

1. Die aus k einfachen Verbindungen a_1^{ter}, $a_2^{\text{ter}} \cdots a_k^{\text{ter}}$ Art zusammengesetzte *k-fache Verbindung zweier Flächen mit einander*, welche die 2^k Typen:

$$[(+)_{a_1}(+)_{a_2}(+)_{a_3}\cdots(+)_{a_{k-1}}(+)_{a_k}],$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$[(-)_{a_1}(-)_{a_2}(-)_{a_3}\cdots(-)_{a_{k-1}}(-)_{a_k}]$$

umfasst, und hinsichtlich ihres *allgemeinen Habitus* durch das in Fig. 36 (Taf. VII) abgebildete Linienschema bestimmt erscheint.

2. Die aus $k+1$ einfachen Verbindungen a_1^{ter}, $a_2^{\text{ter}}, \cdots, a_{k+1}^{\text{te}}$ Art aufgebaute *Verknüpfung k^{ter} Ordnung* einer Fläche mit sich selbst, welche die 2^{k+1} Typen:

$$[(+)_{a_1}(+)_{a_2}(+)_{a_3}\cdots(+)_{a_k}(+)_{a_{k+1}}],$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$[(-)_{a_1}(-)_{a_2}(-)_{a_3}\cdots(-)_{a_k}(-)_{a_{k+1}}]$$

in sich begreift und bezüglich ihres *allgemeinen Habitus*, je nachdem k eine *ungerade* oder eine *gerade* Zahl ist, durch das in Fig. 37 oder 38 dargestellte Linienschema charakterisirt wird.

3. Die aus $2k$ einfachen Verbindungen a_1^{ter}, $a_2^{\text{ter}}, \cdots, a_{2k}^{\text{ter}}$ Art gebildete *Verschlingung k^{ter} Ordnung* einer Fläche mit sich selbst, .welche die 4^k Typen:

---

*) Die aus demselben unmittelbar hervorgehenden *allgemeinen* Sätze finden sich in der Arbeit des Verfassers: „Ueber jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen." (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 84. Bd., II. Abth. pag. 237—257.)

**) Die diesen Gattungsbegriffen zu Grunde liegenden Elementargebilde *Positive* und *negative* Verbindung a^{ter} Art resp. *positiver* und *negativer* Knoten a^{ter} Art sind zuerst von J. B. Listing (s. dessen 1848 im Verlage bei Vandenhoeck und Ruprecht als Separatabdruck aus den Göttinger Studien erschienene Abhandlung: „Vorstudien zur Topologie", pag. 49, 50) systematisch entwickelt worden.

$$[(+)_{a_1}(+)_{a_2}(+)_{a_3}\cdots(+)_{a_{2k-1}}(+)_{a_{2k}}],$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$[(-)_{a_1}(-)_{a_2}(-)_{a_3}\cdots(-)_{a_{2k-1}}(-)_{a_{2k}}]$$

besitzt und bezüglich ihres *allgemeinen Habitus* durch das in Fig. 39 (Taf. VIII.) abgebildete Linienschema wiedergegeben wird.

4. Der aus $2k$ einfachen Verbindungen a_1^{ter}, a_2^{ter}, $\cdots$, a_{2k}^{ter} Art zusammengesetzte *2k-fache Knoten**), dessen 4^k Typen hinsichtlich ihrer *analytischen* Bezeichnungsweise mit jenen der Verschlingung k^{ter} Ordnung identisch sind, und dessen *allgemeiner Habitus* dem in Fig. 40 dargestellten Linienschema entspricht.

Wien, im August 1881.

---

*) Die Thatsache, dass ein vielfacher Knoten von dem Habitus der schematischen Fig. 40 nur durch Combination einer *geraden* Anzahl einfacher Verbindungen erhalten werden kann, bedarf in Hinblick auf die schematische Fig. 41 keines weiteren Commentares.

Ueber das Gyroskop.

Von

W. Hess in München.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Das Problem der Bewegung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt ist durch die analytischen Untersuchungen **Jacobi's***) und die bekannten Arbeiten **Poinsot's****) im Grossen und Ganzen als erledigt anzusehen, so dass die Verbindung beider Anschauungsweisen, welche ich in meiner Doctordissertation***) behandelt habe, keine wesentlich neuen Resultate liefern konnte. Die Bewegung eines Körpers um einen beliebigen Punkt ist bisher nur für den Fall des Gyroskops d. h. eines schweren Umdrehungskörpers um einen festen Punkt seiner Figuraxe durch die Arbeiten von **Lottner**†) und **Somoff**††), welche sie auf elliptische Functionen reducirten, und neuerdings von **Frenzel**†††) in mehr symmetrischer Weise untersucht worden. Eine synthetische Behandlungsweise, durch welche **Poinsot** die Bewegung eines Körpers um seinen Schwerpunkt der Anschauung so nahe gerückt hat, ist meines Wissens bisher dem Problem des Gyroskops nicht zu Theil geworden. Ich habe daher — angeregt durch Herrn Prof. Dr. **Brill** — an der Hand der Rechnung die Erscheinungen genauer discutirt und, indem ich mich auf den praktisch allein massgebenden Fall beschränkte, dass auf das Gyroskop ein seitlicher Anstoss nicht wirkt, einerseits die Form des Kegels, welchen die Figuraxe während der Bewegung beschreibt, andererseits die Gestalt der beiden Kegel, durch deren Abrollen nach Poinsot die Bewegung um einen festen Punkt der Anschauung zugänglich gemacht werden kann, untersucht. Ich fand dabei eine grössere Mannigfaltigkeit der auftretenden Fälle als beim Problem der Rotation um den Schwerpunkt und kam etwa zu Folgendem:

---

*) Sur la rotation d'un corps. **Jacobi's** mathem. Werke, Bd. II, pp. 139—196.

) Théorie nouvelle de la rotation des corps. **Liouv. Journ., Jahrg. 1851, pp. 9—130, 289—337.

***) Das Rollen einer Fläche II. Grades auf einer invariablen Ebene. München 1880.

†) Reduction der Bewegung etc. **Crelle's** Journ., Bd. 50, pp. 111—125.

††) Solution rigoureuse du problème de la rotation etc. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, Jahrg. 1855, pp. 112—135.

†††) Neue Lösung eines Rotationsproblems. **Schlömilch**, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 26. Jahrgang, 104—126.

1. Die Figuraxe des Gyroskops beschreibt im Raume um die Richtung der Schwere einen Kegel (§§ 2., 3.), der stets zwischen 2 Kreiskegeln eingeschlossen bleibt, deren einen er berührt, während er sich auf den andern mit Rückkehrkanten aufsetzt. Der letztere ist nur bedingt durch die Anfangsneigung der Figuraxe gegen die Verticale, der andere durch 2 Constante (obgleich in das Problem deren 5 wesentlich eingehen), von denen es abhängt, ob der Schwerpunkt des Gyroskops oberhalb des Unterstützungspunktes bleiben kann oder nicht. Die Bahn des Schwerpunktes ist eine sphärische Curve, deren Horizontalprojection, wenn der Schwerpunkt des Gyroskops unterhalb des Unterstützungspunktes liegt, stets die Form einer Hypocykloide, wenn er oberhalb liegt, die einer Epi- oder Hypocykloide besitzt.

2. Jede Drehung eines Körpers um einen festen Punkt wird bekanntlich versinnlicht durch das Abrollen eines beweglichen Kegels auf einem festen, in der Weise, dass die beiden Kegel den fixen Punkt als Spitze und in jedem Augenblicke eine Erzeugende gemein haben; die letztere ist die instantane Axe der Drehung. Bewegt sich der Körper um seinen Schwerpunkt, so ist nach Poinsot der rollende Kegel vom 2. Grad, der feste dagegen transcendent; als Basis derselben können die Curven betrachtet werden, welche dadurch entstehen, dass man von dem festen Punkt aus auf jeder Drehungsaxe die Grösse der Winkelgeschwindigkeit aufträgt, wodurch man den „instantanen Pol der Drehung“ erhält. Die Folge derselben für den rollenden Kegel hat den Namen „Polhodie“, für den festen „Herpolhodie“ erhalten. Für den Fall des Gyroskops nun ist der rollende Kegel (§ 4.) im Allgemeinen transcendent und ganz von einem Kreiskegel um die Figuraxe eingeschlossen; die Polhodie ist eben und besteht aus unendlich vielen congruenten Zweigen, welche die Form eines Blattes besitzen. Der feste Kegel (§ 5.) ist ebenfalls transcendent und von 2 ihn berührenden Kreiskegeln um die Axe der Schwere eingeschlossen, deren einer wieder durch die Anfangsneigung der Figuraxe gegen die Verticale bestimmt ist, während der andere von 3 Constanten abhängt. Die Herpolhodie ist eine Curve doppelter Krümmung.

3. Im § 6. finden sich Specialfälle und einige numerische Beispiele, die zur Zeichnung der Figuren Anlass gegeben haben.

Die discutirten Formeln entnahm ich dabei nicht den Arbeiten Lottner's, die zu diesem Zwecke nicht ausreichend genug waren, sondern leitete dieselbe unter Einführung der Schwungkräfte und Zugrundelegung der einfachen, dem Ideenkreise Poinsot's entsprungenen Sätze der Mechanik auf directem Wege ab.

§ 1.

Fixirung des Problems und Aufstellung der Gleichungen der Bewegung.

Auf einen starren Rotationskörper vom Gewichte P wirke um seine Umdrehungsaxe (Figuraxe) ein Drehmoment Cn, so dreht sich, wenn auf der Figuraxe im Abstande γ vom Schwerpunkt ein fester Punkt O sich befindet, der Körper um den letzteren. Eine Ebene durch O, senkrecht zu der Axe der Figur gelegt, werde Aequator genannt, das Trägheitsmoment um eine Axe der Figur, welche Haupt-(trägheits)axe ist, C, jenes um eine der unendlichen vielen Hauptaxen des Aequators A. Die Fixirung eines Körperpunktes geschieht durch die rechtwinkligen Coordinaten x', y', z' bezüglich dreier Hauptaxen Ox', Oy', Oz', von denen Oz' mit der Axe der Figur zusammenfällt, während Ox' sich in der Ebene des Aequators im Sinne der anfangs erfolgten Rotation um 90° drehen muss, bis es mit Oy' zusammenliegt. Die Coordinaten x', y', z' bleiben während der Bewegung immer dieselben; die 3 Hauptaxen aber drehen sich mit dem Körper und lassen ihre Lagen gegen ein festes Coordinatensystem Ox, Oy, Oz aus den Euler'schen Winkeln φ, ψ, ϑ entnehmen. Dabei wählen wir als positive Axe Oz die Richtung der Schwere und als Ox und Oy zwei auf einander Senkrechte der Horizontalebene durch O, wobei wieder Ox sich im Sinne der anfangs erfolgten Drehung bewege, um mit Oy zu coincidiren. Der Winkel ϑ zwischen der Figuraxe Oz' und der Verticalen Oz bewegt sich nun, wie bekannt, zwischen 0° und 180° und ist spitz, im Falle Oz' unterhalb der Horizontalebene Oxy liegt. Der Winkel ψ zwischen der festen Axe Ox und dem Schnitte ON der Ebene des Aequators $Ox'y'$ mit der Horizontalebene Oxy (d. h. der Knotenlinie des Aequators) wird positiv gezählt von Ox gegen ON, entgegengesetzt der anfänglichen Drehungsrichtung. Der Winkel φ zwischen der Knotenlinie ON und der beweglichen Hauptaxe Ox' des Aequators wird von ON gegen Ox' gezählt, übereinstimmend mit der anfänglichen Drehung, welche als positiv dann

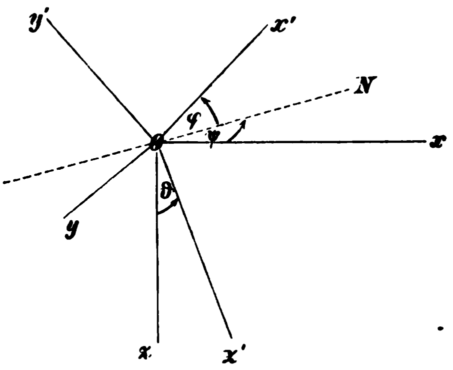


Fig. 1.

verzeichnet werden soll, wenn sie für eine in $+ Oz'$ befindliche, gegen O blickende Person der des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint. Diese Anordnung ist — entgegen den sonst in der Mechanik gebräuchlichen Festsetzungen — getroffen worden, um eine Uebereinstimmung mit den Daten Poissons*) zu erzielen, wonach ON der aufsteigende Knoten ist.

Zur Zeit $t_0 = 0$ seien die Werthe für φ und ψ 0, für ϑ ϑ_0.

Da die Axe des anregenden Kräftepaars Hauptaxe ist, fällt die durch dasselbe erzeugte instantane Drehungsaxe mit ihr zusammen und die für diesen Augenblick gültige Winkelgeschwindigkeit um die Drehaxe wird $= \frac{\text{Drehmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{Cn}{C} = n$. Nun bringen aber die Schwerkräfte ein anfängliches Moment $P\gamma \sin\vartheta_0$ zur Geltung, dessen Axe auf Oz und Oz' zugleich senkrecht steht, also in die Linie ON der Knoten fällt. Diese ist aber Hauptaxe; die durch das Moment $P\gamma\sin\vartheta_0$ hervorgerufene Drehaxe fällt also damit zusammen und die Winkelgeschwindigkeit hat die Grösse $P\gamma \sin\vartheta_0 : A$. Versinnlichen wir sowohl die Winkelgeschwindigkeiten als die Momente durch Strecken, die wir von O aus auf den betreffenden Axen auftragen, so kann als das anfangs wirkende Kräftepaar überhaupt jenes betrachtet werden, das der Richtung und Grösse nach gegeben ist durch die Diagonale des aus Cn und $P\gamma \sin\vartheta_0$ construirten Rechtecks; die durch dasselbe erzeugte instantane Axe der Drehung wird durch die Diagonale des aus n und $P\gamma\sin\vartheta_0 : A$ gebildeten Rechtecks repräsentirt und fällt mit der Kräftepaaraxe nie zusammen, so lange A und C verschieden sind. Da diese Drehungsaxe nicht Hauptaxe ist, so entstehen durch die momentane Drehung um sie Schwungkräfte, welche ein Kräftepaar χ produciren, das im Vereine mit dem von den Schwerkräften herrührenden Paare die Lage und Grösse des anfangs wirkenden Kräftepaares verändern. Natürlich ändert sich damit gleichzeitig auch Lage und Grösse der instantanen Drehungsaxe.

Seien nun die Componenten der zur Zeit t statthabenden Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung längs der 3 Hauptaxen Ox', Oy', Oz' bezw. p, q, r, so sind nach bekanntem Satze die Componenten des die Drehung hervorrufenden Kräftepaares G um dieselben Axen resp. Ap, Aq, Cr. Die Lage von Θ gegen die 3 Hauptaxen sind durch die Neigungscosinus

$$\frac{p}{\Theta},\ \frac{q}{\Theta},\ \frac{r}{\Theta},$$

jene von G gegen dieselben durch

---

*) Traité de mécanique, t. II., Nr. 425 u. ff. der 2. Aufl.

$$\frac{Ap}{G}, \quad \frac{Aq}{G}, \quad \frac{Cr}{G}$$

gegeben, wo

$$\Theta^2 = p^2 + q^2 + r^2, \qquad G^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2.$$

Die Projection $O\Theta'$ der instantanen Drehaxe $O\Theta$ auf den Aequator bildet nun mit der Axe Ox' desselben — gezählt wie φ — einen Winkel σ, für den

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \sigma = \frac{q}{p} = \frac{Aq}{Ap}.$$

D. h.

In jedem Zeitmoment liegt die Axe des wirkenden Kräftepaares und die Axe der durch dasselbe hervorgerufenen Drehung mit der Axe der Figur in derselben Ebene.

Da

$$\Theta \cdot \cos(\Theta O z') = r, \qquad G \cdot \cos(G O z') = Cr,$$

ist

$$\frac{\cos^2(\Theta O z')}{\cos^2(G O z')} = \frac{G^2}{C^2 \Theta^2} = \frac{A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2}{C^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2},$$

woraus ersichtlich:

Es liegt die Axe des momentan wirkenden Paares oder die zugehörige Drehungsaxe näher an der Axe der Figur, je nachdem das Trägheitsmoment um die letztere grösser oder kleiner ist als das um eine der Axen des Aequators.

Ist nun die Grösse des afficirenden Paares G, die der zugehörigen Drehung Θ, so ist die Axe des Paares der während des Zeitelementes dt hervorgerufenen Schwungkräfte zugleich senkrecht auf den Axen G, Θ und seine Grösse*)

$$\chi = G \cdot \Theta \cdot \sin(G O \Theta).$$

Berücksichtigt man ausser den Werthen von G und Θ noch

$$G\Theta \cos(G O \Theta) = Ap \cdot p + Aq \cdot q + Cr \cdot r,$$

so erhält man

$$(2) \qquad \chi = (A - C)\, n \sqrt{p^2 + q^2}.$$

χ ist unabhängig von der Drehungsrichtung um Θ*), es müsste also stets das gleiche Zeichen besitzen, d. h. zunächst $\pm$, je nachdem $A \gtrless C$. χ ist aber nicht unabhängig davon, ob die Axe des Kräftepaares G auf der einen oder andern Seite von Θ liegt*), was mit dem Wechsel des Vorzeichens von $A - C$ eintritt. Die doppelten Zeichen kommen daher in Wegfall und es ist χ in (2) richtig dargestellt.

Es lässt sich nun der Satz aussprechen:

---

*) Poinsot a. a. O. pp. 49 u. 50.

Die Axe des durch die Drehung um die instantane Drehaxe hervorgerufenen Paares der Schwungkräfte ist während des ganzen Verlaufs der Drehung im Aequator gelegen und ihre Grösse der in derselben Ebene gelegenen Componente des anregenden Paares proportional.

Aus dem neu entstandenen Paare χdt der Schwungkräfte, dem längs der Knotenlinie wirkenden Paare $P\gamma \sin\vartheta \cdot dt$ der Schwerkräfte und dem zur Zeit t afficirenden Kräftepaare G setzen sich dessen neue Axe und Grösse nach dem Parallelepiped der Kräftepaare zusammen. Die Axen der 2 ersteren Momente liegen im Aequator, dulden also längs der darauf senkrechten Figuraxe Oz' keine Componente und können die Componente von G längs Oz' somit nicht beeinflussen. D. h.

Das Moment der wirkenden Kräfte und damit die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, geschätzt um die Axe der Figur, bleiben während der ganzen Bewegung constant.

Es ist also $r =$ constans $= n$.

Den vorstehenden Satz kann man auch so formuliren:

Die Bahnen, welche von dem Endpunkt der Axe des Kräftepaars und von jenem der instantanen Drehaxe (dem instantanen Drehpol) im Körper durchlaufen zu werden scheinen, sind ebene Curven, deren Ebenen parallel dem Aequator im Abstande Cn resp. n davon liegen.

Der Einfluss von χdt und $P\gamma \sin\vartheta \cdot dt$ macht sich nach Vorstehendem nur in der Verrückung der Componente des Kräftepaares G im Aequator d. h. in der Verrückung von $G' = A\sqrt{p^2 + q^2}$ geltend. Bezeichnen wir den Endpunkt von OG' in Bezug auf das Coordinatensystem $x'Oy'$ mit ξ, η, so ist also $\xi = Ap$, $\eta = Aq$. Derselbe wird um das Bogenelement ds aus seiner alten Lage gebracht; nach dem Parallelogramm der Kräfte folgt also für die Coordinaten ξ, η

$$d\xi = P\gamma \sin\vartheta \cdot dt \cdot \cos(x'ON) + \chi \cdot dt \cdot \cos(x'O\chi),$$
$$d\eta = P\gamma \sin\vartheta \cdot dt \cdot \cos(y'ON) + \chi \cdot dt \cdot \cos(y'O\chi).$$

Nun bildet die Knotenlinie ON mit der Axe Ox' den Winkel φ, mit Oy' den Winkel $\varphi + 90^0$. χ liegt zu Anfang der Bewegung unterhalb ON, da von hier aus gesehen das Paar der Schwungkräfte eine der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzte hervorzubringen bestrebt ist. Die Projection G' von G wird daher im Anfange sich nach links unten (s. beigeg. Fig.) bewegen, und da sich Ox' nach rechts oben bewegt — früherer Festsetzung zufolge —, so werden wir für den Gang von p und q folgende leicht verständliche Tabelle aufstellen können:

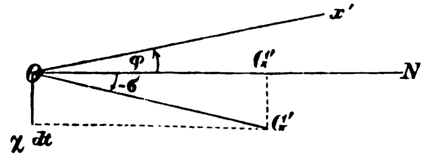


Fig. 2.

$$\begin{array}{cccccccccc} +p_{\text{maximum}} & +p & 0 & -p & -p_{\max} & -p & 0 & +p & +p_{\max} & \cdots \\ 0 & -q & -q_{\max} & -q & 0 & +q & +q_{\max} & +q & 0 & \cdots \end{array}$$

Da χ senkrecht auf G' steht, sind die Coordinaten ξ', η' des Endpunktes von χ proportional, ξ' dem q, η' dem p. Ueber ihre Veränderung giebt nachstehendes Schema Aufschluss:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & -q & -q_{\max} & -q & 0 & +q & +q_{\max} & +q & 0 & \cdots \\ -p_{\max} & -p & 0 & +p & +p_{\max} & +p & 0 & -p & -p_{\max} & \cdots \end{array}$$

Ist also $\xi = Ap$, $\eta = Aq$, so ist ξ', η' gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi' &= \text{Proportionalitätsfactor} \cdot (+q), \\ \eta' &= \quad\text{,,}\quad \cdot (-p). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} &\sphericalangle\, x'ON = \varphi, & &\chi \cos(x'O\chi) = (A - C)\, n(+q), \\ &\sphericalangle\, y'ON = \varphi + 90^0, & &\chi \cos(y'O\chi) = (A - C)\, n(-p) \end{aligned}$$

in die für $d\xi$, $d\eta$ aufgestellten Gleichungen ein, so resultirt

$$(3)\quad \begin{cases} d\xi = A \cdot dp = \quad P\gamma \sin\vartheta \cos\varphi \cdot dt + (A - C)\, nq \cdot dt, \\ d\eta = A \cdot dq = -P\gamma \sin\vartheta \sin\varphi \cdot dt - (A - C)\, np \cdot dt. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden sich in der Folge als sehr wichtig erweisen.

Die Drehung des Systems vollzieht sich zur Zeit t um die instantane Axe der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit Θ; zerlegen wir Θ in die constante Componente n längs der Figuraxe Oz' und in die darauf senkrechte Componente $\Theta' = \sqrt{p^2 + q^2}$ des Aequators, so wird die Figuraxe Oz' ausschliesslich durch Wirkung der letzteren fortbewegt und zwar in 2facher Weise:

1. Die Projection von Θ' auf die Axe ON der Knoten ist, da Θ' mit Ox' den unter (1) erwähnten Winkel σ und Ox' mit ON den Winkel φ bildet,

$$\Theta' \cos(\varphi + \sigma) = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \cos(\varphi + \sigma).$$

Diese Projection steht senkrecht der Ebene zOz', bewegt also Oz' nur in ihr und zwar während des Zeitelementes dt um den Winkel $-d\vartheta$, da sie den Winkel $z'Oz = \vartheta$ zu verkleinern strebt. Da aber

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \cos\sigma = p, \qquad \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sin\sigma = q,$$

folgt aus

$$\Theta' \cos(\varphi + \sigma)\, dt = -\, d\vartheta$$

$$(4)\qquad p \cos\varphi - q \sin\varphi = -\frac{d\vartheta}{dt}.$$

2. Die Projection von Θ' auf eine zur Knotenlinie Senkrechte OQ des Aequators — $(NOQ) = 90^0$ gezählt wie φ — wird durch $\Theta' \cos(\varphi + \sigma - 90^0)$ dargestellt. Diese Projection lässt sich aber auch als die eine Componente

$$\frac{\Theta' \cos(\varphi + \sigma - 90^0)}{\cos(\vartheta + 90^0)} \cdot \cos(\vartheta + 90^0)$$

einer um die Verticalaxe $+ Oz$ wirksamen Drehgrösse

$$\frac{\Theta' \cos(\varphi + \sigma - 90^0)}{\cos(\vartheta + 90^0)}$$

auffassen, deren andere Componente

$$\frac{\Theta' \cos(\varphi + \sigma - 90^0)}{\cos(\vartheta + 90^0)} \cos\vartheta$$

in die Figuraxe Oz' fällt, diese also nicht fortbewegen kann. Da nun durch eine Drehung um die Axe der Schwere Oz die Horizontalprojection der Figuraxe Oz' dieselbe Bewegung annimmt, wie die darauf senkrechte Knotenlinie ON, diese aber in der Zeit dt um einen unendlich kleinen Winkel in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers d. h. der abnehmenden ψ verrückt wird, so wird

$$\frac{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \cos(\varphi + \sigma - 90^0) \cdot dt}{\cos(\vartheta + 90^0)} = - d\psi,$$

oder

$$p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}\,. \tag{5}$$

Betrachten wir noch das Moment der Kräfte um die Axe Oz der Schwere, indem wir G in 3 $\perp$ Componente längs Oz', ON, OQ zerlegen. Die Projection der Componente um ON auf Oz ist 0, da $ON \perp Oz$; die Projection der längs der Figuraxe Oz' wirkenden Componente auf Oz ist

$$Cn \cos\vartheta;$$

die Projection der Componente längs OQ auf Oz ist

$$A\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \cos(\varphi + \sigma - 90^0) \cdot \cos(\vartheta + 90^0) = - A \sin^2\vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt},$$

wie aus (5) hervorgeht. Das Moment aller Kräfte bezüglich Oz ist daher

$$Cn \cos\vartheta - A \sin^2\vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}\,.$$

Verfolgt man andererseits das Moment um die Verticale Oz von Anfang an, so ist die Projection des Paares der Schwerkräfte auf Oz stets 0, und da dasselbe für sich keine weiteren Kräfte hervorruft, so bleibt einzig das Moment $Cn \cos\vartheta_0$ übrig, das während der ganzen Drehung constant bleibt. Es ist also

$$Cn\cos\vartheta - A\sin^2\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} = Cn\cos\vartheta_0,$$

oder

$$\sin^2\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A}. \tag{6}$$

Durch Vergleichung mit (5) entsteht hieraus

$$p\sin\varphi + q\cos\varphi = \frac{Cn(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A\sin\vartheta}. \tag{7}$$

Nun benützen wir unsere Gleichungen (3); wir multipliciren sie mit p bezw. q und addiren sie:

$$A(pdp+qdq) = P\gamma\sin\vartheta(p\cos\varphi - q\sin\varphi)\cdot dt = -P\gamma\sin\vartheta\cdot d\vartheta$$

geht durch Integration über in

$$p^2+q^2 = \frac{2P\gamma(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A}. \tag{8}$$

Weiter erhalten wir aus (3)

$$dp\sin\varphi + dq\cos\varphi = \frac{(A-C)n}{A}(p\sin\varphi - q\cos\varphi)\cdot dt = \frac{(A-C)n\cdot d\vartheta}{A}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (7) aber wird

$$dp\sin\varphi + dq\cos\varphi + d\varphi(p\cos\varphi - q\sin\varphi) = -\frac{Cn(1-\cos\vartheta\cos\vartheta_0)\cdot d\vartheta}{A\sin^2\vartheta},$$

also

$$\frac{(A-C)n\cdot d\vartheta}{A} + d\varphi\cdot -\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{Cn(1-\cos\vartheta\cos\vartheta_0)\cdot d\vartheta}{A\sin^2\vartheta}.$$

Nach leichter Reduction und unter Berücksichtigung von (6) kommt

$$d\varphi = n\cdot dt + \cos\vartheta\cdot d\psi. \tag{9}$$

Die Gleichungen (6) und (9), in Verbindung mit einer Gleichung, die durch Quadriren und Addiren von (4) und (5) gewonnen wird, stellen das System

$$\left\{\begin{aligned} \sin^2\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} &= \frac{Cn(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A}, \\ \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 &= \frac{2P\gamma(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= n + \cos\vartheta\cdot\frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right. \tag{A}$$

der Bewegungsgleichungen dar, indem die Euler'schen Winkel φ, ψ, ϑ darin abhängig sind von t. Sie stimmen mit den von Poisson (a. a. O. Nr. 426, 430) aufgestellten überein.

Wir haben dieselben auf diesem Wege abgeleitet, ohne zu verkennen, dass man am Ende auf andere Weise leichter dazu kommen mag.

§ 2.

Der von der Figuraxe beschriebene Kegel, wenn der Schwerpunkt des Gyroskops unterhalb des Unterstützungspunktes gelegen ist.

Der Winkel ϑ_0 zwischen der $+ z$-Axe und der Anfangsstellung der Figuraxe ist hier spitz, $\cos\vartheta_0$ also positiv. Aus der 2. Gleichung von (A) folgt

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 > 0, \quad \text{d. h.} \quad \vartheta < \vartheta_0,$$

der Schwerpunkt bleibt also fortwährend unterhalb des Unterstützungspunktes und die Figuraxe bildet mit der +-Axe der Schwere den grössten Winkel in der Anfangslage.

Durch Elimination von $\frac{d\psi}{dt}$ aus den 2 ersten Gleichungen des Systems (A) folgt:

$$dt = -\frac{A\sin\vartheta\cdot d\vartheta}{\sqrt{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\,[2AP\gamma\sin^2\vartheta - C^2n^2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)]}}$$

und durch Substitution von

$$\text{(B)} \qquad \cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = \zeta, \qquad \frac{C^2n^2}{4AP\gamma} = \varepsilon,$$

$$dt = -\sqrt{\frac{A}{2P\gamma}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{-\zeta[\zeta^2 + 2\zeta(\varepsilon + \cos\vartheta_0) - \sin^2\vartheta_0]}}.$$

Setzt man den Radicanden 0, so erhält man eine cubische Gleichung, deren Wurzeln*) gegeben sind durch

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= -(\varepsilon + \cos\vartheta_0) + \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}, \\ \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= -(\varepsilon + \cos\vartheta_0) - \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 - \sin^2\vartheta_0}. \end{aligned}$$

Von diesen Wurzeln bewegt sich α_1 zwischen 0 und $1 - \cos\vartheta_0$, α_3 zwischen $-(1 + \cos\vartheta_0)$ und $-\infty$. $\cos\vartheta$ bewegt sich nach den Bemerkungen am Anfange dieses Paragraphen nur zwischen $\cos\vartheta_0$ und 1, also ζ nur zwischen 0 und $1 - \cos\vartheta_0$, d. h. man kann nur positive Werthe von ζ, die innerhalb des Intervalls 0 bis $1 - \cos\vartheta_0$ liegen, brauchen und nur für solche Werthe von ζ ist der Radicand positiv. Die Integrationsgrenzen liegen also zwischen 0 und $1 - \cos\vartheta_0$, d. h. zwischen α_1 und α_2. Diesen entsprechen die daher bei der Normirung des Integrals

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2P\gamma}}\cdot\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{-\zeta(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_3)}}$$

---

*) In der Lottner'schen Bezeichnungsweise, a. a. O. p. 116.

neu auftretenden Grenzen 0 und 1. Man normirt durch die Substitution

$$\zeta - \alpha_1 = - \alpha_1 z^2.$$

Dadurch werden die Moduln

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} \varkappa^2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon + \cos\vartheta_0}{2\sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}}, \\ \varkappa'^2 &= \frac{-\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon + \cos\vartheta_0}{2\sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}}. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$\text{(c)} \quad \frac{P\gamma(\alpha_1 - \alpha_3)}{2A} = \frac{P\gamma}{A} \cdot \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0} = m^2; \qquad m t = u,$$

so folgt leicht, wenn K die elliptische Modulfunction für $\varkappa$ darstellt,

$$\text{(10)} \qquad \cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = \alpha_1 \cos^2 \operatorname{am}(u + K).$$

Man erkennt: $\cos\vartheta$ ist periodisch mit der Periode $\pm 2K$ von u, am kleinsten für $u = 0, 2K \ldots$, wo $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0$ wird; vom grössten für $u = K, 3K \ldots$, nämlich

$$\text{(11)} \qquad \cos\vartheta_1 = \alpha_1 + \cos\vartheta_0 = -\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon + \cos\vartheta_0)^2 + \sin^2\vartheta_0}.$$

D. h.

Die Figuraxe beschreibt um die Axe Oz der Schwere einen Kegel, der zwischen zwei Kreiskegeln um diese Axe eingeschlossen bleibt. Die halben Winkelöffnungen dieser Kegel sind ϑ_0, ϑ_1. Die Figuraxe hat gegen die Verticale zu den Zeiten $\frac{u}{m}$, $\frac{2K \pm u}{m} \ldots$ dieselbe Neigung und trifft die Grenzkegel abwechselnd nach der Zeit $\tau = \frac{K}{m}$.

Aus (11) folgt die Relation

$$\text{(11 a)} \qquad \sin\vartheta_1 = \sqrt{2\alpha_1\varepsilon}.$$

Die Grössen α_1, α_3, $\varkappa$, $\varkappa'$, ϑ_1 hängen nur von 2 Constanten, ε und ϑ_0, ab; für diese kann man auch ϑ_1 und ϑ_0 einführen. m, also auch $\tau = \frac{K}{m}$, hängen von 4 Constanten ab.

Was α_1 betrifft, so kann man nach (11) schreiben:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma\cos\vartheta_1 - \gamma\cos\vartheta_0}{\gamma},$$

es ist also

> „α_1 das Verhältniss der Dicke der Kugelzone, innerhalb deren sich der Schwerpunkt des Gyroskops bewegt, zum Kugelradius γ“.

In ähnlicher Weise lassen sich auch α_3 und ε geometrisch deuten.

Untersucht man die Veränderung von α_1 mit einer solchen der 2 Constanten ϑ_0 und ε, so kann man sagen:

Die Kugelzone, innerhalb deren sich die Bewegung des Schwerpunktes des Gyroskops vollzieht, ist um so schmaler, je grösser $\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4AP\gamma}$

und je kleiner ϑ_0 *d. h. je stärker das anregende Paar ist, je kleiner das Gewicht und der Schwerpunktsabstand, je kleiner das Trägheitsmoment um eine Axe des Aequators und je tiefer die Anfangslage des Gyroskops.*

Die Zeit $\tau = \frac{K}{m}$, welche die Figuraxe benöthigt, um von einer extremen Lage zur andern zu gelangen, sinkt, wenn Cn steigt, A und ϑ_0 sinken, wie unmittelbar aus dem Verhalten von m und $\varkappa$ ersichtlich.

Die Untersuchung der Veränderung mit $P\gamma$ macht eine Differentiation nothwendig; es wird

$$\frac{\partial\tau}{\partial(P\gamma)} = \frac{\frac{\partial K}{\partial(P\gamma)}\,m - \frac{\partial m}{\partial(P\gamma)}\,K}{m^2}$$

$$= \frac{\frac{\partial K}{\partial(\varkappa^2)}\,\varepsilon\sin^2\vartheta_0 - K(1+\varepsilon\cos\vartheta_0)\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0}}{4\sqrt{2}\,A^2 m^3\,[1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0]}.$$

Nun ist doch, wenn $\int\limits_0^K \Delta^2\,\mathrm{am}\,v\cdot dv = E$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial K}{\partial(\varkappa^2)}{}^{*)} = \frac{E}{2\varkappa^2\varkappa'^2} - \frac{K}{2\varkappa^2}, \quad < \frac{K(1-\varkappa'^2)}{2\varkappa^2\varkappa'^2} \quad \text{d. h.} \quad < \frac{K}{2\varkappa'^2}.$$

Bei uns ist aber

$$\frac{1}{2\varkappa'^2} = \frac{\alpha_1-\alpha_3}{-2\alpha_3} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0}}{(\varepsilon+\cos\vartheta_0)+\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0}},$$

also

$$\frac{\partial K}{\partial(\varkappa^2)}\left[\varepsilon+\cos\vartheta_0+\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0}\right] < K\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0}.$$

Da nun auch

$$\varepsilon\sin^2\vartheta_0 < (\varepsilon+\cos\vartheta_0)+\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\vartheta_0},$$

so folgt, dass $\frac{\partial\tau}{\partial(P\gamma)}$ negativ bleibt, τ also mit steigendem $P\gamma$ sinkt.

Fassen wir dies alles zusammen, so resultirt:

Die Zeit, innerhalb deren sich der Schwerpunkt des Gyroskops von seiner höchsten zur tiefsten Lage, oder umgekehrt, bewegt, ist um so kleiner, je stärker das anregende Paar, je grösser das Gewicht und der Schwerpunktsabstand, je kleiner das Trägheitsmoment um eine Axe des Aequators und je kleiner die anfängliche Neigung gegen die Verticale gewählt ist.

---

*) Durège, Theorie der ellipt. F. p. 286.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn man das Schmalerwerden der Zone mit dem rascheren Durchlaufen derselben in Vergleich setzt, $P\gamma$ seinen Einfluss in verschiedenem Sinne geltend macht, die andern Grössen dagegen im selben Sinne.

Um ein möglichst genaues Bild von der Bewegung des Schwerpunktes (und damit der Figuraxe) zu haben, suchen wir die Projection seiner Bahn auf die Horizontalebene durch O. Dieselbe verläuft offenbar zwischen zwei concentrischen Kreisen um O, mit den Radien

$$v_0 = \gamma \sin \vartheta_0, \qquad v_1 = \gamma \sin \vartheta_1$$

beschrieben, wo $v_0 > v_1$; sie ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{cases} v = \gamma \sin \vartheta, \\ d\psi = \dfrac{Cn}{Am} \cdot \dfrac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}{\sin^2 \vartheta} \cdot du. \end{cases}$$

Aus dem Werthe von $d\psi$ folgt, dass ψ stets wächst, solange n positiv ist:

Die Drehung des Systems vollzieht sich in einem der Anfangsdrehung entgegengesetzten Sinn, sobald der Schwerpunkt des Gyroskops unterhalb des Unterstützungspunktes gelegen.

$$dv = \gamma \cos \vartheta \cdot d\vartheta$$

und

$$\sin \vartheta \cdot d\vartheta = 2\alpha_1 \cos \operatorname{am} (u + K) \sin \operatorname{am} (u + K) \Delta \operatorname{am} (u + K)$$

zeigen, dass dv 0 wird für $u = 0, K, 2K \ldots$; $d\psi$ wird dagegen nur 0 für $u = 0, 2K, 4K \ldots$. Das Bogenelement $d\sigma = [dv^2 + v^2 d\psi^2]^{\frac{1}{2}}$ wird also 0 für die Parameterwerthe $u = 0$, $u = 2K \ldots$; für sie ist v Tangente, für $u = K, 3K \ldots$ Normale an die Curve.

Die Curve hat also Spitzen auf dem Kreis, der mit v_0 beschrieben, und berührt den Kreis, der mit v_1 beschrieben ist.

Die Frage, ob die Curve Wendepunkte besitzt, lässt sich durch analytische Untersuchung aus den Gleichungen (12) schwer klarlegen. Wir betrachten für diesen Zweck besser jene Curve, welche der Kegel der Figuraxe auf einer Horizontalebene ausschneidet. Für sie lässt sich leichter zeigen, dass sie Wendepunkte nicht besitzen kann; es ist also die Bahn des Schwerpunktes immer im nämlichen Sinn gekrümmt und nur da horizontal, wo sie den tieferen Grenzkreis der Kugelzone berührt. Die Projection der Bahn auf eine Horizontalebene kann demnach Wendepunkte nicht besitzen. Ueber ihre Form können wir sonach das Folgende aussagen:

Die durch die Horizontalprojection der Bahn des Schwerpunktes *des Gyroskops dargestellte Curve verläuft in der Weise zwischen 2 concentrischen Kreisen, dass sie auf den äusseren sich senkrecht mit Spitzen aufsetzt und den inneren berührt, ohne dazwischen Wendepunkte zu besitzen.*

Vollständig ist die Curve erst bekannt, wenn wir den Winkel ψ kennen, den der Radiusvector zur Zeit t mit jenem für $t = 0$ giltigen einschliesst.

Zerlegen wir

$$d\psi = \frac{Cn}{Am} \cdot \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta} \cdot du,$$

so dass

$$d\psi = \frac{Cn}{Am}\left[\frac{1-\cos\vartheta_0}{1-\cos\vartheta} - \frac{1+\cos\vartheta_0}{1+\cos\vartheta}\right] du,$$

und integriren, so erhalten wir

$$\psi \cdot \frac{2Am}{Cn} = (1-\cos\vartheta_0)\int_0^u \frac{du}{1-\cos\vartheta} - (1+\cos\vartheta_0)\int_0^u \frac{du}{1+\cos\vartheta}.$$

Es ist nun nach (10)

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \alpha_1\cos^2\operatorname{am}(u+K) = (\cos\vartheta_0+\alpha_1) - \alpha_1\sin^2\operatorname{am}(u+K),$$

also

$$\psi \cdot \frac{2Am}{Cn} = \frac{1-\cos\vartheta_0}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0} \cdot \int_0^u \frac{du}{1+\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0}\sin^2\operatorname{am}(u+K)}$$

$$- \frac{1+\cos\vartheta_0}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_1} \cdot \int_0^u \frac{du}{1-\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_0}\sin^2\operatorname{am}(u+K)}.$$

Nun bewegt sich $\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0}$ zwischen 0 und ∞, $\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_0}$ zwischen 1 und $\varkappa^2 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_3}$. Wir setzen daher

$$\text{(c)} \qquad \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0} = -\,\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_1),$$

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_0} = \varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_2+K).$$

Dadurch wird

$$\psi \cdot \frac{2Am}{Cn} = \frac{1-\cos\vartheta_0}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0} \cdot \int_0^u \frac{du}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_1)\cdot\sin^2\operatorname{am}(u+K)}$$

$$- \frac{1+\cos\vartheta_0}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_0} \cdot \int_0^u \frac{du}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_2+K)\cdot\sin^2\operatorname{am}(u+K)},$$

was man auch schreiben kann

$$\psi \cdot \frac{2Am}{Cn} = \frac{1-\cos\vartheta_0}{1-\alpha_1-\cos\vartheta_0} \cdot \frac{\sin \operatorname{am}(i\beta_1)}{i\cos\operatorname{am}(i\beta_1)\cdot\Delta\operatorname{am} i\beta_1}$$

$$\cdot \int_0^u \frac{i \operatorname{cotg}\operatorname{am}(i\beta_1)\cdot\Delta\operatorname{am}(i\beta_1)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_1)\cdot\sin^2\operatorname{am}(u+K)}$$

$$- \frac{1+\cos\vartheta_0}{1+\alpha_1+\cos\vartheta_0} \cdot \frac{\sin\operatorname{am}(i\beta_2+K)}{\cos\operatorname{am}(i\beta_2+K)\cdot\Delta\operatorname{am}(i\beta_2+K)}$$

$$\cdot \int_0^u \frac{i\operatorname{cotg}\operatorname{am}(i\beta_2+K)\cdot\Delta\operatorname{am}(i\beta_2+K)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(i\beta_2+K)\cdot\sin^2\operatorname{am}(u+K)}.$$

Die vorkommenden Integrale befinden sich aber im Problem der Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt, bei Jacobi [„Sur la rotation d'un corps.“ Op. II, p. 187]. Es ist dort nämlich abgeleitet

$$\int_0^v \frac{i\cdot\operatorname{cotg}\operatorname{am} ia\cdot\Delta\operatorname{am} ia\cdot dv}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} ia\cdot\sin^2\operatorname{am} v} = v\cdot\frac{\partial}{\partial a}\log \mathrm{H} ia + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(v+ia)}{\Theta(v-ia)}.$$

Wir haben uns also nur noch mit den vor unsern Integralen stehenden Factoren zu befassen.

Dieselben werden unter Zuhilfenahme der Gleichungen (c) und der für $\varkappa$ etc. aufgestellten Werthe beide als

$$\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}}$$

gefunden. Weiter ist

$$\text{(d)} \qquad \frac{Cn}{2Am} = \varkappa\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha_1}} = \frac{2\varkappa\varepsilon}{\sin\vartheta_1}.$$

Berücksichtigt man die Grenzen der Integrale und die Relation

$$\Theta(K+ia) = \Theta(K-ia),$$

so wird

$$\psi = \left[u\frac{\partial}{\partial\beta_1}\log \mathrm{H}(i\beta_1) + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+i\beta_1)}{\Theta_1(u-i\beta_1)}\right]$$

$$-\left[u\frac{\partial}{\partial\beta_2}\log \mathrm{H}_1(i\beta_2) + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+i\beta_2)}{\Theta(u-i\beta_2)}\right].$$

Dies schreibt sich auch

$$\text{(13)} \qquad \psi = u\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\log \mathrm{H}(i\beta_1) - \frac{\partial}{\partial\beta_2}\log \mathrm{H}_1(i\beta_2)\right]$$

$$+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+i\beta_1)\cdot\Theta(u-i\beta_2)}{\Theta_1(u-i\beta_1)\cdot\Theta(u+i\beta_2)}.$$

Der Polarwinkel ψ besteht also aus einem der Zeit proportionalen und einem damit periodischen Term; dieser nimmt für u, $2K-u$, $2K+u\ldots$ dieselben Werthe an und ist somit nur im Intervalle von

0 bis K zu untersuchen. Von besonderem Interesse ist natürlich der Winkel

$$(14)\qquad \psi_K = K\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\log \mathrm{H}(i\beta_1) - \frac{\partial}{\partial\beta_2}\log \mathrm{H}_1(i\beta_2)\right],$$

innerhalb dessen sich die Bewegung des Schwerpunktes von einer seiner extremen Lagen bis zur andern vollzieht.

Nun ist nach der Theorie der elliptischen Functionen:

$$\mathrm{H}(i\beta_1) = \Theta(i\beta_1)\cdot \sin\mathrm{am}(i\beta_1)\cdot\sqrt{\varkappa},$$

$$\mathrm{H}_1(i\beta_2) = \Theta(i\beta_2)\cdot \cos\mathrm{am}(i\beta_2)\cdot\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial\beta_1}\log\mathrm{H}(i\beta_1) = iZ(i\beta_1) + i\cdot\mathrm{cotg\,am}(i\beta_1)\cdot\Delta\,\mathrm{am}(i\beta_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_2}\log\mathrm{H}_1(i\beta_2) = iZ(i\beta_2) - i\cdot\mathrm{tg\,am}(i\beta_2)\cdot\Delta\,\mathrm{am}(i\beta_2),$$

Aber

$$iZ(i\beta) = i\cdot E(i\beta) + \beta\cdot\frac{E}{K} = i\cdot\mathrm{tg\,am}(i\beta)\cdot\Delta\,\mathrm{am}(i\beta) + E(\beta,\varkappa') - \beta\frac{K-E}{K}$$

und

$$i\cdot\mathrm{tg\,am}(i\beta_1)\cdot\Delta\,\mathrm{am}(i\beta_1) + i\cdot\mathrm{cotg\,am}(i\beta_1)\cdot\Delta\,\mathrm{am}(i\beta_1) = \varkappa\cdot\mathrm{tg}\frac{\vartheta_1}{2},$$

wie aus der ersten der Gleichungen (c) abgeleitet werden kann. Darnach schreibt sich

$$(14\mathrm{a})\qquad \psi_K = K\left[E(\beta_1,\varkappa') - E(\beta_2,\varkappa') - (\beta_1-\beta_2)\frac{K-E}{K} + \varkappa\cdot\mathrm{tg}\frac{\vartheta_1}{2}\right].$$

Diese Form ist zur praktischen Berechnung geeigneter als die unter (14) gegebene, da sie die Legendre'schen Tabellen zu benützen gestattet. β_1 und β_2 sind dabei aus folgenden, durch Anwendung bekannter Transformationsformeln aus (c) erhaltenen Gleichungen bestimmt:

$$(\mathrm{e})\qquad \begin{aligned} \sin\mathrm{am}(\beta_1,\varkappa') &= \frac{\alpha_1}{2\varkappa\sin\frac{\vartheta_0}{2}\cdot\cos\frac{\vartheta_1}{2}},\\ \sin\mathrm{am}(\beta_2,\varkappa') &= \frac{2\varkappa\sin\frac{\vartheta_1}{2}\cdot\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{\varkappa'\alpha_1}. \end{aligned}$$

Der Werth von ψ_K genügt, um sich von der Projection der Bahn des Schwerpunktes auf eine Horizontalebene ein hinreichendes Bild zu verschaffen, in Verbindung mit den früher erwähnten Eigenschaften der Curve, vollständig.

§ 3.

Der von der Figuraxe beschriebene Kegel, wenn der Schwerpunkt des Gyroskops oberhalb des Unterstützungspunktes gelegen.

Die Figuraxe bildet in diesem Falle mit der positiven z-Axe einen stumpfen Winkel ϑ_0, mit der negativen z-Axe also den spitzen Winkel $\vartheta_0' = 180 - \vartheta_0$. Aus der 2. der Bewegungsgleichungen (A) folgt dann $\cos\vartheta + \cos\vartheta_0' > 0$ d. h. $\vartheta < 180 - \vartheta_0'$. Die Figuraxe besitzt also in ihrer Anfangslage den höchsten Stand. $\cos\vartheta$ bewegt sich zwischen $-\cos\vartheta_0'$ und 1, $\zeta = \cos\vartheta + \cos\vartheta_0'$ also zwischen 0 und $1 + \cos\vartheta_0'$. Die 3 Wurzeln α_1, α_2, α_3 werden hier

$$(f)\qquad \begin{aligned} \alpha_1' &= -(\varepsilon - \cos\vartheta_0') + \sqrt{(\varepsilon - \cos\vartheta_0')^2 + \sin^2\vartheta_0'},\\ \alpha_2' &= 0,\\ \alpha_3' &= -(\varepsilon - \cos\vartheta_0') - \sqrt{(\varepsilon - \cos\vartheta_0')^2 + \sin^2\vartheta_0'}, \end{aligned}$$

und man erhält auf dem im vorigen Paragraphen eingeschlagenen Weg

$$(15)\qquad \cos\vartheta + \cos\vartheta_0' = \alpha_1' \cos^2 \operatorname{am}(u + K).$$

Für $u = 0, 2K \ldots$ wird $\cos\vartheta = -\cos\vartheta_0'$, $\vartheta = 180 - \vartheta_0'$,
für $u = K, 3K \ldots$ wird

$$(16)\qquad \cos\vartheta_1 = \alpha_1' - \cos\vartheta_0' = -\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\vartheta_0'},$$

Hieraus ist ersichtlich, dass $\cos\vartheta_1$ negativ wird, wenn $\varepsilon > \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$;
ϑ_1 ist dann stumpf, $= 180^0 - \vartheta_1'$.
$\cos\vartheta_1$ wird positiv, wenn $\varepsilon < \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$;
ϑ_1 ist spitz und $\vartheta_1 \gtrless \vartheta_0'$, je nachdem
$\varepsilon \gtrless \frac{\sin^2\vartheta_0'}{4\cos\vartheta_0'}$.
$\cos\vartheta_1$ wird 0, wenn $\varepsilon = \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$,
ϑ_1 ist 90^0.

Wir erhalten so den Satz:

Liegt der Schwerpunkt eines Gyroskops oberhalb des Unterstützungspunktes, so entscheiden die zwei Constanten $\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4AP\gamma}$ *und* $\vartheta_0' = 180 - \vartheta_0$, *wo* ϑ_0 *stumpf, darüber, ob derselbe fortwährend darüber bleibt oder nicht. Er bleibt oben, wenn* $\varepsilon > \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$, *er sinkt unter den Unterstützungspunkt, wenn* $\varepsilon < \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$, *und er erreicht gerade die Horizontalebene durch den letzteren, wenn* $\varepsilon = \frac{1}{2\cos\vartheta_0'}$. *Im ersten Falle erscheinen die beiden Kreiskegel, innerhalb deren die Figuraxe sich be-*

wegt, um die — z-Axe beschrieben und ist der mit der halben Winkelöffnung $= \vartheta_0'$ *beschriebene der innere; im zweiten Falle scheint der durch die halbe Winkelöffnung* ϑ_1 *repräsentirte um die* $+$ *z-Achse beschrieben und ist* $\vartheta_1 \gtrless \vartheta_0'$, *je nachdem* $\varepsilon \gtrless \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{4 \cos \vartheta_0'}$; *im dritten Fall endlich ist der durch* ϑ_1 *dargestellte Kegel in die Horizontalebene durch* O *übergegangen.*

Untersuchen wir wieder die Veränderung der Dicke $\gamma \alpha_1'$ der Kugelzone, auf der sich der Schwerpunkt bewegt, mit einer solchen von $\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4 A P \gamma}$ und ϑ_0', so kommt:

Die Kugelzone, welche die Bahn des Schwerpunktes einfasst, ist um so schmaler, je grösser das die Drehung erzeugende Kräftepaar, je kleiner das Gewicht und der Schwerpunktsabstand des Gyroskops und je kleiner das Trägheitsmoment um eine Axe des Aequators ist — gleichgiltig, ob die Figuraxe stets oberhalb des Unterstützungspunktes sich bewegt oder nicht. Bleibt die Figuraxe oben, so ist die Zone um so schmaler, je kleiner der anfängliche Winkel ϑ_0', *läuft sie auch unterhalb, je grösser dieser Winkel.*

Was wieder die Zeit $\tau = \frac{K}{m}$ betrifft, so findet man theils direct, theils durch Differentiation, nach Analogie der Untersuchung im § 2.:

Die Zeit, welche der Schwerpunkt nöthig hat, um von seiner höchsten Lage in die tiefste, oder umgekehrt, zu gelangen, ist um so kleiner, je grösser das anregende Kräftepaar war, je grösser das Gewicht und der Schwerpunktsabstand, je kleiner das Trägheitsmoment um eine Axe des Aequators und je kleiner die spitze Anfangsneigung ϑ_0' *war, und zwar für alle Fälle.*

Dieser Satz stimmt in allen Theilen mit dem entsprechenden des vorigen Paragraphen überein.

Die Curve, welche die Projection der vom Schwerpunkt durchlaufenen Bahn auf die Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt darstellt, verläuft zwischen zwei concentrischen Kreisen um O, deren Radien

$$v_0' = \gamma \sin \vartheta_0', \qquad v_1' = \gamma \sin \vartheta_1$$

sind. Es ist dabei, wenn die Figuraxe oberhalb der Ebene Oxy bleibt, $v_0' < v_1'$; wenn die Figuraxe unter sie heruntergeht und

$$\begin{cases} \varepsilon < \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{4 \cos \vartheta_0'} & v_0' < v_1', \\ \varepsilon > \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{4 \cos \vartheta_0'} & v_0' > v_1', \\ \varepsilon = \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{4 \cos \vartheta_0'} & v_0' = v_1'. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung dieser Thatsachen und den Gleichungen der Curve,

$$(17)\qquad \begin{cases} v = \gamma \sin \vartheta, \\ d\psi = \dfrac{Cn}{Am} \cdot \dfrac{\cos \vartheta + \cos \vartheta_0'}{\sin^2 \vartheta} \, du, \end{cases}$$

folgt:

Die zwischen zwei concentrischen Kreisen verlaufende Horizontalprojection der Schwerpunktsbahn setzt sich wieder senkrecht mit Spitzen auf den durch die Anfangsneigung ϑ_0' bestimmten Kreis auf und berührt den andern. Der erstere Kreis ist der innere, wenn ε d. i. $\frac{C^2 n^2}{4AP\gamma} > \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{\cos \vartheta_0'}$; die Curve hat dann die Gestalt einer Epicykloide. Er ist der äussere, wenn $\varepsilon < \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{\cos \vartheta_0}$; die Curve hat dann die Gestalt einer Hypocykloide. Der Uebergang wird für $\varepsilon = \frac{\sin^2 \vartheta_0'}{\cos \vartheta_0'}$ vermittelt, indem die Grenzkreise dafür einander unendlich nahe rücken und die Curve in einen Kreis übergegangen ist.

Da bei positivem $n \frac{d\psi}{du}$ stets wächst, so folgt, dass, von unten gesehen, die Bewegung wie der Zeiger einer Uhr, von oben gesehen jedoch umgekehrt vor sich geht, d. h. im selben Sinne als ihn die Anfangsdrehung hervorrief.

Wendepunkte kann die Curve, wie in dem früher behandelten Falle, nicht besitzen.

Die Werthe von ψ, ψ_K, $\varkappa$, $\varkappa'$, sin am $(\beta_1, \varkappa')$, sin am $(\beta_2, \varkappa')$ werden aus den in § 2. aufgestellten Werthen dadurch entnommen, dass man statt ϑ_0 $180 - \vartheta_0'$ setzt. Hiebei kann es vorkommen, dass β_1 und β_2 einander gleich werden und zwar tritt dies ein, wenn $\varepsilon = \frac{1}{2 \cos \vartheta_0'}$, d. h. wenn die tiefste Lage der Figuraxe die Horizontale ist. Es wird hiefür

$$\psi_K = K \cdot \varkappa \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2}.$$

§ 4.

Der von den instantanen Drehaxen gebildete abrollende Kegel.

Wir wissen breits aus § 1., dass, wenn auf jeder instantanen Drehaxe die Grösse Θ der Winkelgeschwindigkeit aufgetragen wird, die so erhaltenen „instantanen Drehpole“ eine ebene Curve bilden, deren Ebene parallel dem Aequator im Abstande n vom Unterstützungspunkt O gelegen ist. Die Form dieser Curve — nach Analogie der Bezeichnung, die Poinsot beim Problem der Rotation eines Körpers um seinen Schwerpunkt anwandte, Polhodie genannt — bestimmt die des rollenden Kegels.

Nehmen wir den Durchstosspunkt M der Figuraxe und der Ebene der Polhodie zum Pol eines Coordinatensystems, so ist der Radiusvector

$$\varrho = \sqrt{p^2 + q^2}$$

aus (8) und (10) als

$$\varrho = \sqrt{\frac{P\gamma \cdot \alpha_1}{2A}} \cdot \cos \operatorname{am} (u + K)$$

zu entnehmen.

Als Polaraxe wählen wir die Anfangslage des Radiusvector zur Zeit $t = 0$, wofür derselbe in die Linie ON der Knoten fällt. Der Polarwinkel der Curve ist dann nichts anderes als der im § 1. erwähnte Winkel σ. Wir können ihn aus den Gleichungen (3) erhalten, indem wir dieselben mit $\eta = Aq$ und $\xi = Ap$ resp. multipliciren und subtrahiren, wodurch

$$\eta d\xi - \xi d\eta = A P\gamma \sin\vartheta (q \cos\varphi + p \sin\varphi) \cdot dt + A(A - C)\, n (p^2 + q^2) \cdot dt$$

wird.

Aus (7) und (8) aber geht hervor:

$$q \cos\varphi + p \sin\varphi = \frac{Cn}{2P\gamma \sin\vartheta} \cdot (p^2 + q^2),$$

also ist

$$\eta d\xi - \xi d\eta = \frac{A}{2} (2A - C)\, n\, (p^2 + q^2) \cdot dt \cdot$$

$\eta d\xi - \xi d\eta$ ist nun das während des Zeitelementes dt vom Radiusvector $A \cdot \varrho = A \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ überstrichene doppelte Dreieck und als solches andererseits durch $\pm A^2 \varrho^2 d\sigma$ gegeben. Es wird durch Einsetzen dieses Werthes in die vorstehende Gleichung

$$d\sigma = \pm \frac{2A - C}{2A}\, n \cdot dt = \pm \frac{(2A - C) n}{2Am} \cdot du.$$

Beachten wir, dass nach den im § 1. gemachten Bemerkungen der Winkel σ im Anfang der Bewegung negativ ist, so folgt

$$\sigma = -\frac{(2A - C) n}{m} \cdot u.$$

Die Polhodie ist sonach durch die Gleichungen gegeben

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\frac{P\gamma \cdot \alpha_1}{2A}} \cdot \cos \operatorname{am} (u + K), \\ \sigma &= -\frac{(2A - C) n}{2Am} \cdot u. \end{aligned} \right.$$

Man bemerke, dass $2A > C$, da sich aus den drei Hauptträgheitsmomenten eines Körpers stets ein Dreieck construiren lässt (der Fall $2A = C$, der dann eintritt, wenn das Gyroskop in eine unendlich dünne schwere Scheibe übergegangen ist, zieht $\sigma = 0$ nach sich und wird später behandelt werden).

Es folgt sonach:

Die Richtung, in welcher die instantane Drehaxe den von ihrer Folge gebildeten Kegel in Bezug auf den als ruhend gedachten Körper zu durchlaufen scheint, ist der der anfangs erfolgten Drehung entgegengesetzt, einerlei, ob das Trägheitsmoment um die Axe der Figur grösser oder kleiner als das um eine der Axen des Aequators. Im letzteren Falle ist jedoch die constante Geschwindigkeit, mit der das Durchlaufen stattfindet, grösser als im ersteren.

Der Radiusvector ϱ der Polhodie ist periodisch mit der Periode $4K$ von u, die Curve besteht also wieder aus unendlich vielen Theilen. Für $u = 0$ ist $\varrho_0 = 0$, mit wachsendem u steigt ϱ bis zum Werthe (für $u = K$)

$$(19) \qquad \varrho_1 = \sqrt{\frac{2P\gamma \cdot \alpha_1}{A}}.$$

Dieser Radiusvector ist Symmetrieaxe des Curvenzweiges, $\varrho_{2K-\mu} = \varrho_u$; es nehmen die Radiusvectoren wieder ab, bis für $u = 2K$, $\varrho_{2K} = 0$ geworden. Lässt man u weiter wachsen, so zeigt

$$\varrho_{\mu+2K} = -\varrho_\mu,$$

dass die Curve über den Pol M hinaus sich, ohne etwa in ihm Spitzen zu bilden, fortsetzt. Für den Winkel λ zwischen der Tangente eines Curvenpunktes und dem Radiusvector nach demselben ist

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\varrho\, d\sigma}{d\varrho}.$$

$d\sigma$ wird nie 0, ϱ für $u = 0, 2K \ldots$, $d\varrho$ dagegen für $u = K, 3K \ldots$ Der Radiusvector der Curve ist also Tangente an dieselbe für die Parameterwerthe $u = 0, 2K \ldots$ und Normale für $u = K, 3K \ldots$. Wir können demnach behaupten:

Die Polhodie ist eine ebene Curve, innerhalb eines Kreises in der Weise verlaufend, dass sie von seinem Mittelpunkte aus gegen die Peripherie angeht, um nach der Berührung derselben symmetrisch in ihn zurückzulaufen und sich in derselben Weise darüber hinaus fortzusetzen. Die Curve besteht sonach aus unendlich vielen rosettenartigen Blättern, deren Enden im Mittelpunkt des Kreises zusammenstossen.

Der Winkel, unter welchem die Curve wieder in den Mittelpunkt einläuft, ist

$$(20) \qquad \sigma_K = -\frac{(2A - C)}{2Am} \cdot K = -\frac{(2A - C)n}{2A} \cdot \tau.$$

Derselbe bestimmt die Breite eines Blattes, während ϱ_1 die Länge bestimmt. σ_K ist abhängig von den fünf Constanten $P\gamma$, A, C, n und ϑ_0, ϱ_1 von den vier Constanten $P\gamma$, A, Cn, ϑ_0. Die Untersuchung der Aenderung von σ_K und ϱ_1 mit einer Aenderung der Constanten kann in den folgenden Sätzen niedergelegt werden:

„Die *Rosetten* der Polhodie werden *um so länger* (ϱ_1 um so grösser), je kleiner das die Bewegung hervorrufende Kräftepaar Cn ist und je grösser das Gewicht P und der Schwerpunktsabstand γ des Gyroskops — ohne Rücksicht auf die Lage des Schwerpunktes. Bewegt sich der letztere ganz oberhalb des Unterstützungspunktes, so werden die Rosetten länger mit steigendem Trägheitsmoment A um eine Axe des Aequators und mit steigendem spitzen Anfangswinkel ϑ_0'; bewegt er sich auch unterhalb desselben, so werden die Blätter länger mit sinkendem Trägheitsmoment A und mit steigendem oder fallendem spitzen Anfangswinkel, je nachdem der Schwerpunkt schon von Anfang an oberhalb des Unterstützungspunktes lag oder nicht.“

Bezüglich der Breite kann man bemerken:

„Die *Rosetten* werden um so *breiter*, je kleiner das Trägheitsmoment C und je grösser die Winkelgeschwindigkeit n um die Axe der Figur, je grösser das Trägheitsmoment um eine Axe des Aequators, je kleiner das Gewicht und der Schwerpunktsabstand und je grösser der spitze Anfangswinkel zwischen Figuraxe und Verticale ist, und zwar für jede Lage des Schwerpunktes.“

Es ist bemerkenswerth, dass, im Gegensatz zu früher, C und n hier ungleiches Verhalten zeigen.

Vermöge der Gleichungen (18) sind wir nun in den Stand gesetzt, die Winkelgeschwindigkeiten p, q um zwei senkrechte Hauptaxen des Aequators aufzustellen. Es ist

$$p = \varrho \cos \sigma, \quad q = \varrho \sin \sigma,$$

also in Function von u d. h. der Zeit

$$(21) \quad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{2P\gamma \cdot \alpha_1}{A}} \cdot \cos \operatorname{am}(u+K) \cdot \cos\left(\dfrac{(2A-C)n}{2Am} u\right), \\ q = -\sqrt{\dfrac{2P\gamma \cdot \alpha_1}{A}} \cdot \cos \operatorname{am}(u+K) \cdot \sin\left(\dfrac{(2A-C)n}{2Am} u\right). \end{cases}$$

p und q sind auf diesem Wege d. h. durch Einführung der Schwungkräfte und der Gleichungen (3) verhältnissmässig einfach dargestellt. Lottner*) hat dieselben aus den Gleichungen

$$A \sin \vartheta \,(p \sin \varphi + q \cos \varphi) = Cn\,(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0),$$

$$A\,(p^2 + q^2) = 2P\gamma\,(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0),$$

vermittels der Euler'schen Winkel φ, ϑ, die er in Function von u kannte, aufgestellt. Die wirkliche Einführung von u ist sehr complicirt und die Formeln zur Discussion nicht recht geeignet. Umgekehrt können wir gerade die Gleichungen (21) benützen, um den Winkel φ zu berechnen.

---

*) a. a. O. p. 124.

Es ist nämlich zufolge der Gleichungen (4) und (7) und schon bekannter Relationen

$$
\text{(g)}\quad
\begin{aligned}
p\cos\varphi - q\sin\varphi &= -\frac{d\vartheta}{dt} = \varrho\cos(\varphi+\sigma),\\
p\sin\varphi + q\cos\varphi &= \frac{Cn(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}{A\sin\vartheta} = \varrho\sin(\varphi+\sigma);
\end{aligned}
$$

daraus wird

$$\operatorname{tg}(\varphi+\sigma) = -\frac{Cn(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A\sin\vartheta}\cdot\frac{dt}{d\vartheta},$$

und weil

$$m\,dt = du,\quad \cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = \alpha_1\cos^2\operatorname{am}(u+K),$$

$$\sin\vartheta\cdot d\vartheta = 2\alpha_1\cos\operatorname{am}(u+K)\sin\operatorname{am}(u+K)\,\Delta\operatorname{am}(u+K)\cdot du,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi+\sigma) = -\frac{Cn}{2Am}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}(u+K)}{\sin\operatorname{am}(u+K)\,\Delta\operatorname{am}(u+K)}.$$

Dies lässt sich auch, da nach (d) $\frac{Cn}{2Am} = \frac{2\varkappa\varepsilon}{\sin\vartheta_1}$ ist, folgendermassen schreiben:

$$\text{(22)}\qquad \operatorname{tg}(\varphi+\sigma) = \frac{2\varkappa\varepsilon}{\sin\vartheta_1}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}u\cdot\Delta\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}u}$$

oder

$$\text{(22a)}\qquad \operatorname{tg}(\varphi+\sigma) = \frac{2\varkappa\varepsilon}{\sin\vartheta_1}\cdot\frac{\mathrm{H}u\cdot\Theta_1 u}{\Theta u\cdot\mathrm{H}_1 u}.$$

Da σ bekannt ist, so ist also durch das Zusammenbestehen der Gleichungen (18) und (22) der Winkel φ gegeben. $\operatorname{tg}(\varphi+\sigma)$ ist dabei periodisch mit der Periode $2K$ von u, positiv im Intervalle von $u=0$ bis $u=K$, negativ von $u=K$ bis $u=2K$; für $u=0$ ist $\varphi+\sigma=0^0$, für $u=K$ $\varphi+\sigma=90^0$, für $u=2K$ $\varphi+\sigma=180^0$. Die Veränderung des Winkels φ selbst wird am besten aus der Differentialgleichung (9) erkannt, wenn wir $\frac{d\psi}{dt}$ aus der Gleichung (6) in dieselbe substituiren, wodurch

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n}{A\sin^2\vartheta}\cdot[A\sin^2\vartheta + C\cos\vartheta(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)]$$

wird.

Die Frage, ob $\frac{d\varphi}{dt}$ sein Zeichen wechseln könne, hat **Somoff** (a. a. O. pp. 129, 130) dahin beantwortet, dass dies dann möglich sei, wenn die Ungleichungen

$$A > \frac{C}{2}\text{*)}, \quad \cos\vartheta_0 < 0, \quad \cos^2\vartheta_0 > \frac{4A(C-A)}{C}$$

erfüllt wären. Wir werden jedoch zeigen, dass ein Wechsel des Zeichens von $\frac{d\varphi}{dt}$ nicht eintreten kann, sondern dass $\frac{d\varphi}{dt}$ fortwährend positiv bleibt.

Der Ausdruck

$$A\sin^2\vartheta + C\cos\vartheta(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) = A + (C-A)\cos^2\vartheta - C\cos\vartheta\cos\vartheta_0$$

bleibt offenbar positiv für alle spitzen Winkel ϑ_0, für welche ja $\vartheta < \vartheta_0$, und für stumpfe Winkel $\vartheta_0 = 180 - \vartheta_0'$ so lange, als $\cos\vartheta$ positiv bleibt. Wird $\cos\vartheta < 0$ d. h. ϑ stumpf und $180^0 - \vartheta'$, so bleibt noch immer $\frac{d\varphi}{dt}$ positiv, wenn $A > C$ ist. Die Möglichkeit eines Zeichenwechsels ist also nur vorhanden, wenn

$$\cos\vartheta_0 < 0, \quad \cos\vartheta < 0, \quad A < C.$$

Differenziren wir nun den in ϑ' geschriebenen vorstehenden Ausdruck nach $\cos\vartheta'$, so kommt

$$2(C-A)\cos\vartheta' - C\cos\vartheta_0',$$

was durchweg negativ bleibt. Denn so lange das Gyroskop nicht in eine unendlich dünne schwere Platte übergegangen, ist

$$C < 2A \quad \text{d. h.} \quad 2(C-A) < C,$$

und nach den eingangs § 3. gemachten Bemerkungen

$$\cos\vartheta' < \cos\vartheta_0'.$$

Der Ausdruck

$$A\sin^2\vartheta' + C\cos\vartheta'(\cos\vartheta' - \mathrm{sos}\,\vartheta_0')$$

steigt sonach mit fallendem $\cos\vartheta'$, also steigendem ϑ', und ist am kleinsten für

$$\vartheta' = \vartheta_0',$$

nämlich

$$A\sin^2\vartheta_0',$$

am grössten für

$$\vartheta' = \vartheta_1',$$

nämlich

$$A\sin^2\vartheta_1' - C\cos\vartheta_1'(\cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_0').$$

Wir erhalten sonach den Satz:

Der Winkel φ zwischen der Knotenlinie ON und einer Hauptaxe $\Theta x'$ des Aequators steigt mit wachsender Zeit; es bewegt sich also die Axe Ox', von der Figuraxe Oz' aus gesehen, stets im selben Sinne gegen die Axe ON.

Es mag nicht überflüssig sein, an dieser Stelle den Nachweis zu bringen, dass der für φ erhaltene Werth mit dem von Lottner*) aufgestellten übereinstimmt. Es folgt nämlich aus den oben citirten Gleichungen (g)

---

*) Darnach sind die Druckfehler $A \overset{=}{<} \frac{C}{2}$ zu berichtigen.

$$\varrho\cos(\varphi+\sigma) = -\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \varrho\sin(\varphi+\sigma) = \frac{Cn(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}{A\sin\vartheta}$$

und aus dem Werthe (8)

$$\varrho^2 = \frac{2P\gamma}{A}(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)$$

zunächst

$$\cos(\varphi+\sigma) = -\frac{m\cdot d\vartheta}{du}\cdot\sqrt{\frac{A}{2P\gamma(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)}},$$

$$\sin(\varphi+\sigma) = \frac{Cn}{\sqrt{2AP\gamma}}\cdot\frac{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\vartheta_0}}{\sin\vartheta}.$$

Durch Differentiation der letzteren Gleichung nach ϑ und Einführung des Werthes von $\cos(\varphi+\sigma)$ folgt

$$d\varphi+d\sigma = \frac{Cn}{2Am}\cdot\frac{1+\cos^2\vartheta-2\cos\vartheta\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\cdot du,$$

und da (18)

$$d\sigma = -\frac{(2A-C)n}{2Am}\cdot du$$

ist, wird durch Einsetzen und Integration erhalten

$$\varphi = \frac{(A-C)n}{Am}u + \int_0^u\frac{Cn}{Am}\cdot\frac{1-\cos\vartheta\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta}\cdot du,$$

was mit dem Lottner'schen Ausdruck für φ übereinstimmt.

Die für $\cos(\varphi+\sigma)$, $\sin(\varphi+\sigma)$ in Vorstehendem erhaltenen Werthe schreiben wir unter Hinzunahme der Relationen

$$\frac{C^2n^2}{4AP\gamma} = \varepsilon, \quad 2\alpha_1\varepsilon = \sin^2\vartheta_1, \quad \cos\vartheta-\cos\vartheta_0 = \alpha_1\cos^2\operatorname{am}(u+K)$$

des § 2. in der Form

$$(23)\quad \begin{cases} \cos(\varphi+\sigma) = -\dfrac{\alpha_1}{\varkappa\sin\vartheta}\cdot\sin\operatorname{am}(u+K)\cdot\Delta\operatorname{am}(u+K), \\ \sin(\varphi+\sigma) = \dfrac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta}\cdot\cos\operatorname{am}(u+K). \end{cases}$$

§ 5.

Der von der Folge der instantanen Drehaxen gebildete feste Kegel.

Die Neigungswinkel der instantanen Axe Θ der Drehung mit den festen Coordinatenaxen x, y, z sind gegeben durch die drei Gleichungen

$$\cos\Theta x = \cos\Theta x'\cdot\cos xx' + \cos\Theta y'\cdot\cos xy' + \cos\Theta z'\cdot\cos xz',$$

---

*) a. a. O. p. 121.

$$\cos\Theta y = \cos\Theta x' \cdot \cos yx' + \cos\Theta y' \cdot \cos yy' + \cos\Theta z' \cdot \cos yz',$$
$$\cos\Theta z = \cos\Theta x' \cdot \cos zx' + \cos\Theta y' \cdot \cos zy' + \cos\Theta z' \cdot \cos zz'.$$

Dabei sind $\cos\Theta x'$, $\cos\Theta y'$, $\cos\Theta z'$ durch $\frac{p}{\Theta}$, $\frac{q}{\Theta}$, $\frac{n}{\Theta}$ und die Neigungscosinus der beweglichen Axen Ox', Oy', Oz' gegen die festen Ox, Oy, Oz in Functionen der **Euler**'schen Winkel φ, ψ, ϑ in folgender Weise*) gegeben:

$$\cos xx' = \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi,\quad \cos yx' = \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,$$
$$\cos zx' = -\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$\cos xy' = \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,\quad \cos yy' = \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,$$
$$\cos zy' = -\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$\cos xz' = \sin\vartheta\sin\psi,\quad \cos yz' = \sin\vartheta\cos\psi,$$
$$\cos zz' = \cos\vartheta.$$

Setzt man diese Werthe in die drei obigen Gleichungen ein und bezeichnet die Componenten der Winkelgeschwindigkeit Θ längs der festen Axen x, y, z bezw. mit w, w', w'', so erhält man hiefür:

$$\begin{aligned} w &= \cos\vartheta\sin\psi(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + \cos\psi(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + n\sin\vartheta\sin\psi,\\ (24)\quad w' &= \cos\vartheta\cos\psi(p\sin\varphi + q\cos\varphi) - \sin\psi(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + n\sin\vartheta\cos\psi,\\ w'' &= -\sin\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + n\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen nimmt unter Berücksichtigung von (5) und (6) die Form an

$$w'' = \frac{n}{A}\,[A\cos\vartheta - C(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)];$$

nun ist

$$w'' = \Theta \cdot \cos\mu,$$

wo μ der Neigungswinkel zwischen der instantanen Drehaxe und der Axe Oz der Schwere; es folgt also für diesen Winkel

$$(25)\qquad \cos\mu = \frac{n}{A} \cdot \frac{A\cos\vartheta - C(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}{\sqrt{n^2 + \frac{2P\gamma}{A}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}}$$

$$= n \cdot \frac{\cos\vartheta_0 + \left(1 - \frac{C}{A}\right)\alpha_1\cos^2\mathrm{am}(u+K)}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2 \cdot \frac{\alpha_1}{2\varepsilon}\cos^2\mathrm{am}(u+K)}},$$

wie leicht aus dem Werthe von $\Theta = \sqrt{p^2 + q^2 + n^2}$ und den Formeln des § 2. erkannt wird.

Man sieht, dass μ wieder periodisch mit der Periode $2K$ von u ist; für $u = 0$ wird $\mu = \mu_0 = \vartheta_0$, für $u = K$

---

*) Poisson, traité de mécanique. II, no. 378.

$$(26)\qquad \cos\mu_1 = \frac{\cos\vartheta_0 + \left(1-\frac{C}{A}\right)\alpha_1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{A}\right)^2\cdot\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}}} = \frac{\cos\vartheta_1 - \frac{C}{A}\alpha_1}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{A}\alpha_1\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2\vartheta_1}}}.$$

μ_0 und μ_1 sind offenbar die extremen Werthe von μ. Denn hätte $\cos\mu$ ein Maximum (Minimum) für einen zwischen $u=0$ und $u=K$ gelegenen Werth von u, so hätte es offenbar ein zweites für $2K-\mu$, und es müsste zwischen den beiden Werthen ein Minimum (Maximum) eingetreten sein, und zwar, wegen des symmetrischen Verlaufs von $\cos\mu$, für den Parameterwerth $u=K$. Differenziren wir aber $\cos\mu$ (25) nach $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0$, so ergibt die Derivirte entweder ein Maximum oder ein Minimum für einen zwischen $u=0$ und $u=K$ gelegenen Werth, niemals aber zwei solche extreme Werthe. Wir schliessen demnach, dass μ zwei Grenzwerthe besitzt, μ_0 für $u=0$, μ_1 für $u=K$.

Von diesen beiden Werthen kann jeder der grössere sein; die Ungleichungen $\cos\mu_1 \lesseqgtr \cos\mu_0$ d. i. $\lesseqgtr \cos\vartheta_0$ zeigen, dass $\mu_1 \gtrless \mu_0$, je nachdem

$$(27)\qquad \alpha_1\left(1-\frac{C}{A}\right)^2 + 2\left(1-\frac{C}{A}\right) \lesseqgtr \left(\frac{C}{A}\right)^2\cdot\frac{\alpha_1\cos^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_1},$$

ist. $\cos\mu_1$ kann ferner sein Zeichen wechseln, nämlich für

$$\cos\vartheta = \frac{C\cos\vartheta_0}{C-A},$$

es kann also der Winkel μ_1 einen rechten übersteigen.

Fassen wir das Bisherige zu einem Satz zusammen, so können wir sagen:

Der feste Kegel, der von den instantanen Drehaxen gebildet wird, ist zwischen zwei Kreiskegeln um die Axe der Schwere eingeschlossen. Die halben Winkelöffnungen dieser Kegel sind durch die Anfangslage $\mu_0=\vartheta_0$ der instantanen Drehaxe und durch die Neigung μ_1 (26) gegeben, wobei $\mu_1 \gtrless \mu_0$ (27) sein kann. Die Kegel selbst können beide um dieselbe Richtung der Verticalen oder um die entgegengesetzten Richtungen derselben beschrieben erscheinen.

Suchen wir die Basis des festen Kegels der instantanen Drehaxen d. h. die Herpolhodie, so folgt zunächst aus den zwei ersten Gleichungen (24) und den Gleichungen (g)

$$w\cos\psi - w'\sin\psi = p\cos\varphi - q\sin\varphi = \varrho\cos(\varphi+\sigma),$$

$$w\sin\psi + w'\cos\psi = \cos\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + n\sin\vartheta = \varrho\sin(\varphi+\sigma)\cos\vartheta + n\sin\vartheta.$$

Nennen wir den Winkel zwischen der Axe Ox und dem Radiusvector $\mathrm{P}=\sqrt{w^2+w'^2}$ v, so schreibt sich

$$(28)\quad \begin{cases} \mathsf{P}\cdot\cos(\nu+\psi) = \varrho\cos(\varphi+\sigma), \\ \mathsf{P}\cdot\sin(\nu+\psi) = \varrho\sin(\varphi+\sigma)\cos\vartheta + n\sin\vartheta, \\ \text{Dabei ist} \\ \qquad\qquad \mathsf{P} = \sqrt{\Theta^2 - w''^2}. \end{cases}$$

Sowohl P als $\cos(\nu+\psi)$ und $\sin(\nu+\psi)$ ist periodisch mit der Periode $2K$ von u; für $u=0$ ist (18), (19), (23)

$$\varrho = 0, \quad \sin(\varphi+\sigma) = 0,$$

also

$$\cos(\nu+\psi) = 0, \quad \nu+\psi = 90^0, \quad \mathsf{P} = \mathsf{P}_0 = n\sin\vartheta_0; \quad \text{für } u = K,$$

$$\varrho = \varrho_1, \quad \cos(\varphi+\sigma) = 0,$$

also

$$\cos(\nu+\psi) = 0, \quad \nu+\psi = 90^0, \quad \mathsf{P} = \mathsf{P}_1 = \varrho_1\cos\vartheta_1 + n\sin\vartheta_1.$$

Es ist also zu den Zeiten $0, \frac{K}{m}, \frac{2K}{m}$ der Winkel zwischen der Horizontalprojection P der Drehungsaxe Θ und der Knotenlinie ein rechter, jener also zwischen P und der Horizontalprojection der Figuraxe 0 d. h.

Zu den Zeiten $0, \tau = \frac{K^2}{m}, 2\tau, 3\tau \ldots$ *liegen mit der Axe der Schwere die Axen der Figur und der instantanen Drehung, somit auch die Axe des anregenden Kräftepaares in einer Ebene. Für* $\tau = 0$ *oder gerade Vielfache von* τ *fallen dabei die drei letzten Axen in eine Gerade zusammen.*

Erinnert man sich dessen, was in § 1. über die gegenseitige Lage der Axen des Kräftepaars, der instantanen Drehung und der Figur gesagt wurde, und beachtet, dass aus (26) stets

$$\cos\mu_1 < \cos\vartheta_1, \quad \text{also} \quad \mu_1 > \vartheta_1$$

folgt, so sieht man:

Die Axe $O\Theta$ *der Drehung fällt zu den Zeiten* $\tau, 3\tau, 5\tau \ldots$ *stets über den von der Axe* Oz *der Schwere und jener* Oz' *der Figur gebildeten Winkelraum hinaus und es wird die Lage der im vorigen Satz erwähnten vier Axen durch die auf der nächsten Seite folgenden Figuren klargelegt.*

Der Endpunkt der instantanen Drehaxe ist dabei von der Verticalen für $u = 0$ bezw. $u = K$ um

$$\mathsf{P}_0 = n\sin\vartheta_0 \quad \text{resp.} \quad \mathsf{P}_1 = \varrho_1\cos\vartheta_1 + n\sin\vartheta_1$$

entfernt. Derselbe bewegt sich also zwischen zwei zur Verticalaxe senkrecht stehenden Kreisen mit den Radien P_0 und P_1, und es ist

$$\mathsf{P}_1 \gtrless \mathsf{P}_0, \text{ je nachdem (27) } \alpha_1\left(1-\frac{C}{A}\right)^2 + 2\left(1-\frac{C}{A}\right) \lesseqgtr \left(\frac{C}{A}\right)^2\cdot\frac{\alpha_1\cos^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_1}$$

ist.

Die Horizontalprojection seiner Bahn ist aus (28) bestimmt, da sich P, ϱ, $(\varphi + \sigma)$ und ψ, also auch v in Functionen der Zeit bestimmen; die Gleichungen (28) sind sonach die Gleichungen der Projection der Herpolhodie auf eine horizontale Ebene und unter der aufgestellten Form mit Berücksichtigung der Relationen (10), (12), (18), (23) der Discussion leichter zugänglich als nach wirklicher Einführung des Parameters u. Aus ihnen folgt:

dP wird 0 für $u = 0$ und $u = K$, nicht aber dv, so dass also der Radiusvector P für $u = 0$ und $u = K$ Tangente an die Curve wird, und Spitzen niemals auftreten können.

für $A < C$:

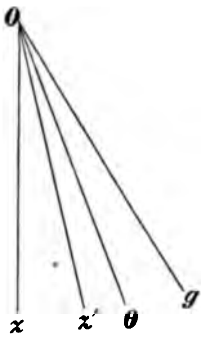


Fig. 3.

für $A > C$:

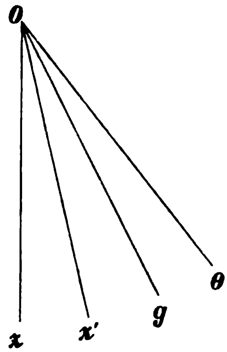


Fig. 4.

Fragt man nach den Wendepunkten der Horizontalprojection der Herpolhodie, so gibt die bekannte Bedingung über deren Vorhandensein dahin Aufschluss, dass solche existiren können — im Gegensatze zu dem Problem der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt, bei welchem ich in meiner eingangs citirten Dissertation die Nichtexistenz von Wendepunkten in der ebenen Herpolhodie hatte nachweisen können.

Auf Grund der erhaltenen Resultate können wir nun die Sätze aussprechen:

Die Herpolhodie d. h. die Curve, die von den Endpunkten der instantanen Drehaxen des festen Kegels, auf welchem der bewegliche Kegel sich abrollt, gebildet wird, ist eine doppelt gekrümmte Curve, welche in der Weise zwischen zwei zur Verticalaxe senkrechten Kreisen verläuft, dass sie abwechselnd beide Kreise tangirt. Diese Kreise können auf derselben oder auf verschiedener Seite des Unterstützungspunktes O liegen, und es kann sowohl der durch $u = 0$ *dargestellte als der für* $u = K$ *giltige der grössere sein. Die Horizontalprojection der Curve kann Wendepunkte besitzen oder stets im selben Sinne gekrümmt verlaufen.*

§ 6.

Numerische Berechnungen und specielle Fälle.

Die ungefähre Gestalt der horizontalen Projection des vom Schwerpunkt des Gyroskops während der Bewegung durchlaufenen Weges war aus den Differentialgleichungen (12) und (17) zu ersehen und deshalb bekannt, nachdem man einmal angefangen hatte, sich mit dem Gyroskope zu beschäftigen*). Die Durchrechnung der genauen, von Lottner aufgestellten Formeln für ein wirkliches Gyroskop, dessen Schwerpunkt oberhalb des Unterstützungspunktes gelegen, hat Franke**) gegeben; derselbe findet, wenn die Masse des Gyroskops

$$m = 121{,}41 \cdot \pi,$$

die Entfernung von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt

$$\gamma = 4{,}88,$$

das Trägheitsmoment um die Axe der Figur

$$C = 1230{,}22 \cdot \pi,$$

jenes um eine Axe des Aequators

$$A = 3659{,}16 \cdot \pi,$$

die Winkelgeschwindigkeit um die Figuraxe

$$n = 150 \cdot 2\pi,$$

endlich die Anfangsneigung der Figuraxe gegen die Verticale

$$\vartheta_0 = 30^0$$

beträgt, für die Winkel

$$\vartheta_1 = 30^0\, 5'\, 28'', \qquad \psi_K = 0^0\, 13'\, 40'',93$$

und für die Zeit, während welcher die Figuraxe von der Lage ϑ_0 in die von ϑ_1 übergeht

$$\tau = 0{,}0099 \text{ Secunden.}$$

Diese Resultate zeigen, dass die Bewegung der Figuraxe gegen die Verticale ungeheuer schnell, die Bewegung der Linie der Knoten ungeheuer langsam und die Zone, innerhalb deren sich die Bewegung des Schwerpunktes vollzieht, sehr schmal ist. Die Horizontalprojection der Bahn des Schwerpunktes für diesen Fall ist beiläufig durch Fig. 11 dargestellt.

Die letztere kann natürlich, der Kleinheit der Werthe halber, nicht gut gezeichnet werden; wir führen deshalb, um die auftretenden Formen besser sichtbar zu machen, bequemere Werthe der Constanten in die Rechnung ein, unbekümmert, ob der dadurch repräsentirte Fall physikalisch realisirbar ist oder nur für ein ideales Gyroskop Gültigkeit hat.

---

*) Vergl. die Figuren von: Jullien, problèmes de mécanique rationnelle, t. II., p. 186 der 2. Aufl. — Fink, note sur la toupie. Nouv. Annales de Math. 1850, p. 315. — Stamkart, Ueber die Bewegung eines Kreises etc. Poggend. Ann. 1853, I., 462—467. (Weitere Notizen s. man in Gilbert's: Etude historique et critique etc. Bruxelles, bei Hayez, 1878, 8⁰.)

**) Ueber die Bewegung rotirender Kreisel. Programme des Gymnasiums zu Seehausen i|A. 1873. 1874.

I. Horizontalprojection der Schwerpunktsbahn.

Wir setzen $\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4 A P \gamma} = 1$; dadurch reduciren sich α_1, $\varkappa$, $\sin \operatorname{am}(\beta_1, \varkappa')$ u. s. w. bedeutend. Rechnen wir den Anfangswinkel der Figuraxe gegen die Verticale stets von $+Oz$ an, so ergeben sich für:

1. $\vartheta_0 = 0^0$, $\vartheta_1 = 0^0$, $v_0 = \gamma \cdot 0$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0$, $\psi_K =$ unbestimmt,
2. $\vartheta_0 = 4^0$, $\vartheta_1 = 2^0{,}82815$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}06976$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}04934$ $\psi_K = 25^0{,}80204$.
3. $\vartheta_0 = 60^0$, $\vartheta_1 = 42^0{,}94427$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}86603$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}68128$, $\psi_K = 30^0{,}00198$. (Fig. 5)
4. $\vartheta_0 = 90^0$, $\vartheta_1 = 65^0{,}53023$, $v_0 = \gamma \cdot 1$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}91018$, $\psi_K = 35^0{,}88900$.
5. $\vartheta_0 = 100^0$, $\vartheta_1 = 73^0{,}40679$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}98481$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}95836$, $\psi_K = 38^0{,}98615$.
6. $\vartheta_0 = 103^0{,}65155$, $\vartheta_1 = 76^0{,}34845$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}97174$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}97174$, $\psi_K = 41^0{,}60476$.
7. $\vartheta_0 = 108^0$, $\vartheta_1 = 79^0{,}88816$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}95106$,
   $v_1 = \gamma \cdot 0{,}98447$, $\psi_K = 42^0{,}60476$.
8. $\vartheta_0 = 120^0$, $\vartheta_1 = 90^0$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}86603$,
   $v_1 = \gamma \cdot 1$, $\psi_K = 48^0{,}29317$. (Fig. 6)
9. $\vartheta_0 = 135^0$, $\vartheta_1 = 103^0{,}57000$, $v_0 = \gamma \cdot 0{,}70711$,
   $v_1 = 0{,}96330$, $\psi_K = 60^0{,}07751$.
10. $\vartheta_0 = 180^0$, $\vartheta_1 = 180^0$, $v_0 = \gamma \cdot 0$,
    $v_1 = \gamma \cdot 0$, $\psi_K =$ unbestimmt.

In den Fällen 1. — 4. ist der Schwerpunkt des Gyroskops unterhalb, in den Fällen 10. — 5. oberhalb des Unterstützungspunktes gelegen; dabei verweilt er in 9. und 10. ständig oben, erreicht in 8. die Horizontalebene, geht in den Fällen 7. — 5. herunter und beschreibt in seiner Horizontalprojection bei 7. eine Epicykloide, bei 6. einen Kreis, bei 5. eine Hypocykloide.

Zur Bestimmung *der Zeit* $\tau = \frac{m}{K}$, während welcher die Figuraxe von der Lage ϑ_0 in die Lage ϑ_1 übergeht, setzen wir ausser $\varepsilon = 1$ noch $\frac{P\gamma}{A} = 1$. Es wird in den 10 Fällen:

1. $\tau = 1{,}11072$. 2. $\tau = 1{,}11114$. 3. $\tau = 1{,}21433$. 4. $\tau = 1{,}37046$.
5. $\tau = 1{,}45771$. 6. $\tau = 1{,}48870$. 7. $\tau = 1{,}53803$. 8. $\tau = 1{,}68575$.
9. $\tau = 1{,}96579$. 10. $\tau = \infty$.

II. Polhodie.

Der *Radius* ϱ_1 des sie umschliessenden Kreises ist durch $\varepsilon = 1$, $\frac{P\gamma}{A} = 1$ und ϑ_0 bestimmt:

1. $\varrho_1 = 0$. 2. $\varrho_1 = 0{,}04935$. 3. $\varrho_1 = 0{,}68125$. (Fig. 7)
4. $\varrho_1 = 0{,}93138$. 5. $\varrho_1 = 0{,}95836$. 6. $\varrho_1 = 0{,}97173$.
7. $\varrho_1 = 0{,}98447$. 8. $\varrho_1 = 1$. 9. $\varrho_1 = 0{,}97208$.
10. $\varrho_1 = 0$.

Um den *Winkel* $\sigma_K = -\sigma'_K$ zu bestimmen, setze man ausser $\varepsilon = 1$ und $\frac{P\gamma}{A} = 1$ noch $\frac{C}{A} = \frac{1}{2}$, wodurch $n = 4$ wird.

1. $\sigma'_K = 190{,}90127$. 2. $\sigma'_K = 190^0{,}99144$. 3. $\sigma'_K = 208^0{,}72716$. (Fig. 7)
4. $\sigma'_K = 253^0{,}66504$. 5. $\sigma'_K = 249^0{,}98468$. 6. $\sigma'_K = 255^0{,}88829$.
7. $\sigma'_K = 264^0{,}36721$. 8. $\sigma'_K = 289^0{,}75107$. 9. $\sigma'_K = 337^0{,}89481$.
10. $\sigma'_K = \infty$.

In allen vorliegenden Fällen ist $\sigma'_K > \pi$; man kann natürlich durch passende Wahl der Constanten für σ'_K jeden beliebigen Werth erreichen und Figuren zeichnen, welche, wie Fig. 9, die blattförmige Gestalt der Polhodie deutlich darstellen.

III. Herpolhodie.

Der *Radius* P_0 des einen Grenzkreises wird durch $n = 4$ und ϑ_0 gegeben:

1. $\mathsf{P}_0 = 0$. 2. $\mathsf{P}_0 = 0{,}27903$. 3. $\mathsf{P}_0 = 3{,}46411$. (Fig. 8)
4. $\mathsf{P}_0 = 4$. 5. $\mathsf{P}_0 = 3{,}93923$. 6. $\mathsf{P}_0 = 3{,}88695$.
7. $\mathsf{P}_0 = 3{,}60423$. 8. $\mathsf{P}_0 = 3{,}46411$. 9. $\mathsf{P}_0 = 2{,}82843$.
10. $\mathsf{P}_0 = 0$.

Der *Radius* P_1 ist gegeben durch $\varepsilon = 1$, $\frac{P\gamma}{A} = 1$, $n = 4$, ϑ_0.

1. $P_1 = 0$. 2. $P_1 = 0{,}24765$, 3. $P_1 = 3{,}18919$. (Fig. 8)
4. $P_1 = 4{,}02651$. 5. $P_1 = 4{,}10711$. 6. $P_1 = 4{,}11581$.
7. $P_1 = 4{,}11071$. 8. $P_1 = 4$. 9. $P_1 = 3{,}59239$.
10. $P_1 = 0$.

Den *Winkel* ν_K erhält man aus $\nu_K = 90^0 - \psi_K$ und ϑ_0:

1. $\nu_K =$ unbestimmt. 2. $\nu_K = 64^0{,}19796$. 3. $\nu_K = 59^0{,}99802$. (Fig. 8)
4. $\nu_K = 54^0{,}11100$. 5. $\nu_K = 51^0{,}01385$. 6. $\nu_K = 48^0{,}81902$.
7. $\nu_K = 45^0{,}39524$. 8. $\nu_K = 41^0{,}70683$. 9. $\nu_K = 28^0{,}92249$.
10. $\nu_K =$ unbestimmt.

Da für den gezeichneten Fall 3. $\frac{P_1}{P_0} > \sin \nu_K$, so läuft also für diesen Fall die Horizontalprojection der Herpolhodie eher an den inneren Kreis an als die Tangente vom Ausgangspunkt aus, d. h. unsere dargestellte Curve besitzt Wendepunkte. Dieselbe kann auch ohne dieselben verlaufen, sie kann ferner auch ihren Ausgangspunkt auf dem inneren Kreis haben; ein ungefähres Beispiel dafür mag Fig. 10 bieten.

Was den *Winkel* μ_1 zwischen der Axe der instantanen Drehung und jener der Schwere angeht, so ist er bestimmt durch $\varepsilon = 1$, $\frac{C}{A} = \frac{1}{2}$, ϑ_0.

1. $\mu_1 = 0$. 2. $\mu_1 = 3^0{,}43986$. 3. $\mu_1 = 52^0{,}60724$.
4. $\mu_1 = 77^0{,}80649$. 5. $\mu_1 = 86^0{,}88023$. 6. $\mu_1 = 89^0{,}96996$.
7. $\mu_1 = 93^0{,}71836$. 8. $\mu_1 = 140^0{,}08213$. 9. $\mu_1 = 152^0{,}77373$.
10. $\mu_1 = 180^0$.

Bei der Zeichnung wurde der Abstand γ von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt $= 3$ und als Längeneinheit 30 mm angenommen.

Die *speciellen Fälle* haben hier, wo nur eine Drehung um die Axe der Figur stattgefunden hat, nicht viel Bemerkenswerthes.

Ist $\vartheta_0 = 0^0$ oder 180^0 und $\varepsilon = \frac{C^2 n^2}{4AP\gamma}$ beliebig, so findet die Drehung des Gyroskops um die Verticalaxe statt, welche die Stelle des rollenden und festen Kegels vertritt d. h. permanente Rotationsaxe ist.

Ist ϑ_0 beliebig und $\varepsilon = 0$. d. h. entweder $n = 0$ oder $P = \infty$ oder $\gamma = \infty$, d. h. erfolgt gar keine Drehung um die Figuraxe eines Gyroskops oder eine solche um ein unendlich schweres oder unendlich langes Gyroskop, so haben wir den einfachen Fall des Pendels. In den 2 letzteren Fällen vollzieht sich dabei die Bewegung der Figuraxe in die Verticale unendlich rasch. Der abrollende und der feste Kegel werden beidemal durch die auf der Axe der Figur und Schwere senkrechte Gerade repräsentirt.

Ist ϑ_0 beliebig und $\varepsilon = \infty$, d. h. $n = \infty$ oder $P = 0$ oder $\gamma = 0$, d. h. erfolgt die Drehung um die Figuraxe des Gyroskops mit unendlich grosser Geschwindigkeit oder besitzt der Rotationskörper kein Gewicht oder dreht er sich um seinen Schwerpunkt, so ist die Figuraxe permanente Rotationsaxe.

Ist endlich $2A = C$, d. h. ist das Gyroskop in eine unendlich dünne schwere Platte übergegangen, so hat dies nur Einfluss auf den beweglichen Kegel der instantanen Drehaxen, indem derselbe, da sich $\sigma = 0$ aus (18) ergiebt, in die Ebene der Figur übergegangen ist. Der feste Kegel nimmt keine besondere Gestalt dafür an.

Eine weit grössere Mannigfaltigkeit in diesen Specialfällen ergiebt sich natürlich, wenn auf das Gyroskop auch ein seitlicher Anstoss ausgeübt wird. Man kann dann beispielsweise die Bewegung unter der Voraussetzung untersuchen, dass die Neigung der Figuraxe gegen die Verticale stets sehr klein bleibt (Poisson a. a. O. Nr. 431) oder dass die Figuraxe einen Kreiskegel beschreibt. Im letzteren Falle sind auch der rollende und feste Kegel Rotationskegel und von Poinsot (Théorie des cônes circulaires roulants. Paris, 1853. 8°) untersucht worden.

München, im Juni 1881.

Ueber die Umkehrung des elliptischen Integrales.

Von

M. Pasch in Giessen.

Versteht man unter z eine complexe Veränderliche, unter $\varkappa$ eine complexe Zahl mit negativer Ordinate*), unter y die Function

$$y = \sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$$

und setzt die mit dem Anfangswerthe $y=1$ geradlinig ausgeführten Integrale**)

$$\int_0^1 \frac{dz}{y} = -\int_0^{-1} \frac{dz}{y} = A, \quad \int_0^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{y} = -\int_0^{-\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{y} = B,$$

so ist es bei der Umkehrung des elliptischen Integrales erster Gattung in Legendre's Normalform

$$\int_0^z \frac{dz}{y}$$

mit den Perioden $4A$ und $2(B-A)$ von Wichtigkeit, zu beweisen, dass der Quotient

$$(1) \qquad \frac{B-A}{A}$$

eine positive Ordinate besitzt***).

---

*) Der Fall eines reellen $\varkappa$ ist als Grenzfall zu betrachten; doch soll $\varkappa^2$ weder 0 noch 1 noch ∞ sein.

**) Ist $\varkappa$ reell, so wird für $\varkappa > 1$ die Integration von 0 bis 1 auf dem negativen und die von 0 bis -1 auf dem positiven, für $\varkappa < -1$ die Integration von 0 bis 1 auf dem positiven und die von 0 bis -1 auf dem negativen, für $\varkappa^2 < 1$ die Integration von 0 bis $\frac{1}{\varkappa}$ auf dem positiven und die von 0 bis $-\frac{1}{\varkappa}$ auf dem negativen Ufer der reellen Axe ausgeführt.

***) Vergl. Neumann, Abel'sche Integrale S. 368 f., Thomae, Complexe Functionen S. 60 ff., Königsberger, Elliptische Functionen I, S. 295 ff.

Um das erwähnte Integral zu studiren, kann man von den Punkten $1, \frac{1}{\varkappa}, -1, -\frac{1}{\varkappa}$ aus Querschnitte $q_1 q_2 q_3 q_4$ ziehen, welche sich geradlinig in das Unendliche erstrecken und in ihren Rückwärtsverlängerungen durch den Nullpunkt hindurchgehen würden. In der nach Ausscheidung dieser Querschnitte zurückbleibenden Fläche soll y als eine mit dem Werthe $y = 1$ bei $z = 0$ beginnende, eindeutige und stetig sich verändernde Function von z betrachtet werden und u das Integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{y} = -\int_0^{-z} \frac{dz}{y}$$

bedeuten. Wenn (für $\alpha = 1, 2, 3, 4$) z_α auf q_α liegt und zwar so, dass $z_3 = -z_1$, $z_4 = -z_2$, so ist

$$(2) \qquad \int_0^{\overset{-}{z_1}} \frac{dz}{y} = 2A - \int_0^{\overset{+}{z_1}} \frac{dz}{y} = 2A + \int_0^{\overset{+}{z_3}} \frac{dz}{y},$$

$$(3) \qquad \int_0^{\overset{+}{z_2}} \frac{dz}{y} = 2B - \int_0^{\overset{-}{z_2}} \frac{dz}{y} = 2B + \int_0^{\overset{-}{z_4}} \frac{dz}{y},$$

wobei positive und negative Ufer der Querschnitte in bekannter Weise unterschieden sind. Integrirt man von 0 bis ∞, ohne einen Querschnitt zu überschreiten, so kommt

$$(4) \qquad +A+B, \quad -A+B, \quad -A-B, \quad +A-B,$$

je nachdem der Integrationsweg zwischen q_1 und q_2, oder zwischen q_2 und q_3, oder zwischen q_3 und q_4, oder zwischen q_4 und q_1 verläuft.

Die Beträge von u haben ein endliches Maximum. Dagegen bedecken nach den Lehren der Functionentheorie, insbesondere nach den Sätzen über die Differentialgleichungen*), die sämmtlichen Werthe, welche das Integral

$$U = \int_0^z \frac{dz}{y}$$

bei freier Beweglichkeit der Variablen z annimmt, die ganze Ebene; wo auch der endliche Werth U_1 liegen mag, immer giebt es eine in gewisser Umgebung von U_1 convergente Reihe, welche z als Function von U darstellt und entweder nur positive ganze Potenzen von $U - U_1$ oder ausser solchen Potenzen noch negative in endlicher

---

*) Vergl. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques 1875. Nr. 208. 219. — Die Werthe von u bilden ein ganz im Endlichen gelegenes Continuum, bei welchem die Begrenzung mitzurechnen ist; folglich sind auch bei dem Gebiete der U alle Punkte der Begrenzung mitzurechnen.

Anzahl enthält. Mithin ist z eine eindeutige Function von U. Wird also z wieder wie früher beschränkt und ein zusammenhängendes, zunächst ganz im Endlichen gelegenes und die Querschnitte ausschliessendes Gebiet G (mit Einschluss der Begrenzung) der Variablen z betrachtet, so ist z eine eindeutige Function der entsprechenden u; aus jeder einfachen z-Linie wird eine einfache u-Linie, insbesondere aus der Begrenzung von G eine einfache geschlossene Linie l. Jedem z im Innern von G entspricht ein von der Linie l umgebenes u; die Linie l ist die vollständige Begrenzung des u-Gebietes. Durchläuft z die Begrenzung von G in positiver Richtung, so wird die Linie l von u ebenfalls in positiver Richtung durchlaufen.

Dies vorausgeschickt, lässt sich das Zeichen der Ordinate des Quotienten (1) auf folgende Weise bestimmen. Wir dehnen das Gebiet G bis an die Querschnitte aus und nennen T das entsprechende Gebiet der Variablen u, S die Begrenzungslinie von T. Geht z auf dem positiven Ufer des Querschnittes q_1 von 1 bis ∞, dann auf dem negativen Ufer des Querschnittes q_2 von ∞ bis $\frac{1}{\varkappa}$, auf dem positiven Ufer des Querschnittes q_2 von $\frac{1}{\varkappa}$ bis ∞ u. s. w., bis der Punkt 1 wieder erreicht wird, so ist dies als ein positiver Umlauf um G anzusehen, während dessen u die Linie S in positiver Richtung zurücklegen muss. Die Linie S kann man an dem Parallelogramm verfolgen, dessen Ecken in die Punkte (4) fallen, dessen Seiten daher in den Punkten B, $-A$, $-B$, A halbirt werden. Variirt z von 1 bis ∞ auf dem positiven Ufer von q_1, so geht u von A nach $A+B$ auf einer Linie s; variirt z von ∞ bis $\frac{1}{\varkappa}$ auf dem negativen Ufer von q_2, so geht u von $A+B$ nach B; später durchläuft u die entgegengesetzten Werthe, von $-A$ über $-A-B$ nach $-B$, während z von -1 bis ∞ auf dem positiven Ufer von q_3 und von ∞ bis $-\frac{1}{\varkappa}$ auf dem negativen Ufer von q_4 variirt. Verschiebt man die Abbildung des positiven Ufers von q_3 um $2A$, so erhält man nach (2) die Abbildung des negativen Ufers von q_1, von $A-B$ bis A; verschiebt man die Abbildung des negativen Ufers von q_4 um $2B$, so erhält man nach (3) die Abbildung des positiven Ufers von q_2, von B bis $-A+B$. Die entgegengesetzten Werthe geben die Abbildung des negativen Ufers von q_3, von $-A+B$ bis $-A$, und des positiven Ufers von q_4, von $-A-B$ bis $-B$. Die Richtung auf S von A über $A+B$ nach B u. s. w. ist positiv.

Ist s' die gerade Strecke von A nach $A+B$, so setzen s und s eine geschlossene Linie σ zusammen, *welche ganz in einem den Nullpunkt O ausschliessenden Gebiete liegt.* Denn sonst gäbe es ein die

Null umschliessendes Flächenstück, dessen Begrenzung ganz zu σ gehört. Sollten innerhalb dieses Flächenstückes sich noch Theile von S befinden, so verkleinere man dasselbe, bis dies nicht mehr der Fall ist, während O immer umschlossen bleiben muss. Das so entstehende Flächenstück T' kann nicht mit T identisch sein, folglich seine Begrenzung S' nicht mit S; demnach gehört von S' ein Theil s_1 zu s', der Rest S_1 zu S. Jeder Punkt im Innern von T' liegt im Innern von T, also ist T' ein Theil von T. Sucht man zu allen Punkten des Gebietes T' die entgegengesetzten Werthe auf, so entsteht ein Gebiet T''; insbesondere gehe S' in S'', s_1 in s_2, S_1 in S_2 über, so dass S_2 ein Theil von S ist und S'' aus s_2 und S_2 besteht. Da T'' wieder O umschliesst, so schneiden sich S' und S''; aber s_1 und s_2 schneiden sich nicht, ebensowenig S_1 und S_2; folglich müssen s_1 und S_2, s_2 und S_1 sich schneiden. Dann liegt aber ein Stück von S_2 im Innern von T', also im Innern von T, während es doch zu S, also zur Begrenzung von T gehört.

Wenn man daher von der Linie S das Stück s hinwegnimmt und durch die gerade Strecke s' von A nach $A + B$ ersetzt, so bleibt der Umlauf von A über $A + B$ nach B u. s. w. positiv. Dasselbe gilt zwischen $A + B$ und B, zwischen B und $-A + B$, u. s. w. Demnach ist die Bewegung auf den geraden Seiten des Parallelogrammes von A über $A + B$ nach B positiv, ebenso der hohle Winkel AOB. Daraus folgt aber, dass der Quotient $B : A$ und folglich auch der Quotient (1) eine positive Ordinate hat.

Giessen, Januar 1880.

Ueber die conforme Abbildung von Flächen.

Von

Felix Klein in Leipzig.

In einer kleinen Schrift, welche demnächst im Teubner'schen Verlage erscheinen wird*), habe ich, allerdings nur mit heuristischen Mitteln, allgemeine Sätze über die conforme Abbildung von Flächen aufgestellt, welche in dieser Form explicite bisher nicht bekannt waren. Den Anfang machen die allgemeinsten *geschlossenen* Flächen. Ist p die Maximalzahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte, welche man auf einer solchen Fläche ziehen kann, so giebt es, für $p > 1$, $6p-6$ bei beliebiger conformer Umgestaltung unveränderliche Constante der Fläche. Ist $p = 1$, so wird die Zahl dieser Constanten gleich 2; für $p=0$ ist sie gleich Null, so dass zwei geschlossene Flächen $p=0$ allemal auf einander abbildbar sind, wie dies von anderer Seite bekannt ist**). Diese Zahlen reduciren sich nun je auf die Hälfte, wenn man sich auf eine besondere Flächenclasse, die sogenannten *symmetrischen* Flächen, beschränkt. Es sind das solche Flächen, welche durch eine mit Umlegung der Winkel verbundene conforme Transformation von der Periode Zwei in sich selbst übergeführt werden können. Uebrigens zerfallen die symmetrischen Flächen desselben p nach der Zahl und Art ihrer Uebergangscurven, d. h. derjenigen Curven, die bei der symmetrischen Umformung ungeändert bleiben, in getrennte Arten. Einmal hat man das Theorem, dass die Zahl π dieser Curven einen beliebigen Zahlenwerth von 0 bis $p+1$ annehmen kann. Sodann hat man noch eine doppelte Möglichkeit zu unterscheiden. Die π Uebergangscurven können entweder so liegen, dass die Fläche, längs derselben zerschnitten, in zwei symmetrische Stücke zerfällt, oder aber so, dass ein Zerfallen bei der genannten Operation überhaupt nicht eintritt. Für $\pi = p+1$ hat man immer eine Fläche der ersten, für $\pi = 0$ selbstverständlich eine Fläche der zweiten Art. Ist $p - \pi$ gerade, so hat man ebenfalls nothwendig eine Fläche der zweiten Art. In allen übrigen Fällen kann man nach Belieben eine Fläche der ersten oder der zweiten Art construiren. — Unter die mit diesen Angaben erledigten symmetrischen Flächen subsumiren sich nun als specielle Fälle zwei Flächenarten von scheinbar viel allgemeinerem Charakter: die gewöhnlichen *berandeten* Flächen und die *Doppelflächen**), mögen letztere berandet sein oder nicht. Hierzu dient eine Auffassung, auf welche ich, so weit sie die Randcurven betrifft, durch eine gelegentliche Unterredung mit Herrn Schwarz geführt worden bin.**) Man kann eine Fläche in der Art ansehen, dass man ihre *beiden* Flächenseiten in Betracht zieht und sich vorstellt, dass letztere vermöge der Randcurven, sofern solche existiren, mit einander verbunden sind. Die so entstehende Gesammtfläche bildet in den beiden hier in Rede stehenden Fällen ein zusammenhängendes Ganzes. Sie stellt dann eine *symmetrische* Fläche von besonderer Gestalt vor: es entsprechen sich symmetrisch je zwei übereinanderliegende Punkte der beiden Flächenseiten; die Randcurven sind die Uebergangscurven. Offenbar subsumiren sich in diesem Sinne die gewöhnlichen berandeten Flächen unter die symmetrischen Flächen der ersten, die Doppelflächen unter diejenigen der zweiten Art. Dass dabei in den Randcurven eine Unstetigkeit des Krümmungsradius eintritt, hindert in keiner Weise die Anwendbarkeit der für symmetrische Flächen überhaupt gewonnenen Ergebnisse. Ist p' die Zahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte, welche man auf der einen Seite einer gewöhnlichen berandeten Fläche ziehen kann, ist andererseits P die entsprechende Zahl für die aus den beiden Seiten einer Doppelfläche gebildete Gesammtfläche, bezeichnet endlich π die Zahl der Randcurven, so hat man in den auf symmetrische Flächen bezüglichen Formeln in dem einen Falle das p durch $2p' + \pi - 1$, in dem anderen durch $P + \pi$ zu ersetzen. Wegen der näheren Einzelheiten und der weiteren Frage, wie *oft* sich in jedem Falle die conforme Abbildung einer Fläche auf eine andere ermöglicht, sofern überhaupt eine solche Abbildung existirt, sei wiederholt auf die Eingangs erwähnte Schrift verwiesen.

---

*) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen.

**) Vergl. Schwarz in den Monatsberichten der Berliner Akademie aus dem Jahre 1870, p. 767 ff.

Leipzig, October 1881.

---

*) Doppelflächen sind solche Flächen, bei denen man durch continuirliches Fortschreiten über die Fläche hin von der einen Flächenseite zur anderen gelangen kann.

**) Ostern 1881.

O. Simony: Über neue Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Taf. I.

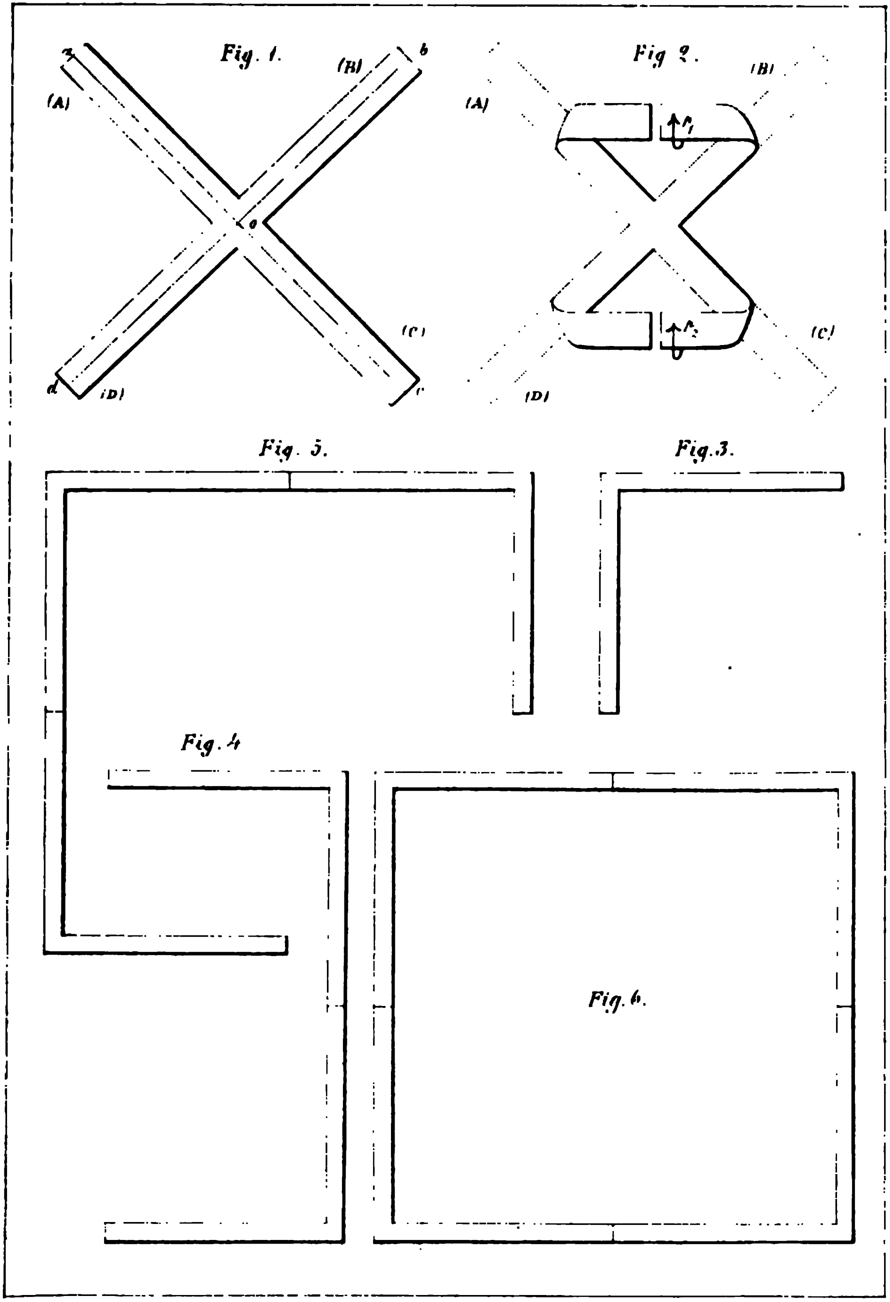


Fig. 1.
a
(A)
(B)
b
o
(C)
c
d
(D)
Fig. 2.
(A)
(B)
P_1
P_2
(C)
(D)
Fig. 5.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.

Autor. del.

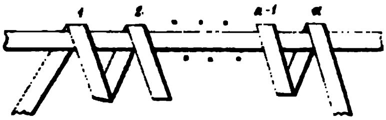


Fig. 7.

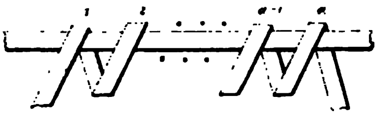


Fig. 8.

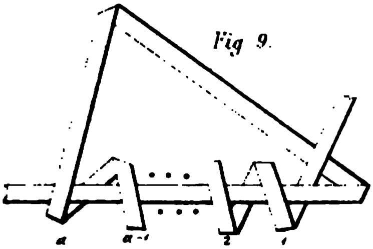


Fig. 9.

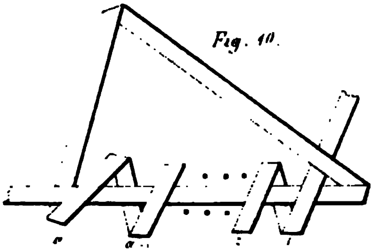


Fig. 10.

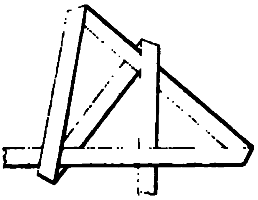


Fig. 11.

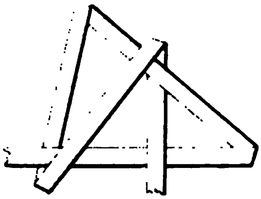


Fig. 12.

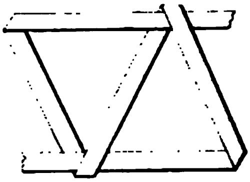


Fig. 13.

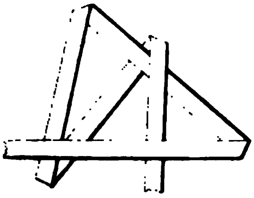


Fig. 14.

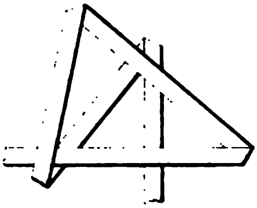


Fig. 15.

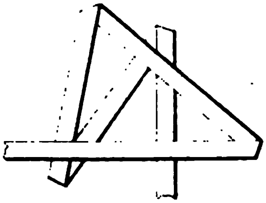


Fig. 16.

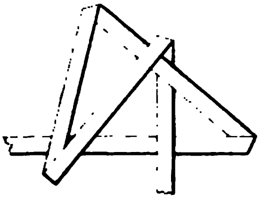


Fig. 17.

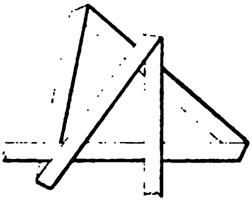


Fig. 18.

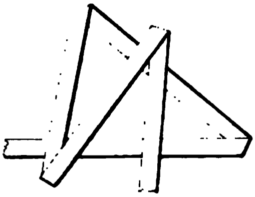


Fig. 19.

Autor. del.

Fig. 20.

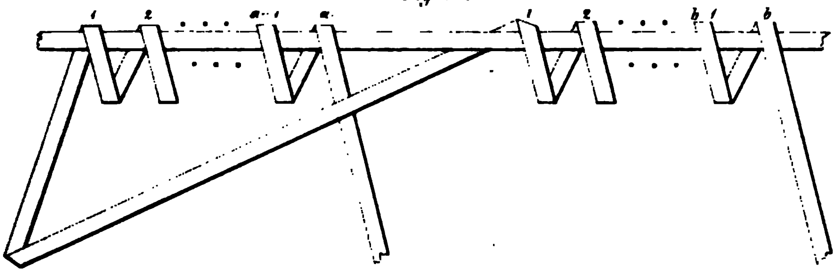

1
2
. . .
a-1
a
1
2
. . .
b-1
b

Fig. 21.

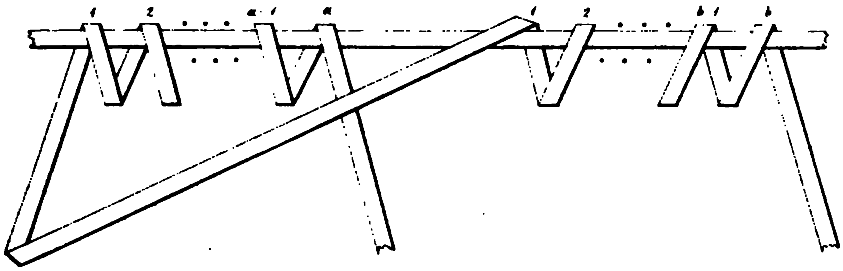

1
2
. . .
a-1
a
1
2
. . .
b-1
b

Fig. 22.

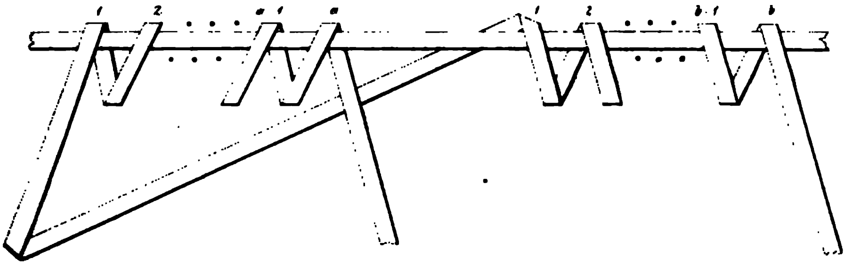
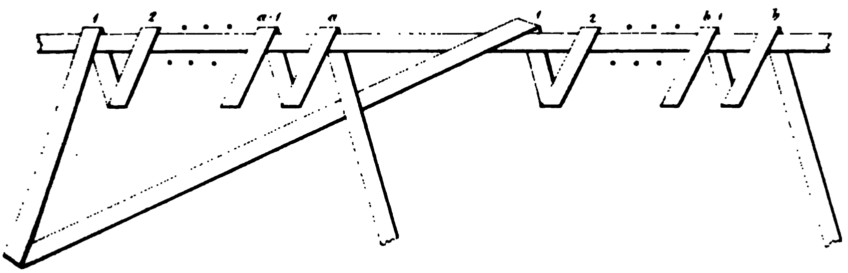

1
2
. . .
a-1
a
1
2
. . .
b-1
b

Fig. 23.


1
2
. . .
a-1
a
1
2
. . .
b-1
b

Autor del.

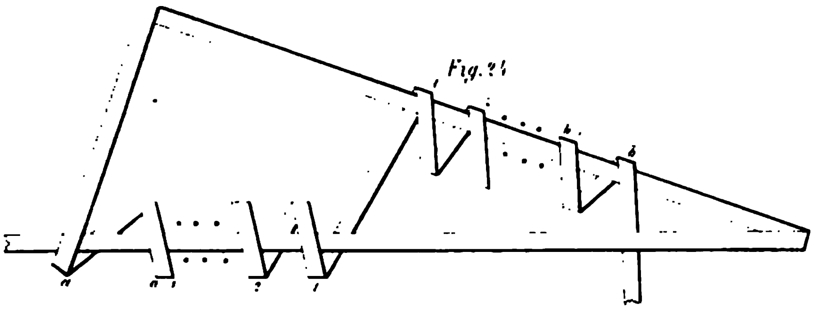


Fig. 24.
1
2
b₁
b
a
a₁
2
1

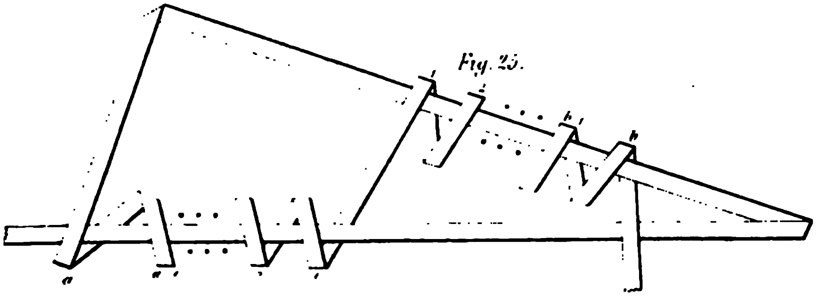


Fig. 25.
1
2
b₁
b
a
a₁
2
1

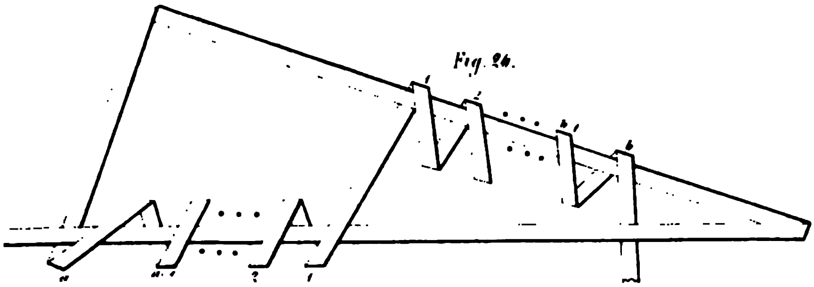


Fig. 26.
1
2
b₁
b
a
a₁
2
1

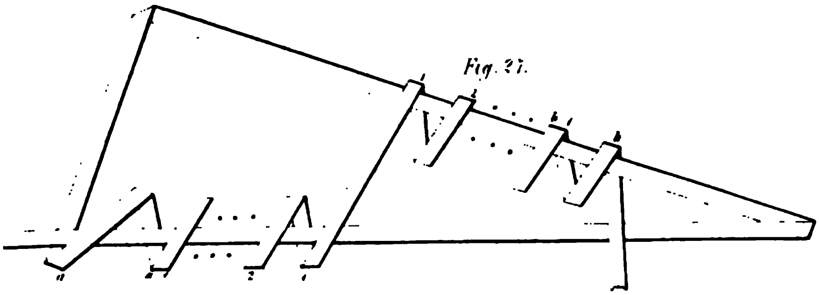


Fig. 27.
1
2
b₁
b
a
a₁
2
1

'or. del.

Fig. 28.

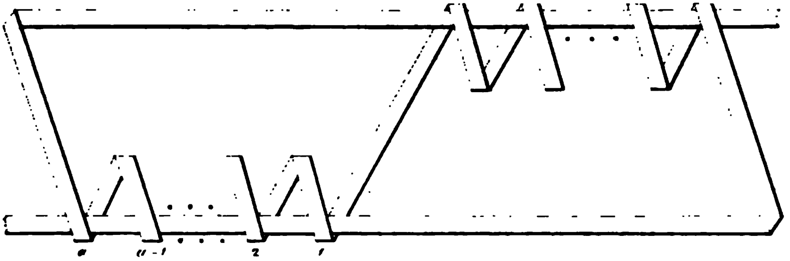

1
2
b-1
b
a
a-1
2
1

Fig. 29.

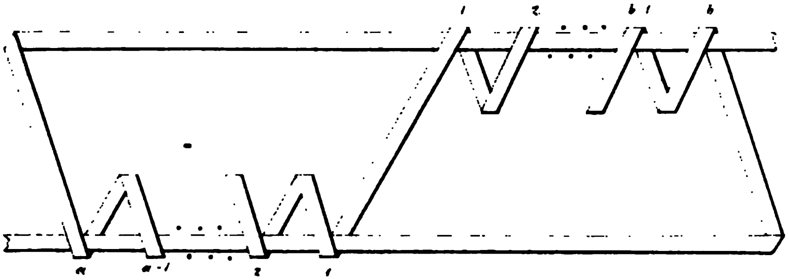

1
2
b-1
b
a
a-1
2
1

Fig. 30.

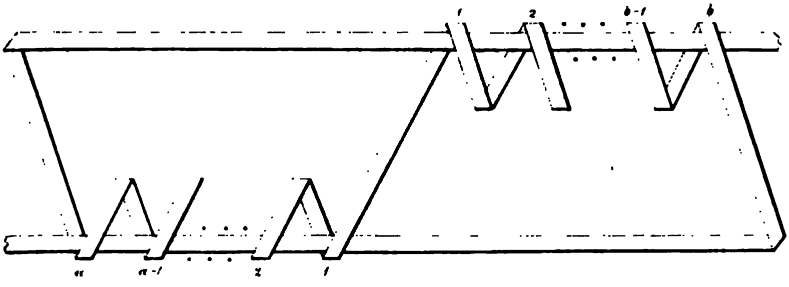
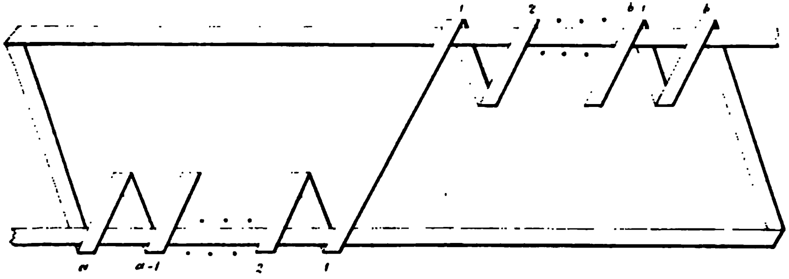

1
2
b-1
b
a
a-1
2
1

Fig. 31.


1
2
b-1
b
a
a-1
2
1

Autor. del.

Fig. 32.

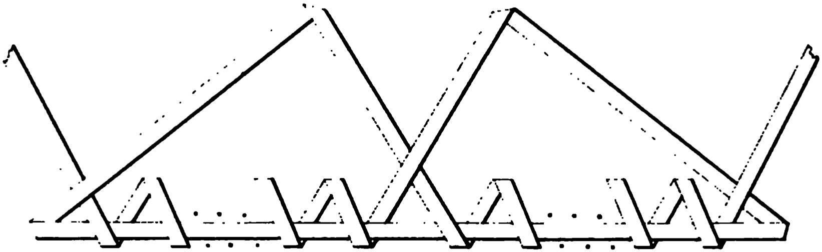

a
a 1
2
1
b
b 1
2
1

Fig. 33.

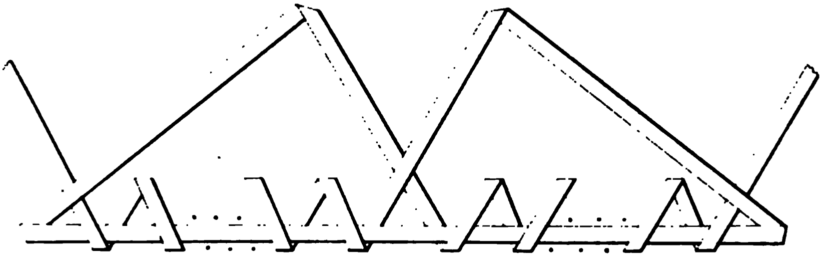

a
a 1
2
1
b
b 1
2
1

Fig. 34.

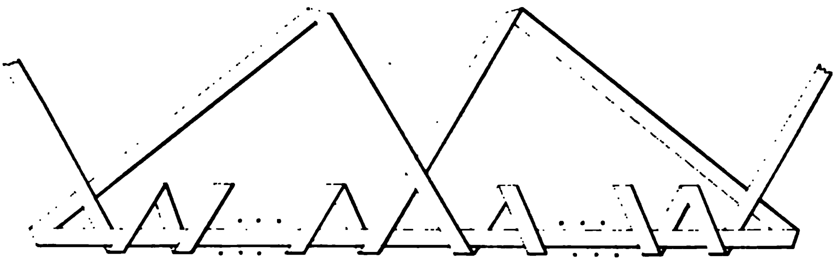
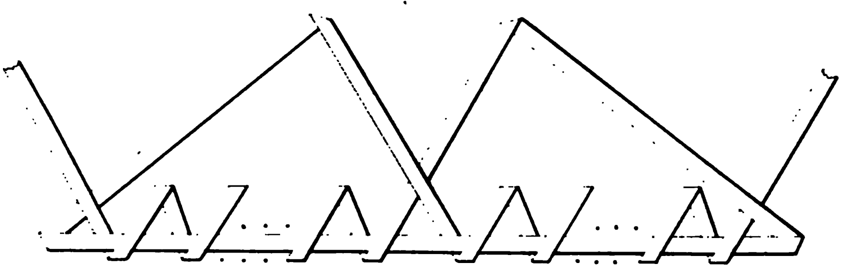

a
a 1
2
1
b
b 1
2
1

Fig. 35.


a
a 1
2
1
b
b-1
2
1

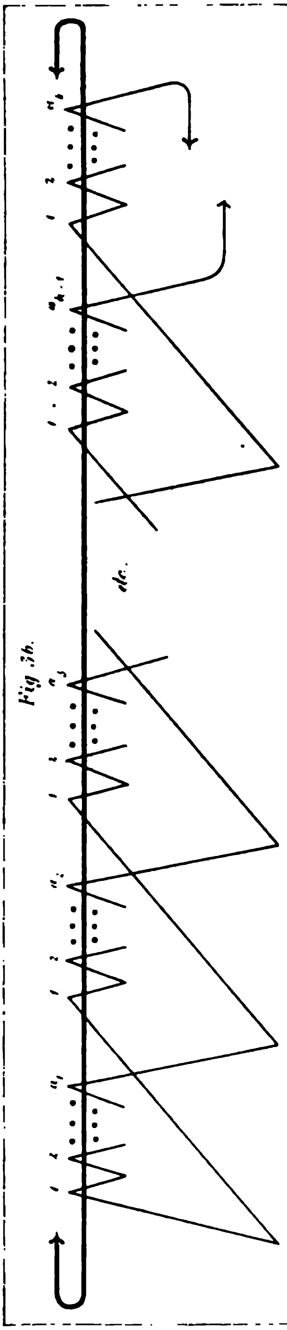


Fig. 36.

1
2
1
2
etc.
1
2
1
2
1
2

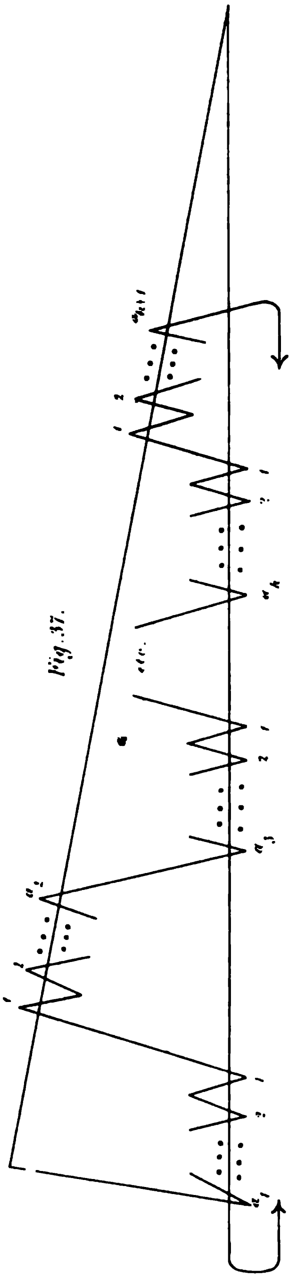


Fig. 37.

1
2
1
2
etc.
1
2
1
2

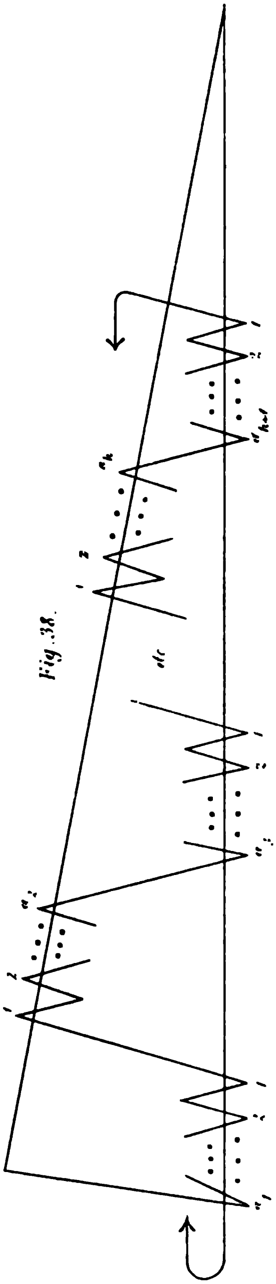


Fig. 38.

1
2
1
2
etc.
1
2
1
2

O. Simony: Über neue Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Taf. VIII.

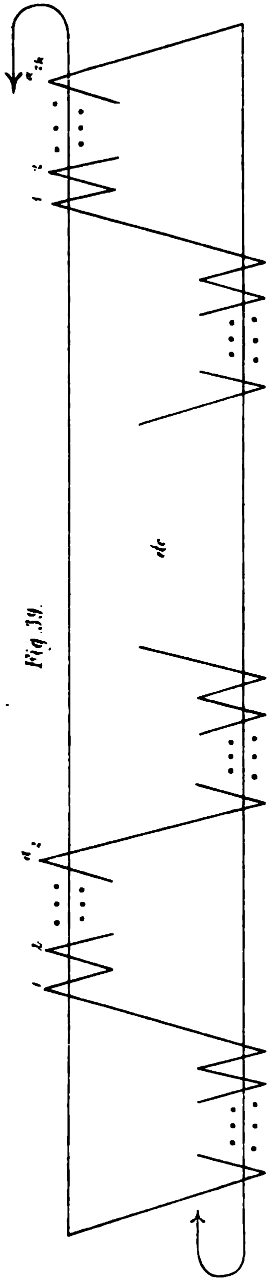

a_{2k}
1
2
a_{2k-1}
etc.
a_1
a_2
a_3

Fig. 39.

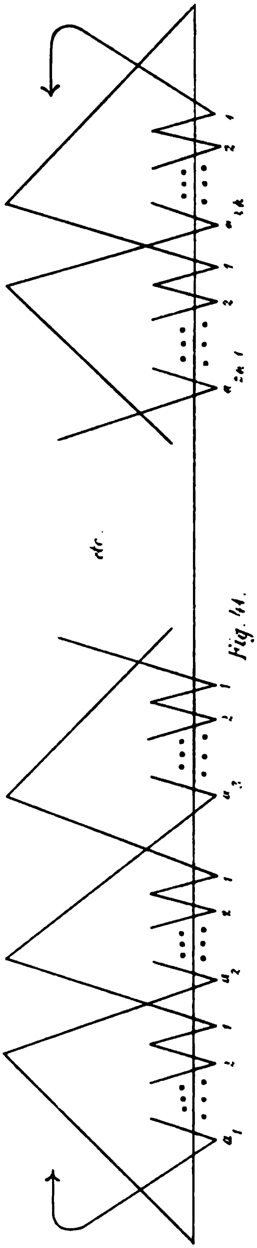

1
2
a_{2k}
a_{2k-1}
etc.
a_1
a_2
a_3

Fig. 40.

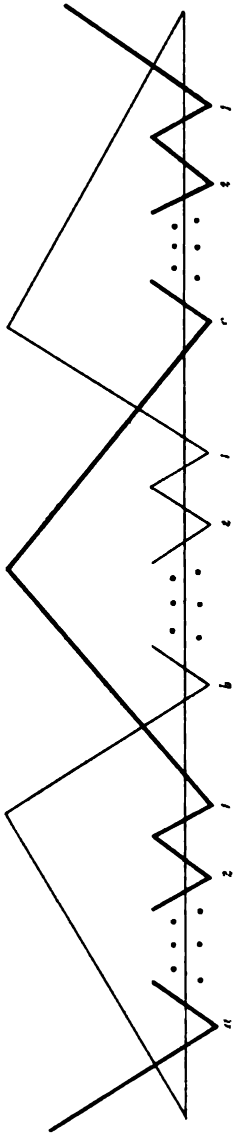


Fig. 41.

Autor. del.

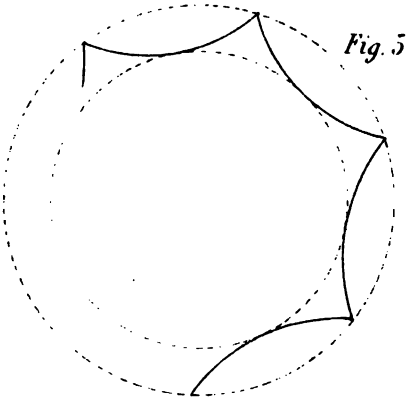


Fig. 5.

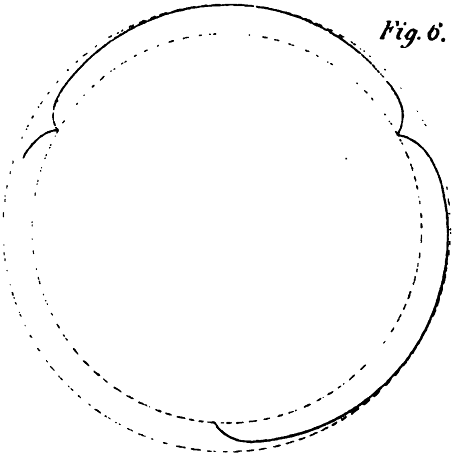


Fig. 6.

Fig. 7.

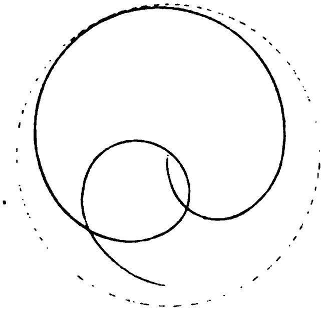


Fig. 8.

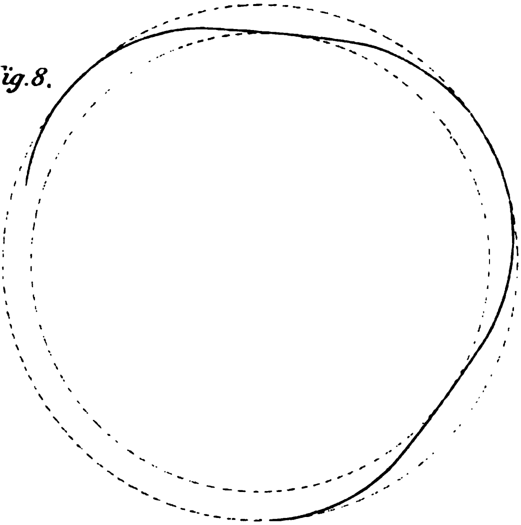
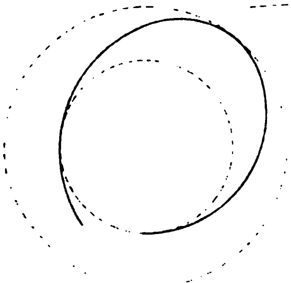


Fig. 10.



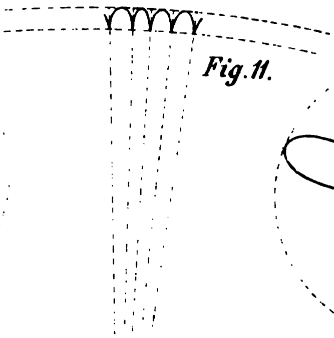
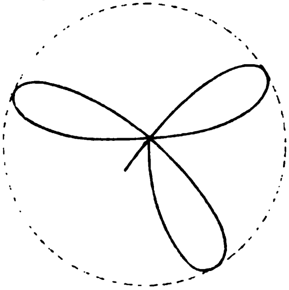


Fig. 11.

Fig. 9.



Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens.

Von

GIUSEPPE VERONESE in Chioggia.

Mehrere Mathematiker haben sich schon mit einigen Capiteln der n-dimensionalen Geometrie, meistentheils mit der Krümmungstheorie der Räume nach der Grundarbeit Riemann's „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen"*), beschäftigt.

Ich habe hier nicht die Absicht eine historische Uebersicht der bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand auseinanderzusetzen, sondern ich will nur hervorheben: erstens, dass alle diese Arbeiten analytische Form besitzen, und zweitens, dass man die n-dimensionale Geometrie, so viel mir scheint, noch nicht consequent als ein Hülfsmittel benutzt hat um die projectivischen Beziehungen in Räumen von verschiedenen Dimensionen, daher auch in der Ebene und dem gewöhnlichen Raume zu studiren.

Ich gebrauche in dieser Abhandlung die synthetische Methode und zwar diejenige Methode, die aus den beiden Fundamentaloperationen des Projicirens und Schneidens hervorgeht. Ich benutze auch hier und dort die analytische Methode, aber ich interpretire sie immer in anschaulicher Weise.

Um eine Configuration von $n+1$ Punkten, oder eine Curve, oder eine 2-dimensionale Fläche, die gewisse Singularitäten besitzt, im gewöhnlichen Raume R_3 zu studiren, ist es in vielen Fällen nützlich, zuvörderst eine Configuration oder ein Gebilde 1^{ter} oder 2^{ter} Dimension in dem n-dimensionalen Raume R_n zu suchen, aus welchem mittelst geeigneten Projicirens oder Schneidens das gegebene Gebilde in eindeutiger Weise entsteht. Und zugleich kann man nicht nur jene Configuration, Curve oder Fläche, sondern auch eine Classe dieser Gebilde studiren, welche sämmtlich mittelst des Projicirens oder Schneidens aus jenem Gebilde im Raume R_n hervorgehen. — Dieses Gebilde in R_n ist immer einfacher als das gegebene in R_3 und lässt sich daher viel besser behandeln.

---

*) Riemann's Werke pag. 254.

Betrachten wir z. B. $n+1$ beliebige Punkte einer Ebene R_2 oder eines Raumes R_3, so kann man sie als Projectionen der $n+1$ Ecken unendlich vieler Pyramiden in R_n ansehen. Und umgekehrt lassen sich aus einer solchen $(n+1)$-eckigen Pyramide in R_n (welche die einfachste Pyramide in R_n ist) durch geeignetes Projiciren alle *Arten* von Configurationen von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in den Räumen von niedrigerer Dimensionenzahl erhalten; indem man unter zwei Configurationen derselben Art solche versteht, bei welchen die $n+1$ Punkte dieselbe Lage haben, ohne auf die metrischen Beziehungen zwischen ihnen Rücksicht zu nehmen.

Als zweites Beispiel mögen die rationalen Curven dienen. Betrachten wir irgend eine rationale Curve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_m, wo $m < n$ ist, so beweise ich, dass sie immer die Projection einer rationalen Normalcurve C^n in R_n ist. Und umgekehrt kann man aus einer solchen Normalcurve C^n alle Arten von Rationalcurven n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in den niedrigeren Räumen erhalten. Diese Normalcurve C^n besitzt keinerlei Singularität und ihre Charaktere sind vermöge der verallgemeinerten Plücker'schen Formeln, die ich ebenfalls in nachstehender Abhandlung aufstelle, sehr leicht zu berechnen. Ueberdies lässt sie sich leicht durch projectivische Büschel oder Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe construiren. Es wird also äusserst vortheilhaft sein, die rationalen Curven derselben oder niedrigerer Ordnung in nieder ausgedehnten Räumen aus dieser Normalcurve durch Schneiden oder Projiciren zu gewinnen.

Ich habe die gewöhnliche Nomenclatur für Punkt, Gerade, Ebene, Curve, Fläche, Kegel etc. beibehalten, und zwar habe ich die linearen Räume einfache Räume genannt und mit den Symbolen R_0, R_1, R_2, R_3, $\cdots$ R_n bezeichnet. Desgleichen habe ich auch $2, 3, \cdots (n-1)$-dimensionale Flächen und in analoger Weise $2, 3, \cdots (n-1)$-dimensionale R_0-Kegel (deren Spitze bezüglich ein Punkt R_0 ist), und $3, 4 \cdots (n-1)$-dimensionale R_1-Kegel (deren Spitze jeweils eine Gerade R_1 ist) u. s. w. unterschieden.

Die Arbeit ist in fünf Abschnitte mit der Einleitung, und jeder Abschnitt in Paragraphen eingetheilt, so dass es meinem Leser nicht schwer sein wird, sich sofort eine allgemeine Uebersicht derselben zu verschaffen*).

Zum Schlusse ergreife ich diese Gelegenheit, um Herrn Prof. Klein für die vielfache Anregung und Unterstützung bei meinen mathematischen Studien in Leipzig den besten Dank auszusprechen.

---

*) Der Kürze halber habe ich bei leichten Sätzen, zumal im dritten Abschnitte, die Beweise unterdrückt.

Einleitung.

1. Es ist bekannt, dass eine Ebene R_2 durch eine gerade Linie R_1 und einen Punkt R_0 ausser ihr erzeugt werden kann, indem man alle Punkte der Geraden mit dem Punkte R_0 verbindet. In derselben Weise kann man den Raum von 3 Dimensionen durch eine Ebene R_2 und einen Punkt R_0 ausser ihr erzeugen. Wie man die Gerade als Element der Ebene, und die Ebene als Element des Raumes von 3 Dimensionen betrachtet, so können wir den Raum R_3 als Element eines Raumes von 4 Dimensionen ansehen. Der Raum von 4 Dimensionen R_4 wird von einem Raume R_3 und von einem beliebigen Punkte R_0 *ausser ihm* erzeugt, indem man alle Punkte des Raumes R_3 mit R_0 verbindet. Wie die Ebene in R_3 von einer Geraden nur in einem Punkte geschnitten wird, insofern die Gerade nicht in der Ebene liegt, so wird auch ein R_3 in R_4 von einer Geraden nur in einem Punkte und von einer Ebene in einer Geraden geschnitten, wenn die Gerade oder die Ebene nicht selbst in dem R_3 enthalten ist. Wenn man diese Erzeugung der linearen Räume*) fortsetzt, so sieht man, dass der Raum von n Dimensionen R_n durch einen Raum R_{n-1} und einen ausser ihm liegenden Punkt erzeugt werden kann. Man sieht auch, dass der Raum R_n durch $n+1$ beliebige Punkte, die in keinem niedrigeren Raume gelegen sind, bestimmt wird. Es ist auch aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass in dem Raume von n Dimensionen R_n ∞^n Punkte enthalten sind, und dass, wenn ein Raum R_m $p+1$ beliebige Punkte eines Raumes R_p enthält, wo $m > p$ ist, R_p ganz in R_m enthalten ist.

Zwei beliebige Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$, die respective durch $m+1$ und $m^{(1)}+1$ Punkte bestimmt sind, gehören dem Raume $R_{m+m^{(1)}+1}$ an, der durch die $m+m^{(1)}+2$ Punkte bestimmt wird. Die Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, d. h. sie haben keinen Punkt gemein. Haben sie aber z. B. einen Punkt A_0 gemein, so werden wir, um R_m und $R_{m^{(1)}}$ zu bestimmen, ausser A_0 noch m und $m^{(1)}$ Punkte willkürlich annehmen, und daher werden die beiden Räume in einem Raume $R_{m+m^{(1)}}$ enthalten sein. Haben sie allgemein einen Raum R_a gemein, d. h. $a+1$ beliebige Punkte, so liegen sie in einem Raume $R_{m+m^{(1)}-a}$.

Wir betrachten als Fundamentalraum unserer Operationen den Raum von n Dimensionen. Setzen wir daher $R_{m+m^{(1)}-a} \equiv R_n$, so sehen wir, dass zwei beliebige Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ in R_n in einem Raume R_a sich schneiden, wo $a = m + m^{(1)} - n$ ist. Wenn $a = 0$ ist, so haben sie einen einzigen Punkt gemein; ist dagegen a negativ, so haben sie kein Element gemein. Ist $m > m^{(1)}$, so ist klar, dass

---

*) Weiterhin nennen wir die linearen Räume einfach Räume.

a höchstens $= m^{(1)}$ sein kann, in welchem Falle $R_{m^{(1)}}$ in R_m ganz enthalten sein wird.

Zwei Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ schneiden sich, wie gesagt, in einem Raume R_a, wo:

$$a = m + m^{(1)} - n$$

ist. Der Raum R_a wird von einem dritten beliebigen Raume $R_{m^{(2)}}$ in einem Raume R_{a_1} geschnitten, wo:

$$(1) \qquad a_1 = a + m^{(2)} - n = m + m^{(1)} + m^{(2)} - 2n$$

ist. Der Raum R_{a_1} wird von einem beliebigen vierten Raume $R_{m^{(3)}}$ in einem Raume R_{a_2} geschnitten, wo

$$(2) \qquad a_2 = a_1 + m^{(3)} - n = m + m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} - 3n$$

ist, u. s. w. Endlich der Raum $R_{a_{s-2}}$ wird von einem $(s+1)^{\text{ten}}$ beliebigen Raume $R_{m^{(s)}}$ in einem Raume $R_{a_{s-1}}$ geschnitten, wo

$$(3) \qquad a_{s-1} = a_{s-2} + m^{(s)} - n = \sum_{i=0,\dots s} m^{(i)} - sn$$

ist, so dass $s+1$ ganz beliebige Räume R_m, $R_{m^{(1)}} \cdots R_{m^{(s)}}$ in R_n in einem Raume R_p sich schneiden, wo:

$$p = \sum_{i=0,1\dots s} m^{(i)} - sn$$

ist. Schneiden sich aber R_m und $R_{m^{(1)}}$ anstatt in einem Raume R_a in einem Raume R_{a+d}, so muss man in (2) anstatt a, $a+d$ setzen, so dass R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}}$ in einem Raume R_{a_1+d} sich schneiden werden. Schneiden sie sich statt dessen in einem Raume $R_{a_1+d+d_1}$, so werden sich R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}}$, $R_{m^{(3)}}$ in einem Raume $R_{a_2+d+d_1}$ schneiden und *allgemein werden sich $s+1$ Räume R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}} \cdots R_{m^{(s)}}$ in R_n in einem Raume R_q schneiden, wo:*

$$q = \sum_{i=0,1\dots s} m^{(i)} + \sum_{k=0,1\dots s-2} d_k - sn$$

*ist und einige oder alle d verschwinden können**).

2. Um den Parallelismus der Räume zu definiren, denken wir uns, dass jede Gerade in R_n einen unendlich fernen Punkt (im Euklidischen Sinne) hat, d. h. wir nehmen an, dass der Raum R_n einen unendlich fernen Raum R_{n-1} hat, so dass die Räume R_1, R_2, $\cdots R_{n-1}$ von R_n den unendlich fernen Raum in einem R_0, R_1, $\cdots R_{n-2}$ schneiden. Wir sagen: *Zwei Räume R_m, $R_{m^{(1)}}$, wo $m^{(1)} \geqq m$ ist,*

---

*) Ueber die Bedingungen, dass mehrere Räume von verschiedenen Dimensionen sich schneiden, sehe man Jordan: „Essai sur la géométrie à n dimensions. Bulletin de la Société mathématique de France 1875“ und D'Ovidio: „Le Funzioni metriche fondamentali etc.“ R. Accademia dei Lincei 1877 (oder auch Math. Annalen XII).

sind einander parallel, wenn der unendlich ferne Raum R_{m-1} von R_m in dem unendlich fernen Raume $R_{m^{(1)}-1}$ von $R_{m^{(1)}}$ enthalten ist.

Aus dieser Definition geht hervor, dass man durch einen Raum R_m einen paralleleu Raum $R_{m+m^{(1)}}$ zu einem beliebigen gegebenen Raume $R_{m^{(1)}}$ legen kann, wenn $m + m^{(1)} < n$ ist; in der That, die unendlich fernen Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ liegen ganz beliebig und daher bestimmen sie einen Raum $R_{m+m^{(1)}-1}$, welcher der unendlich ferne Raum von unendlich vielen Räumen $R_{m+m^{(1)}}$ ist, die den beiden Räumen R_m und $R_{m^{(1)}}$ parallel sind. Durch einen beliebigen Punkt von R_n geht ein solcher Raum, und wenn dieser Punkt in R_m fällt, so wird der Raum $R_{m+m^{(1)}}$ durch R_m gehen, da er den unendlich fernen Raum R_{m-1} von R_m enthält. Wenn $m+m^{(1)}>n$ d. h.: $m+m^{(1)}-n=\alpha$ ist, so schneiden sich die unendlich fernen Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ in einem Raume $R_{\alpha-1}$, und da sie im Allgemeinen in R_{n-1} ganz beliebig liegen, ohne in einem niedrigeren Raume enthalten zu sein, so kann man durch R_m keinen parallelen Raum zu $R_{m^{(1)}}$ ziehen. Wenn die beiden Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ in einem Raume $R_{n-\alpha-1}$ liegen, so kann man durch den Raum R_m einen parallelen Raum $R_{n-\alpha}$ zu $R_{m^{(1)}}$ ziehen. — Aus dieser Definition folgt noch, dass zwei parallele Räume A_m, B_m von zwei parallelen Räumen A_{m-n}, B_{n-m} in zwei Paaren von Punkten geschnitten werden, die ein Parallelogramm bilden.

3. Aus Nr. 1. geht hervor, dass zwei Räume R_{n-1} in einem R_{n-2}, drei in einem R_{n-3} u. s. w., n in einem R_0 sich schneiden. Wie n beliebige Punkte einen Raum R_{n-1} bestimmen, so bestimmen n beliebige Räume R_{n-1} einen Punkt. Wir nennen daher den Punkt und den $(n-1)$-dimensionalen Raum *duale Räume* in R_n. Während $m+1$ beliebige Punkte einen Raum R_m bestimmen, so bestimmen $m+1$ beliebigen R_{n-1} einen Raum R_{n-m-1}; R_m und R_{n-m-1} sind auch dual. — *Wir sehen also, dass zwei Räume R_m, $R_{m^{(1)}}$ dual sind, wenn $m + m^{(1)} = n - 1$ ist.* — Wenn n ungerade ist, d. h. $= 2m + 1$, so ist der Raum $R_{\frac{n-1}{2}}$ sich selbst dual.

4. Wird ein Punkt nach einem algebraischen Gesetze sich stetig bewegen, so dass er von seiner Anfangslage nur in zwei Richtungen (vorwärts und rückwärts) fortrücken kann, so beschreibt er einen Raum von einer Dimension. Derselbe ist von der m^{ten} Ordnung, wenn er von einem R_{n-1} in R_n in m Punkten geschnitten wird. Einen solchen Raum nennt man *eine Curve m^{ter} Ordnung**). Eine Curve m^{ter} Ordnung

---

*) Die Erzeugung der linearen Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen durch Bewegung eines Elementes findet man bei **Grassmann**, Ausdehnungslehre p. 13 etc. 1844. Sie ist auch später von **Riemann** gebraucht worden in der Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. 1854."

kann nur in einem R_2, R_3, $\cdots$ R_m enthalten sein*). Denn wäre eine solche Curve in einem R_{m+1} enthalten, ohne einem niedrigeren Raume R_m zu gehören, so könnten wir sie mit einem Raume R_m, der die Curve nur in m Punkten treffen kann, schneiden, und durch diese m Punkte und einen andern Punkt der Curve einen Raum R_m hindurchlegen. Dieser Raum wird dann die Curve in mehr als m Punkten schneiden, was nicht möglich ist. Wenn man die Tangenten, Schmiegungsebenen, Schmiegungsräume R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-1} der Curve betrachtet, so bilden die Tangenten die 2-dimensionale Developpable der Curve (mit Rücksicht auf die Zahl der Punkte), die, wie man sieht, in einen R_2, R_3, $\cdots$ R_{n-2} entwickelbar ist**). — Die Schmiegungsebenen der Curve sind Tangentialebenen der Fläche, während die anderen Schmiegungsräume der Curve auch Schmiegungsräume ihrer 2-dimensionalen developpablen Fläche genannt werden können.

Die Schmiegungsebenen bilden aber eine 3-dimensionale developpable Fläche, die in einen R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-2} entwickelbar ist. Die Schmiegungsräume R_3 der Curve sind Tangentialräume ihrer 3-dimensionalen Developpablen u. s. w. Endlich bilden ihre Schmiegungsräume R_{n-2} eine $(n-1)$-dimensionale Developpable, die in einen R_{n-2} entwickelbar ist. Die Schmiegungsräume R_{n-1} der Curve sind Tangentialräume dieser Developpable. — Wir sehen also, dass *eine Curve in* R_n, $n-2$ *developpable Flächen besitzt.*

Wenn eine Curve sich stetig in zwei entgegengesetzten Richtungen bewegt, so wird sie einen 2-dimensionalen Raum erzeugen, der von der m^{ten} Ordnung ist, wenn er von einem beliebigen Raume R_{n-1} von R_n in einer Curve C^m geschnitten wird. Einen solchen Raum nenne ich *eine 2-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung* F_2^m. Man beweist in analoger Weise, wie bei den Curven, dass eine solche Fläche nur in Räumen R_3, R_4, $\cdots$ R_{m+1} enthalten sein kann, ohne gleichzeitig niedrigeren Räumen anzugehören. Eine solche Fläche hat $n-3$ Developpablen, respective von 3, 4 etc. $(n-1)$ Dimensionen, die respective in einen R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-2}; R_4, R_5, $\cdots$ R_{n-2} etc. R_{n-2} entwickelbar sind. Man sieht ohne Weiteres, wie man fortzufahren hat, um die $3, 4 \cdots (n-1)$-dimensionalen Flächen m^{ter} Ordnung F_3^m, F_4^m $\cdots$ F_{n-1}^m zu erzeugen. Wir finden mit leichter Mühe folgende Sätze:

Eine p-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung F_p^m wird von einem beliebigen Raume R_{n-1} in einer $(p-1)$-dimensionalen Fläche m^{ter} Ordnung F_{p-1}^m geschnitten.

---

*) Clifford. Phil. Transactions 1878, On the Classification of Loci, p. 663.

**) Wie zwei Räume R_{n-1} in R_n zur Deckung gebracht werden können, werden wir später nach der Definition der Perpendicularität der Räume kennen lernen (Nr. 21.).

Eine Fläche F_p^m *kann nur in einem* $R_{p+1}, R_{p+2}, \cdots, R_{p+m-1}$, *d. h. in* $m - 1$ *verschiedenartigen Räumen enthalten sein, ohne in niedrigeren Räumen zu liegen.*

Die Flächen 2^{ter} *Ordnung von irgend einer Dimension sind also nur in einem bestimmten Raume enthalten.*

Die F_p^m *besitzt* $n - p - 1$ *Developpablen.*

5. Betrachten wir jetzt einen Punkt R_0 und einen zu ihm dualen Raum Σ_{n-1}, der nicht durch R_0 geht. Wenn wir von R_0 irgend eine Curve C^m von Σ_{n-1} projiciren, wo natürlich $m \leq n - 1$ ist, so bekommen wir um R_0 eine einfache unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden, die *einen* R_0*-Kegel von zwei Dimensionen und von der* m^{ten} *Ordnung* bilden, da er von irgend einem Raume R_{n-1} in einer Curve m^{ter} Ordnung geschnitten wird. Wenn man von R_0 eine p-dimensionale Fläche $F_p{}^m$ von Σ_{n-1} projicirt, die nicht in einem niedrigeren Raume als Σ_{n-1} liegt, so erhalten wir um R_0 einen $(p+1)$*-dimensionalen* R_0*-Kegel* m^{ter} *Ordnung.* So kann man alle R_m*-Kegel* erhalten, indem man von einem fest angenommenen R_m aus die Curven und Flächen eines Raumes R_{n-m-1} projicirt, der R_m nirgends schneidet. Wir sehen auch, dass *die Anzahl der Dimensionen eines* R_m*-Kegels* $m+2$ *bis* $m-1$ *betragen kann.**)

Wenn eine 2-dimensionale Fläche $F_2{}^m$ einen Doppelpunkt R_0 hat, so wird sie von allen Räumen R_{n-1} durch R_0 in Curven m^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkte in R_0 geschnitten; analog wenn es sich um einen k-fachen Punkt handelt. Wir sehen auch, dass alle in einem Doppelpunkte osculirenden Geraden einen R_0-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden, und dass alle Geraden, die im k-fachen Punkte $k+1$ Punkte mit der $F_2{}^m$ gemein haben, einen 2-dimensionalen R_0-Kegel k^{ter} Ordnung bilden. Im Allgemeinen, wenn eine Fläche $F_p{}^m$ in R_n einen k-fachen Punkt R_0 hat, *so bilden alle Geraden, die mit der* $F_p{}^m$ *in* R_0 $k+1$ *Punkte gemein haben, einen* p*-dimensionalen* R_0*-Kegel* k^{ter} *Ordnung.* Hier kann man verschiedene Arten von Doppelpunkten oder k-fachen Punkten unterscheiden je nach der Natur des p-dimensionalen R_0-Kegels. Wenn man eine $(n-1)$-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung in R_n betrachtet, so sieht man, dass sie von allen ihren Tangentialräumen in einem ihrer Punkte R_0 in Flächen niedrigerer Dimension mit einem Doppelpunkte in R_0 geschnitten wird. —

Die hiermit in der Einleitung gegebenen Sätze sind einfache Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen der 3-dimensionalen Geometrie, sie werden uns aber später sehr nützlich sein.

) Wenn eine Gerade oder irgend ein Raum R_m in R_n sich stetig in zwei Richtungen fortbewegt, so erhält man eine 2-dimensionale gerade Fläche* (R_1-Fläche; Regelfläche) oder eine $m+1$*-dimensionale* R_m*-Fläche.*

Abschnitt I.

Configurationen aus einer endlichen Anzahl von linearen Räumen.

§ 1.

Perspectivische Figuren.

6. Es seien N beliebige Punkte $1, 2, 3 \cdots N$ in R_n gegeben, wo $N \geqq n+1$ ist. Sie bestimmen

$$\frac{N(N-1)}{2} R_1, \quad \frac{N(N-1)(N-2)}{2} R_2, \ldots, \quad \frac{N(N-1)\cdots(N-m)}{(m+1)!} R_m,$$

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-(n+r))}{(n-r+1)!} R_{n-r}, \quad \frac{N(N-1)\cdots(N-n+r-1)}{(n-r+2)!} R_{n-r+1} \cdots$$

und

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} R_{n-1}.$$

Durch jeden R_1 gehen $(N-2)\ R_2, \cdots, \frac{(N-2)\cdots(N-m)}{(m-1)!} R_m, \cdots;$

,, ,, R_2 ,, $(N-3)\ R_3, \cdots, \frac{(N-3)\cdots(N-m)}{(m-2)!} R_m, \cdots;$

,, ,, R_r ,, $(N-r-1)\ R_{r+1}, \cdots, \frac{(N-r-1)\cdots(N-m)}{(m-r)!} R_m, \cdots;$

,, ,, R_{n-r} ,, $(N-(n-r+1))\ R_{n-r+1}, \cdots,$
$\frac{(N-(n-r+1))\cdots(N-n+1)}{(r-1)!} R_{n-1};$

,, ,, R_{n-r+1} ,, $(N-(n-r+2))\ R_{n-r+2}, \cdots,$
$\frac{(N-(n-r+2))\cdots(N-n+1)}{(r-2)!} R_{n-1};$

,, ,, R_{n-r+2} ,, $(N-(n-r+3))\ R_{n-r+3}, \cdots,$
$\frac{(N-(n-r+3))\cdots(N-n+1)}{(r-3)!} R_{n-1};$

,, ,, R_{n-2} ,, $(N-n+1)\ R_{n-1}.$

Jeder R_1 enthält $2 R_0,$

,, R_2 ,, $3 R_0,\ 3 R_1,$

,, R_r ,, $(r+1) R_0,\ \frac{r(r+1)}{2} R_1,\ \frac{r(r+1)(r-1)}{23} R_2, \cdots,$
$(r+1)\ R_{r-1};$

,, R_{n-r} ,, $(n-r+1)\ R_0, \cdots,$ $(n-r+1)\ R_{n-r-1};$

,, R_{n-r+1} ,, $(n-r+2)\ R_0, \cdots,$ $(n-r+2)\ R_{n-r};$

Jeder R_{n-r+2} enthält $(n-r+3)\ R_0, \cdots, \frac{(n-r+2)(n-r+3)}{2}\ R_{n-r},$
$(n-r+3)\ R_{n-r+1}\,;$
„ R_{n-2} „ $(n-1)\,R_0, \cdots\cdots, \frac{(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-2)!}\ R_{n-r},$
$\frac{(n-1)\cdot\ \cdot(n-r+3)}{(r-3)!}\ R_{n-r+1}, \cdots,$
$\frac{(n-1)\cdots(n-r+4)}{(r-4)!}\ R_{n-r+2}, \cdots,$
$(n-1)\ R_{n-3};$
„ R_{n-1} „ $n\ R_0, \cdots\cdots\cdots\cdots, \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\ R_{n-r},$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}\ R_{n-r+1},$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+3)}{(r-2)!}\ R_{n-r+2}, \cdots,$
$n\ R_{n-2}.$

Schneiden wir jetzt die Figur mit einem Raume R_r. Ein R_r schneidet die Räume R_{n-r} der Figur in Punkten, die Räume R_{n-r+1} in Geraden u. s. w., die Räume R_{n-1} in Räumen R_{r-1}. Somit erhält die Schnittfigur so viel Punkte, Geraden etc. R_{r-1}, als Räume R_{n-r}, R_{n-r+1} etc. R_{n-1} in der vorigen Figur enthalten sind. Da jeder Raum R_{n-r} derselben durch eine Combination der N Punkte $(n-r+2)$ zu $(n-r+2)$ gebildet wird, und jeder Raum R_{n-r+1} durch eine Combination der N Punkte $(n-r+2)$ zu $(n-r+2)$ etc., so können wir diese Combinationen zur Bezeichnung der Punkte, Geraden, Ebenen u. s. w. der Schnittfigur benutzen. — So sehen wir z. B., dass durch den Punkt $1\ 2\ 3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$ alle Geraden gehen, deren Symbole das Symbol des Punktes enthalten, wie z. B. die Geraden:

$$1\ 2\ 3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+2),\ 1\ 2\ 3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+3), \cdots$$
$$1\ 2\ 3 \cdots (n-r+1)\,(N-(n-r+1)).$$

Auf jeder dieser Geraden liegen ausser dem Punkte $123\cdots(n-r+1)$ noch $(n-r+1)$ Punkte; sie entsprechen den Combinationen der $(n-r+2)$ Zahlen des Symbols der Geraden, $n-r+1$ zu $n-r+1$. So z. B. liegen in der ersten Geraden die n Punkte

$$123\cdots(n-r)\,(n-r+2),\quad 23\cdots(n-r-1)\,(n-n+1)(n-r+2), \cdots,$$

in der zweiten

$$123\cdots(n-r)\,(n-r+3),\quad 23\cdots(n-r-1)\,(n-r+1)(n-r+3), \cdots$$

Wenn wir die Punkte in derselben Verticallinie verbinden, so erhalten wir wieder Geraden der Schnittfigur, nämlich:

$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2)\,(n-r+3),$$
$$2\,3 \cdots (n-r-1)\,(n-r+1)\,(n-r+2)\,(n-r+3) \text{ etc.};$$

diese zwei Geraden treffen sich in einem Punkte der Figur, nämlich $2\,3 \cdots (n-r-1)\,(n-r+2)\,(n-r+3)$. Durch jeden Punkt, z. B. $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$, gehen $N-(n-r+1)$ Geraden der Schnittfigur und in jeder derselben liegen ausser ihm noch $n-r+1$ Punkte. Wir können mit ihnen $n-r+1$ Pyramiden von $N-(n-r+1)$ Ecken bilden, die respective in jenen $N-(n-r+1)$ Geraden liegen. Eine solche Pyramide ist von denjenigen Punkten gebildet, deren Symbole $n-r$ Zahlen gemein haben, wie z. B.

$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2),\quad 1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+3); \cdots;$$
$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(N-(n-r+1)).$$

Man kann sich nun fragen, ob die Figur dieser $n-r+1$ Pyramiden eine allgemeine Figur sein kann oder nicht, d. h. ob eine allgemeine Figur in R_r von $n-r+1$ solchen Pyramiden, deren Ecken respective in $N-(n-r+1)$ beliebigen durch einen Punkt gehenden geraden Linien liegen, auch als Schnitt einer Configuration von N Punkten in R_n betrachtet werden kann. *Dies ist in der That der Fall.* In der That, denken wir uns die $N-(n-r+1)$ Geraden durch einen Punkt $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)$ und die darauf liegenden Ecken der Pyramiden in R_r ganz beliebig gegeben, und bezeichnen wir sie mit denselben Symbolen wie vorher. Von dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$ ziehen wir einen beliebigen Raum R_{n-r} und in diesem Raume nehmen wir $n-r+1$ ganz beliebige Punkte $1, 2, 3, \cdots, n-r+1$ an. Wir verbinden dann die Ecken, die in der Geraden $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+2)$ liegen, z. B. die Ecke $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2)$, mit den Punkten $1, 2, 3, \cdots, n-r$ von R_{n-r}; so erhalten wir für alle Ecken der Geraden, $n-r+1$ Räume R_{n-r}, die in einem Raume R_{n-r+1} enthalten sind, nämlich in dem Raume R_{n-r+1}, der durch den gewählten Raum R_{n-r} und die Gerade $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+2)$ geht, da diese Geraden den gewählten R_{n-r} in dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)$ schneidet; daher werden sich alle R_{n-r}, die durch die Punkte der Geraden gehen, in einem Punkte $n-r+2$ schneiden. Wenn wir diese Operation für alle Geraden durch den Punkt $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$ ausführen, so erhalten wir in der That $N-(n-r+1)$ Punkte, die mit den gewählten $1, 2, 3, \cdots, n-r+1$ Punkten N Punkte liefern, aus deren vollständiger Figur diejenige von R_r als Schnitt hervorgeht. *Diese Umkehr ist aber äusserst wichtig, denn so können wir die Sätze über allgemeine perspectivische Figuren einfach durch Schneiden oder Projiciren erhalten.* Also:

Wenn in einem Raume R_r die p Ecken von $q - 1$ Pyramiden, respective in p Geraden, durch einen Punkt liegen, und man setzt

$$q = n - r + 2, \quad p = N - (n - r + 1),$$

so bestimmen sie durch das Durchschneiden ihrer Kanten, Seitenebenen, · · ·, Seitenräume R_{r-1} eine Figur von

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+r)}{(n-r+1)!} R_0,$$

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{(n-r+2)!} R_1, \ldots \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} R_{r-1}.$$

Durch jeden R_0 gehen $N-(n-r+1)\ R_1, \frac{(N-(n-r+1))(N-(n-r+2))}{2} R_2, \cdots,$

$$\frac{(N-(n-r+1))\cdots(N-n+1)}{(r-1)!} R_{r-1},$$

„ „ R_1 „ $N-(n-r+1)\ R_2, \cdots, \frac{(N-(n-r+2))\cdots(N-n+1)}{(r-2)!} R_{r-1},$

⋮

„ „ R_{r-2} „ $N-(n-1)\ R_{r-1}$.

Jeder R_1 enthält $(n-r+2)\ R_0$,

⋮ $\frac{(n-r+2)(n-r+3)}{2} R_0, \quad n-r+3\ R_1,$

„ R_{r-1} „ $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} R_0, \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} R_1, \cdots.$

Diese Figur ist im gewissen Sinne symmetrisch in Bezug auf jeden ihrer Räume derselben Dimension. Zum Beispiel hat man von einem beliebigen Punkte der Figur ausgehend $q - 1$ neue Pyramiden von $p - 1$ Ecken, die respective $q - 1$ zu $q - 1$ in p Geraden durch den Punkt liegen, und die zu derselben Figur führen.

Diese Figur kann nun als Schnitt des Raumes R_r, in welchem sie liegt, mit einer vollständigen Figur von N Punkten im Raume R_n angesehen werden, und umgekehrt aus einer solchen Configuration von N Punkten in R_n bekommt man eine der vorigen ähnliche Figur in R_r. Jede solche Figur in R_r kann auch als Projection von einer Configuration in einem höheren Raume erhalten werden.

Wenn wir von dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n - r + 1)$ ausgehen, so werden wir zu dem Raume $(n - r + 2) \cdots (N - (n - r + 1))$ geführt (wenn dies auch das Symbol eines Raumes der Figur ist, siehe die Beispiele des § 2.). Wir nennen den Punkt und den Raum, da ihre Symbole sich zu N ergänzen, zu einander *complementär*, und überhaupt nennen wir zwei Räume der Figur complementär, wenn ihre Symbole sich zu N ergänzen.

7. Die einfachste Pyramide in R_r ist durch $r + 1$ beliebige Punkte gegeben, wir wollen sie als *Fundamentalpyramide* des Raumes

R_r bezeichnen. Wenn man den Punkt des Raumes R_r durch $r+1$ homogene Grössen (Coordinaten) $x_1 \cdots x_{r+1}$ bestimmt denkt (dem entsprechend, dass der Raum R_r, wie wir in Nr. 1. gesehen haben, ∞^r Punkte enthält) und wir setzen alle diese Grössen bis auf eine gleich null, so bekommen wir eine Fundamentalpyramide von $r+1$ Punkten, deren Coordinaten bis auf eine null sind. Wenn man die Coordinaten $x_1 \cdots x_{r+1}$ mit einander vertauscht, so geht die Pyramide in sich über; deshalb nenne ich sie *regulär,* obgleich dieses Wort nicht wie im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist.

Betrachten wir zwei solche Pyramiden in R_r, deren Ecken paarweise in geraden Linien durch einen Punkt O liegen, so ist:

$$q = 3 = n - r + 2, \quad p = r + 1 = N(n - r + 1),$$

d. h.

$$n = r + 1, \quad N = r + 3.$$

Somit ist die vollständige Figur von zwei solchen Pyramiden der Schnitt einer Configuration von $r+3$ beliebigen Punkten eines Raumes R_{r+1}.

Wenn wir im Satze der vorigen Nummer für N und n ihre neuen Werthe einsetzen, so sehen wir, dass die Zahl der Räume R_{r-1} der Figur d. h. $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ gleich ist der Zahl der Punkte derselben, d. h. die Figur ist also zu sich selbst dual; überdies sind ihre complementären Räume zu einander dual. Wir können die Punkte der Figur durch die Symbole 12, 13, etc. die Geraden durch 1 2 3, 1 2 4 etc. und die R_{r-1} durch die Symbole $1\,2\,3\,4 \cdots (r+1)$ bezeichnen, so dass z. B. der Raum $3\,4 \cdots (r+3)$ und der Punkt 1 2 complementär sind. — Wird der Punkt O als 1 2 bezeichnet, so können wir die Ecken der beiden Pyramiden durch die Symbole

$$1\,3,\ 1\,4,\ \cdots,\ 1(r+2),$$
$$2\,3,\ 2\,4,\ \cdots,\ 2(r+2)$$

bezeichnen; die Kanten der Pyramiden sind daher

$$1\,3\,4,\ 1\,3\,5,\ \cdots,\ 1\,4\,5,\ 1\,4\,6,\ \text{u. s. w.},$$
$$2\,3\,4,\ 2\,3\,5,\ \cdots,\ 2\,4\,5,\ 2\,4\,6,\ \cdots.$$

Die Schnittpunkte der entsprechenden Kanten

$$1\,3\,4,\ 2\,3\,4 \quad \text{oder} \quad 3\,4,$$
$$1\,3\,5,\ 2\,3\,5 \quad \text{„} \quad 3\,5$$

gehören dem Raume $3\,4\,5 \cdots (r+2)(r+3)$ an, der 1 2 entspricht. Also:

Wenn die Ecken von zwei Fundamentalpyramiden in R_r paarweise in Geraden durch einen Punkt O liegen, so schneiden sich ihre entsprechenden Kanten, Ebenen, . . ., Räume R_{r-1} in Punkten, Geraden, *Ebenen etc. eines Raumes R_{r-1}, der dem Perspectivitätscentrum O entspricht. — Die vollständige Figur ist der Schnitt mit einer Configuration von $r+3$ Punkten eines Raumes R_{r+1}. Sie enthält*

$$\frac{(r+2)(r+3)}{2} R_0, \quad \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!} R_1, \ldots, \frac{(r+2)(r+3)}{2} R_{r-1}.$$

Vor jedem R_0 *gehen* $r+1$ R_1, $\frac{r(r+1)}{2}$ $R_2, \cdots, \frac{r(r+1)}{2}$ R_{r-1},

„ R_1 „ r R_2, $\frac{r(r-1)}{2}$ R_{r-1},

Jeder R_1 *enthält* $3 R_0$,

„ R_2 „ $6 R_0$, $3 R_1$, *etc.*

Wir nennen in diesem Falle die beiden Pyramiden *perspectivisch*. Im Allgemeinen nennen wir zwei Figuren perspectivisch, wenn nicht nur ihre Ecken paarweise in durch einen Punkt gehenden Geraden liegen, sondern auch wenn ihre Kanten, Ebenen u. s. w. in einem Raume R_{r-1} (Collineationsraum) sich schneiden.*)

Mit dieser Methode erhält man also nicht nur zum Beispiel den Beweis des Satzes der perspectivischen Dreiecke in der Ebene oder der perspectivischen Tetraeder in R_3, sondern erhält man auch die vollständige Figur derselben.

8. Betrachten wir wieder zwei perspectivische Fundamentalpyramiden in R_r, deren perspectivisches Centrum 12 ist. Wir bilden mit 12 und mit den Ecken von einer der gegebenen Pyramiden z. B. 13, 14, ⋯, $1\, r+2$ eine $(r+2)$-eckige Pyramide, nämlich 12, 13, ⋯, $1\,(r+2)$, und betrachten auch die duale Pyramide $34 \cdots (r+3)$, $245 \cdots (r+3), \cdots$ $23 \cdots (r+1)\,(r+3)$. Wir sehen dann, dass diese beiden Pyramiden keinen Raum gemein haben, denn alle Symbole der Räume der ersten enthalten die Zahl 1, während 1 nicht in den Symbolen der Räume der zweiten vorkommt. Wir sehen aber zugleich, dass z. B. die $r+2$ Ecken der ersten und die $\frac{r(r+2)(r+1)}{2}$ Ecken der zweiten zusammengenommen die $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ R_0 der vollständigen Figur bilden. Solche Gruppen von zwei dualen Pyramiden giebt es ebensoviele als Zahlen in den Symbolen der Räume der Figur, d. h. $r+3$. Also:

Die Figur von zwei perspectivischen Fundamentalpyramiden in einem Raume R_r zerfällt in $r+3$ Gruppen von zwei dualen Pyramiden zu je $r+2$ Ecken, respective von $r+2$ R_{r-1}, die keinen Raum der Figur gemein haben und die zusammengenommen die vollständige Figur bilden.

---

*) Der zweite Theil dieser Definition ist eben in Folge unseres Satzes für zwei Fundamentalpyramiden in R_r nicht nöthig.

9. Wir können auch andere Figuren in R_r finden, die mit sich selbst dual sind. Es muss dann immer die Zahl der R_0 gleich der Zahl der Räume R_{r-1}, d. h.

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+r)}{(n-r+1)!}=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}.$$

Diese Gleichung können wir nur befriedigen, indem wir setzen

$$N-n+r=n+1 \quad \text{oder} \quad N-n+1=n-r+2$$

d. h.

$$N=2n-r+1.$$

Soll die Figur in R_r des Satzes der sechsten Nummer dual zu sich selbst sein, so muss $N=2n-r+1$ sein.

Es ist auch leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn eine solche Figur mit sich selbst dual ist, so erhält man sie als Schnitt einer Configuration in R_{r+1} und zugleich als Projection der dualen Configuration in R_{r+1}.

§ 2.

Specialfälle $r=2, 3$.

10. Aus dem Satze der Nr. 6. haben wir für $r=2$

$$q=n,\quad p=N-n+1.$$

(1) Der einfachste Fall ist $q=3$ und $p=2$, dann wird $N=4$, d. h. man erhält in der Ebene ein Vierseit.

(2) $$q=3,\quad p=3,\quad N=5.$$

Wir erhalten in der Ebene die vollständige Figur von zwei perspectivischen Dreiecken, d. h. wir erhalten 10 Punkte, die drei zu drei in 10 Geraden liegen. Aus dem Satze (Nr. 8.) geht hervor, dass diese Figur 5mal in ein Viereck und in ein Vierseit zerfällt, die keine Ecke und keine Seite gemein haben und die zusammengenommen die ganze Figur bilden.*) Man erhält diese Figur als Schnitt einer Ebene mit der vollständigen Figur eines Fünfecks in R_0.

(3) $$q=4,\quad p=3,\quad N=6.$$

In diesem Falle bekommt man 20 Punkte, die vier zu vier in 15 Geraden liegen, die drei zu drei durch 20 Punkte gehen. Die Figur trennt sich in zehn Paaren von Punkten, z. B. 123, 456 etc., wo 123, 456 complementär sind. Diese Figur ist analog der Figur, welche von den zehn Paaren der Steiner'schen Punkte in dem Hexagrammum mysticum gebildet wird.

---

*) Ich habe in meiner Abhandlung über das Hexagrammum mysticum (Atti della R. accademia dei Lincei 1877) bewiesen, dass die 60 Pascal'schen Linien 6 solche Figuren bilden, wobei die 10 Punkte Kirkman'sche Punkte sind; ich habe ebendort bewiesen, dass die Figur polar reciprok von sich selbst ist im Bezug auf einen Kegelschnitt $\varkappa$. Das Viereck und das Vierseit einer beliebigen der fünf oben erwähnten Gruppen sind polar und polarreciprok in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$. (Siehe Abschnitt III, § 5.)

(4) $q = 4, \ p = 4, \ N = 7.$

In diesem Falle haben wir drei Vierecke:

124, 125, 126, 127; 134, 135, 136, 137;
234, 235, 236, 237,

deren Ecken paarweise in der Geraden:

1234, 1235, 1236, 1237

durch 123 liegen.

Die Seiten der drei Vierecke sind:

1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267,
1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1367,
2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367.

Die entsprechenden Seiten treffen sich in den Punkten

145, 146, 147, 156, 157, 167,
245, 246, 247, 256, 257, 267,
345, 346, 347, 356, 357, 367,

die drei zu drei in den Geraden:

1456, 1457, 1467, 1567,
2456, 2457, 2467, 2567,
3456, 3457, 3467, 3567

liegen, welche drei zu drei in den vier Punkten 456, 457, 467, 567 sich schneiden, die in der Geraden 4567 liegen. Die Gerade 4567 entspricht dem Punkte 123. Die Figur besteht also aus 35 Punkten, die vier zu vier in 35 Geraden liegen, welche vier zu vier durch die 35 Punkte gehen. —

Für die dualen Figuren in der Ebene muss man haben:

$$N = 2n - 1$$

d. h.

$$p = n, \quad q = n.$$

11. *Nehmen wir jetzt* $r = 3$.

In diesem Falle hat man:

$$q = n - 1, \quad p = N - n + 2.$$

(1) Es sei:

$$q = 3, \quad p = 4 \quad \text{d. h.} \quad n = 4, \quad N = 6.$$

Wir bekommen die Figur zweier perspectivischer Tetraeder, d. h. 13, 1 4, 1 5, 1 6; 2 3, 2 4, 2 5, 2 6, deren Ecken paarweise in den vier Geraden 1 2 3, 1 2 4, 1 2 5, 1 2 6 durch den Punkt 1 2 liegen. Nach dem Satze (Nr. 7.) treffen sich die entsprechenden Kanten und Ebenen in Punkten und Geraden einer Ebene. Die Figur besteht aus 15 Punkten, die drei zu drei in 20 Geraden liegen und sechs zu sechs in 15 Ebenen, welche drei zu drei durch die 20 Geraden gehen. Durch jeden Punkt gehen vier Gerade, und in jeder Ebene sind vier solche enthalten. Einem Punkte 1 2 entspricht die Ebene 3 4 5 6. Hierzu ist zu bemerken:

Da zwei perspectivische Tetraeder immer polarreciprok in Bezug auf eine einzige Fläche zweiten Grades in R_3 sind (wie wir später Abschnitt III, § 5. *sehen werden), so ist die ganze Figur polarreciprok von sich selbst in Bezug auf die Fläche zweiten Grades. Nach dem Satze (Nr.* 8.) *zerfällt die Figur in sechs Paare, die je aus einem Fünfeck und Fünfflach bestehen, die polar und polarreciprok in Bezug auf die Fläche zweiten Grades sind,*[*])

(2) $q = 4,\ p = 5,$ d. h. $n = 5,\ N = 8.$

Man erhält in diesem Falle 56 Punkte, die vier zu vier in 70 Geraden liegen, die fünf zu fünf durch jene Punkte gehen und fünf zu fünf in 56 Ebenen liegen, d. h. man erhält eine mit sich selbst duale Figur. Dem Punkte 123 z. B. entspricht die Ebene 45678.

Wir werden später auf diese Figuren bei den Polarfiguren in Bezug auf die Flächen zweiten Grades (Abschnitt III, § 5.) zurückkommen.

§ 3.

Allgemeine Configurationen.

12. Betrachten wir jetzt $n+1$ beliebige Punkte in einer Ebene R_2, die natürlich nicht alle in gerader Linie liegen sollen, und projiciren wir sie aus einem beliebigen Raume R_{n-3}, der die Ebene n irgendwo trifft; so erhalten wir $n+1$ von R_{n-3} ausgehende Räume R_{n-2}, die in keinem Raume R_{n-1} liegen. Wir können daher in den $n+1$ Räumen R_{n-2} $n+1$ Punkte so wählen, dass sie in keinem niedrigeren Raume als R_n liegen; sie bilden dann eine Fundamentalpyramide von R_n (die in unserem Sinne regulär ist). Das heisst: jede beliebige Configuration von $n+1$ Punkten der Ebene, die nicht alle in einer Geraden liegen, ist die Projection von ∞ vielen Fundamentalpyramiden des R_n. Man versteht noch besser den dualen Satz. Wenn nämlich $n+1$ Gerade in R_2 gegeben sind, die nicht alle durch einen Punkt gehen, so können wir durch sie $n+1$ beliebige Räume R_{n-1}

---

[*]) Dieser Figur begegnet man auch bei der vollständigen Klein'schen Figur von sechs linearen Complexen in Involution. (Siehe meine Abhandlung „Sopra alcune notevoli configurazioni etc.“ Memoria II, Nr. 34. Atti della R. Accademia dei Lincei 1881.)

ziehen, die eben eine solche Fundamentalpyramide in R_n bilden. Es ist leicht zu sehen, dass derselbe Beweis noch für jede Configuration von $n+1$ Punkten oder von $n+1$ Räumen R_{r-1} in einem Raume R_r gilt, wenn $r<n$ ist. Man sieht auch, dass aus einer Fundamentalpyramide in R_n nicht nur alle *Arten* von Configurationen von $n+1$ Punkten oder von $n+1$ R_{r-1} in R_r durch Projiciren oder Schneiden erhalten werden, sondern auch alle Configurationen von s Elementen, wo $r<s<n+1$ ist. *Unter den verschiedenen Arten einer Configuration von m Punkten* verstehen wir die verschiedenen Lagen, welche die m Punkte in der Configuration annehmen können, ohne dass sie theilweise zusammenfallen, und ohne auf die metrischen Beziehungen Rücksicht zu nehmen. Also:

Jede Configuration von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in einem Raume R_r, die nicht gleichzeitig in einem niedrigeren Raume als R_r liegen, kann als Projection von ∞ vielen Fundamentalpyramiden in R_n oder als Schnitt ∞ vieler Fundamentalpyramiden eines höheren Raumes als R_r angesehen werden. Jede solche Configuration kann in eben solcher Weise aus unendlich vielen Fundamentalpyramiden beliebiger höherer Räume als Projection oder als Schnitt erhalten werden. Umgekehrt kann man aus einer Fundamentalpyramide in R_n durch Projiciren (oder Schneiden) alle Arten von Configurationen von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten (oder Räumen R_{r-1}) eines niedrigeren Raumes R_r erhalten.

Da wir die Theorie des Imaginären von Staudt als bekannt voraussetzen, so sehen wir, dass der Satz auch für imaginäre Configurationen gilt, indem wir, mit Staudt, zwei imaginäre Elemente durch eine elliptische Involution bestimmt denken.*)

Das Studium der Configurationen einer endlichen Anzahl von Punkten oder Geraden in der Ebene; von Punkten, Ebenen in R_3 etc. gewinnt mit diesem Satze an Einfachheit und Anschaulichkeit. Um ein Beispiel der Wichtigkeit dieses Satzes zu geben, betrachten wir die wohlbekannte Configuration von sechs Punkten eines Kegelschnittes. Die sechs Punkte bestimmen zwei zu zwei 15 Gerade D, die sich noch in 45 Punkten P schneiden, welche drei zu drei in 60 Pascal'schen Linien p liegen. Diese treffen sich drei zu drei in 20 Steiner'schen Punkten und andrerseits drei zu drei in 60 Kirkman'schen Punkten. Sie bilden sechs Figuren π von zehn Geraden p, die sich drei zu drei in den 10 entsprechenden Kirkman'schen Punkten schneiden und daher sechs Kegelschnitte π bestimmen. Ich habe auch in meiner citirten Arbeit bewiesen, dass die 60 Kirkman'schen Punkte nicht die duale Figur der 60 Pascal'schen Linien bilden, und dass es unendlich viele

---

*) Man kann alle diese Theoreme natürlich auch sehr leicht analytisch beweisen.

Systeme $[Zz]$ von 60 Punkten Z und 60 Geraden z giebt, welche die analogen Eigenschaften des Pascal'-Kirkman'schen Systems besitzen, die aber nicht durch sechs Fundamentalpunkte eines Kegelschnittes bestimmt werden. Die ganze Figur ist zunächst durch die sechs Fundamentalpunkte bestimmt; sie kann aber auch durch die 45 Punkte P oder durch die 60 Kirkman'schen Punkte k oder durch 60 Punkte Z eines Systems $[Zz]$, nicht aber durch die 20 Steiner'schen Punkte bestimmt werden. Die sechs Fundamentalpunkte der Ebene ergeben sich als Projection einer sechseckigen Pyramide in R_6; die 45 Punkte P werden aus einer 45-eckigen Fundamentalpyramide in R_{44} mittelst geeigneter Projection in der Ebene erhalten; es giebt also in R_3 Figuren von 45 Punkten, die weiter von einem *gewissen* Punkte A_0 projicirt, die Figur der 45 Punkte P in der Ebene ergiebt. Eine solche Figur ist eben von Cremona mit Hülfe der Geraden einer Fläche dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte studirt worden.*)

Der Doppelpunkt ist in diesem Falle jener gewisse Punkt A_0, von welchem man die Projection in der Ebene machen muss, um die Figur der 45 Punkte P zu erhalten.

Wir können aber die Figur des Hexagrammum auch aus den 60 Kirkman'schen Punkten bestimmt denken; dann kann sie als Projection von einer 60-eckigen Fundamentalpyramide eines Raumes R_{59} angesehen werden. Hier können wir wieder bemerken, dass in R_3 Figuren von 60 Punkten existiren müssen, die aus einem *gewissen* Punkte projicirt die Figur der 60 Kirkman'schen Punkte liefern, Figuren, unter die auch die von Cremona behandelte gehört. Wenn man aber die Figur des Hexagrammum durch 60 Punkte Z bestimmt denkt, so muss sie auch aus der Fundamentalpyramide in R_{59} als Projection erhalten werden.

Andrerseits ist das Hexagrammum durch die 15 Geraden D bestimmt; diese können als Schnitt der Ebene mit einer 15-eckigen Pyramide in R_{14} betrachtet werden, so dass in R_3 Figuren von 15 Ebenen existiren, die von einer *gewissen* Ebene geschnitten, die Figur der 15 Geraden D liefern. Analog mit den 60 Pascal'schen Linien p oder mit 60 Geraden z.

Es ist also die Existenz von verschiedenen Figuren in R_3 bewiesen, aus welchen durch Projiciren oder Schneiden aus bestimmten Punkten oder mit bestimmten Ebenen die Figur des Hexagrammum erhalten werden kann.

Es wäre eine sehr interessante Aufgabe, diese verschiedenen Figuren in R_3 in der Weise, die ich angedeutet habe, wirklich zu finden.

---

*) Teoremi stereometrici dai quali si deducono le propietà dell'esagrammo di Pascal. Atti della R. Accademia dei Lincei 1877.

Abschnitt II.

Grundgebilde.

§ 1.

Classification der Grundgebilde — Projectivische Zuordnung.

13. Im Raume R_0 hat man, wie bekannt, drei Grundgebilde bezüglich von der ersten, zweiten und dritten Stufe, im Raume R_n dagegen hat man, wie man sofort sieht, n Grundgebilde respective von der 1ten, 2ten, ..., $n$ten Stufe. Das Grundgebilde $n$ter Stufe ist der Raum R_n selbst. Die anderen Grundgebilde haben entweder einen Raum als *Träger* oder als *Axe*, d. h. entweder liegen sie „in einem Raume" oder sie gehen durch „einen Raum". Es ist klar, dass zwei duale Räume, wie z. B. R_m und R_{n-m-1}, Träger und Axe von zwei dualen Gebilden derselben Stufe sind, weil den Punkten von R_m, oder den Räumen R_{n-1} durch R_m, die Räume R_{n-1} durch R_{n-m-1}, oder die Punkte desselben entsprechen.

Wir nennen zwei Grundgebilde derselben Stufe, welche beide einen Träger oder eine Axe besitzen, *gleichartig*, wenn sie von demselben Elemente erzeugt werden, ungleichartig, wenn sie durch duale Elemente erzeugt sind. Wenn das eine der Grundgebilde einen Träger S_m und das andere eine Axe S_{n-m-1} hat, so nenne ich sie gleichartig, wenn das zweite den Träger des ersten in einem zu diesem gleichartigen Gebilde schneidet. Analog für ungleichartige Gebilde.

Wenn zwei gleichartige Gebilde derselben Stufe, das eine aber in einem Träger, das andere um eine Axe, gegeben sind, und die Elemente des zweiten durch die Elemente des ersten hindurchgehen, so sagen wir, dass die Gebilde *perspectivisch* liegen.

14. Ehe wir zu der allgemeinen Definition der Projectivität der Grundgebilde übergehen, wollen wir folgenden Satz vorausschicken.

Wenn zwei Gruppen von $n+1$ *beliebigen Punkten* $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(1)}, A_0'^{(2)}, \ldots, A_0'^{(n+1)}$ *in zwei Räumen* Σ_{n-1} Σ'_{n-1}, *ohne in niedrigeren Räumen zu liegen, enthalten sind, so kann man sie durch successives Projiciren und Schneiden aus* $n+1$ *Punkten* $A_{(1)}^{(1)}, \ldots, A_{(n+1)}^{(n+1)}$ *eines dritten Raumes* Σ''_{n-1} *erhalten und somit ineinander überführen.*

In der That, projiciren wir von $A_0'^{(1)} A_0^{(1)}$ respective die Punkte $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(1)}, A_0'^{(2)}, \ldots, A_0'^{(n+1)}$ in zwei Räume R_{n-1} durch einen Punkt $A_{(1)}^{(1)}$ der Geraden $A_0'^{(1)} A_0^{(1)}$, der nicht in einen dieser Punkte fällt; so bekommen wir in diesen Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} zwei Gruppen von n Punkten $A_{(1)}^{(2)}, A_{(1)}^{(3)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$; $A_{(1)}'^{(2)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$. Wir projiciren jetzt von $A_{(1)}'^{(2)}$, $A_{(1)}^{(2)}$ respective die Punkte $A_{(1)}^{(2)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$,

$A_{(1)}^{(2)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$ auf zwei neue Räume $R_{n-1}^{(1)}, R_{n-1}'^{(1)}$, die durch $A_{(1)}^{(1)}$ und durch einen Punkt $A_{(2)}^{(2)}$ von $A_{(1)}^{(2)}, A_{(1)}'^{(2)}$ gehen, aber so dass die Projectionen $A_{(2)}^{(3)}, \ldots, A_{(2)}^{(n+1)}$, $A_{(2)}'^{(3)}, \ldots, A_{(2)}'^{(n+1)}$ in zwei Räumen R_{n-2} liegen, die sich in einem Raume R_{n-3} schneiden, während im Allgemeinen zwei Räume R_{n-2} in R_n in einem R_{n-4} sich schneiden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die zwei Räume R_{n-1}, die durch die n Punkte $A_{(1)}'^{(2)}, A_{(1)}^{(3)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$ und $A_{(1)}^{(2)}, A_{(1)}'^{(3)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$ bestimmt sind, in einem $(n-2)$-dimensionalen Raum X_{n-2} sich schneiden. Wir legen durch $A_{(1)}^{(1)}$ und X_{n-2} einen $(n-1)$-dimensionalen Raum X_{n-1}, der die Gerade $A_{(1)}^{(2)} A_{(1)}'^{(2)}$ in dem Punkte $A_{(2)}^{(2)}$ schneidet. Die Gerade $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ schneidet den Raum X_{n-2} in einem Punkte X_0, da $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ in X_{n-1} liegt. Wir legen daher durch X_0 zwei Räume R_{n-2}, die respective in den beiden Räumen $A_1'^{(2)} A^{(3)} \ldots A_1^{(n+1)}$, $A_1^{(2)} A_1'^{(3)} \ldots A_1'^{(n+1)}$ liegen, so dass sie sich in einem Raume R_{n-3} von X_{n-2} schneiden. Verbinden wir dann $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ mit diesen beiden Räumen R_{n-2} durch zwei Räume $R_{n-1}^{(1)}$, $R_{n-1}'^{(1)}$ (was möglich ist, da die Gerade $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ die beiden Räume R_{n-2} in X_0 schneidet), so sind diese die zwei gewünschten Räume.

Jetzt projiciren wir wieder von $A_2'^{(3)} A_2^{(3)}$ respective die Punkte $A_{(2)}^{(3)}, \ldots, A_{(2)}^{(n+1)}$; $A_{(2)}'^{(3)}, \ldots, A_{(2)}'^{(n+1)}$ auf zwei neue Räume $R_{n-1}^{(2)}\ R_{n-1}^{(2)}$, die durch $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ und einen Punkt $A_{(3)}^{(3)}$ der Geraden $A_2'^{(3)} A_2^{(3)}$ gehen, so dass die Projectionen $A_{(3)}^{(4)}, \ldots, A_3^{(n+1)}$; $A_{(3)}'^{(4)}, \ldots, A_{(3)}'^{(n+1)}$ in zwei Räumen R_{n-3}' liegen, die sich in einem $(n-4)$-dimensionalen Raume R_{n-4}' schneiden. Wir können diese zwei Räume $R_{n-1}^{(2)}\ R_{n-1}'^{(2)}$ in der analogen Weise, wie wir vorher $R_{n-1}^{(1)}\ R_{n-1}'^{(1)}$ bestimmt haben, bestimmen.

Wenn man so fortfährt, so erhält man endlich zwei Räume $R_{n-1}^{(n-1)}\ R_{n-1}^{(n-1)}$, die durch $n-1$ feste Punkte gehen, d. h. durch $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}, \ldots, A_{(n-1)}^{(n-1)}$ und respective durch $A_{(n-1)}^{(n)}, A_{(n-1)}^{(n+1)}$; $A_{(n-1)}'^{(n)}, A_{(n-1)}'^{(n+1)}$ gehen, so dass die Geraden $A_{(n-1)}'^{(n)} A_{(n-1)}^{(n+1)}$; $A_{(n-1)}^{(n)}\ A_{(n-1)}'^{(n+1)}$ in einem Punkte S_0 sich schneiden. — Projicirt man endlich von S_0 aus auf einen Raum $R_{n-2}^{(n)}$ der durch die $(n-1)$ festen Punkte $A_{(1)}^{(1)}, A_{(2)}^{(2)}, \ldots, A_{(n-1)}^{(n-1)}$ geht, so erhält man in der That die n verlangten Punkte $A_{(1)}^{(1)}, A_{(2)}^{(2)}, \ldots$ $\ldots, A_{(n)}^{(n)}\ A_{(n+1)}^{(n+1)}$, aus welchen rückwärts durch Projiciren und Schneiden die gegebenen Gruppen von $n+1$ Punkten erhalten werden können.*)

---

*) Für zwei Gruppen von vier beliebigen Punkten zweier Ebenen in R_3 ist dieser Satz von Grassmann Bd. 49, Crelle bewiesen worden. Der Beweis aber für diesen Fall ist viel einfacher als im allgemeinen Falle.

15. *Wir werden die Definition von Möbius über collineare und reciproke Gebilde des Raumes* R_3 *auch für die Gebilde im Raume* R_n *gebrauchen. Zwei m-dimensionale Räume* S_m *und* S_m' *heissen also collinear oder reciprok verwandt, wenn einem Punkte* R_0 *von* S_m *ein Punkt* R_0' *oder ein Raum* R_{m-1}' *von* S_m' *entspricht, so dass, wenn der Punkt* R_0 *ein Gebilde* p^{ter} *Stufe in* S_m *beschreibt, das entsprechende Element das entsprechende Gebilde* p^{ter} *Stufe von* S_m' *beschreibt.* — Es ist dann ohne Weiteres klar, dass 4 harmonischen Elementen eines Gebildes 1^{ter} Stufe von S_m 4 harmonische Elemente des entsprechenden Gebildes von S_m' entsprechen. Man kann auch leicht beweisen, dass, wenn zwei collineare Räume $S_m S_m'$ in einem Raume R_{m+1} liegen und alle Punkte ihres Schnittraumes S_{m-1}, oder auch, wenn sie ineinander liegen, alle Punkte eines beliebigen in ihnen enthaltenen Raumes S_{m-1}, entsprechend gemein haben, so liegen alle entsprechenden Punkte von S_m und S_m' in Geraden durch einen Punkt S_0, *so dass also die 2 Gebilde* S_m *und* S_m' *perspectivisch liegen;* S_0 ist dann das *perspectivische Centrum und* S_{m-1} *der Collineationsraum einer m-dimensionalen Perspectivität.*

Man kann auch folgenden Satz beweisen. Zwei Räume S_m, S_m' können auf einander reciprok bezogen werden, indem man zwei Gebilden $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $R_0^{(1)} R_0^{(2)}$ von S_m zwei Gebilde $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $R'^{(1)}_{m-1} R'^{(2)}_{m-1}$ von S_m' entsprechen lässt, so dass den $R_2 \cdots R_{m-2}$ durch die Gerade $R_0^{(1)} R_0^{(2)}$ die Räume $R_{m-3} \cdots R_0$ des Schnittraumes R_{m-2}' von $R'^{(1)}_{m-1} R'^{(2)}_{m-1}$ entsprechen. Daraus folgt, dass zwei Räume $S_m S_m'$ durch $m+2$ allgemein gelegene Paare von entsprechenden Elementen $R_0^{(1)}, \cdots, R_0^{(m+2)}$; $R'^{(1)}_{m-1}, \cdots, R'^{(m+2)}_{m-1}$ reciprok auf einander bezogen werden können.

Wir sagen ferner, dass zwei Gebilde m^{ter} Stufe um 2 Axen S_{n-m-1}, S_{n-m-1}' in R_n collinear oder reciprok auf einander bezogen sind, wenn sie von einem R_m in zwei collinearen oder reciproken Gebilden $S_m S_m'$ geschnitten werden; sie werden daher durch $m+2$ Paare entsprechender Elemente collinear oder reciprok auf einander bezogen. Nur im Falle, dass R_m eine Gerade ist, wenn also die Gebilde S_{n-m-1}, S_{n-m-1}' erster Stufe sind, tritt eine Besonderheit ein. Da ein Punkt der Gerade als duales Element in der Gerade den Punkt selbst hat, *so sehen wir, dass zwei projectivische Gebilde* 1^{ter} *Stufe in* R_n *gleichzeitig collinear und reciprok sind. Dies gilt nur für Gebilde* 1^{ter} *Stufe.* Z. B. zwei projectische Ebenenbüschel in R_3 können sowohl als collineare, wie auch als reciproke Gebilde 1^{ter} Stufe betrachtet werden.

Aus dem Vorhergehenden folgt: Wenn zwei collineare Gebilde S_m und S_m' 3 Punkte eines geraden Gebildes, 4 Punkte eines ebenen Gebildes u. s. w. entsprechend gemein haben, so haben sie das ganze Gebilde entsprechend gemein.

Wenn wir anstatt S'_m ein Gebilde S'_{n-m-1} betrachten, das zu S_m collinear ist, so gilt der analoge Satz. Wenn z. B. 4 Räume S'_{n-m} von S'_{n-m-1} durch 4 entsprechende Punkte eines Ebenengebildes von S_m gehen, so liegen alle Punkte des Gebildes in ihren entsprechenden Räumen S'_{n-m}. Das gilt aber nicht mehr, wenn das Gebilde S_{n-m-1} reciprok zu S_m ist, *es gilt dann nur, wenn S_{n-m-1} ein Gebilde 1ter Stufe ist, da dann die zwei Gebilde auch als collinear betrachtet werden können.* Ich mache auf diesen Umstand aufmerksam, denn es scheint mir, dass derselbe auch in Lehrbüchern der projectivischen Geometrie nicht genügend beachtet ist.*)

16. Zwei collineare Räume R_{n-1} in R_n sind durch $n+1$ Paare von Punkten bestimmt. Wir haben also nach dem Satze der Nr. 13.: *Zwei collineare Gebilde $(n-1)$ter Stufe $S^{(1)}_{n-1}$, $S^{(2)}_{n-1}$ in R_n lassen sich durch fortgesetztes Projiciren und Schneiden mittelst der Elemente eines dritten Gebildes $(n-1)$ter Stufe $S^{(3)}_{n-1}$ in einander überführen.*

Das gilt durchaus nicht für reciproke Gebilde, denn aus Projiciren und Schneiden kann man nur collineare Gebilde derselben Stufe erhalten. Es gilt wieder nur für reciproke Gebilde 1ter Stufe, da sie auch als collinear angesehen werden können.**)

§ 2.

In einander liegende collineare Räume.

17. Zwei collineare Räume $\Sigma_n \Sigma_n'$ in R_n können nur $n+1$ Punkte gemein haben, da sie durch $n+2$ beliebige Paare entsprechender Punkte bestimmt sind.***) Denken wir uns, es seien $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ die $n+1$ gemeinsam entsprechenden Punkte von Σ_n, Σ_n' und betrachten wir den Raum $A^{(1)}_{n-1}$, der durch die Punkte

---

*) Reye in der 2. Abtheilung seiner Geometrie der Lage p. 20 sagt: „Wenn zwei collineare oder *reciproke* räumliche Systeme (*im Raume R_3*) drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes oder auch vier gleichartige Elemente *eines Grundgebildes der zweiten Stufe* entsprechend gemein haben, so haben sie *jedes Element dieses Grundgebildes entsprechend gemein*, was unserer obigen Bemerkung widerspricht.

**) Man kann diesen Satz als Definition der projectivischen Gebilde 1ter Stufe annehmen (wie z. B. in der projectivischen Geometrie von Cremona geschieht), nicht aber für projectivische Gebilde 2ter oder 3ter Stufe, denn sie schliesst dann die reciproken Gebilde aus und überdies muss man, wenn man in einem Lehrbuche der projectivischen Geometrie diese Definition für die collinearen Gebilde 3ter Stufe gebrauchen will, den Raum von 4 Dimensionen heranziehen.

***) Analytisch sieht man in der That, dass zwei collineare Räume Σ_n Σ_n' in R_n immer $n+1$ Punkte entsprechend gemein haben, die theilweise oder alle imaginär sein können. Der letzte Fall kann nur eintreten, wenn n gerade ist.

$A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ bestimmt wird. Im Allgemeinen haben Σ_n, Σ_n' mit $A^{(1)}_{n-1}$ nur die n Punkte $A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ entsprechend gemein; haben sie noch einen anderen Punkt in diesem Raume entsprechend gemein, so werden sie alle Punkte von $A^{(1)}_{n-1}$ gemein haben, und daher auch das Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe um $A_0^{(1)}$. Alle entsprechenden Punkte $P_0 P_0'$ liegen daher in Geraden durch $A_0^{(1)}$, während die entsprechenden Räume $P_{n-1}P'_{n-1}$ etc. in Räume P_{n-2} von $A^{(1)}_{n-1}$ sich schneiden, d. h. *die Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ liegen perspectivisch.* Man sieht auch leicht, dass $A_0^{(1)} P_0 P_0'$ und der Schnittpunkt dieser Geraden mit $A^{(1)}_{n-1}$ ein constantes Doppelverhältniss bilden, die als *Charakteristik* der n-dimensionalen Perspectivität bezeichnet werden kann. Ist die Charakteristik $= -1$, so erhält man eine involutorische Perspectivität oder *Involution.*

Wir wollen uns die $n+1$ Punkte $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ in zwei Räume, bez. von einer und von $(n-2)$ Dimensionen, vertheilt denken, die wir mit den Symbolen $A_1^{(12)}$ und $A^{(12)}_{n-2}$ bezeichnen. Haben die beiden Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ mit dem Raume $A^{(12)}_{n-2}$ und mit der Geraden $A_1^{(12)}$ mehr als $n-1$ respective 2 Punkte gemein, so haben sie die ganzen Gebilde $A^{(12)}_{n-2}$ und $A_1^{(12)}$ entsprechend gemein. Irgend zwei entsprechende Punkte $P_0 P_0'$ liegen in einer Geraden, die $A_1^{(12)}$ und $A^{(12)}_{n-2}$ schneidet. Dabei ist das Doppelverhältniss $P_0\, P_0'\, A_1^{(12)}\, A^{(12)}_{n-2}$ für zwei beliebige entsprechende Punkte constant; dasselbe kann als *Charakteristik dieser Collineation 2^{ter} Species* bezeichnet werden. Wenn die *Charakteristik* -1 ist, so haben wir eine *involutorische Collineation 2^{ter} Species.*

Wenn wir so fortfahren, so haben wir den Satz: *Wenn $n = 2r-1$ (oder $n = 2r$) ist, so giebt es in R_n r Collineationen bezüglich von der 1^{ten}, 2^{ten}, $\cdots$, r^{ten} Species, indem respective alle Punkte zweier dualen Räume, d. h. A_0, A_{n-1}; A_1, A_{n-2}; $\cdots$; A_{r-1}, A_{r-1} (oder A_{r-1}, A_r) den beiden collinearen Räumen $\Sigma_n \Sigma_n'$ gemein sind. Die Gerade zweier entsprechenden Punkte $P_0 P_0'$ trifft die beiden Grundräume z. B. in $S_0 R_0$, und die vier Punkte $P_0\, P_0'\, S_0\, R_0$ bilden ein constantes Doppelverhältniss, die Charakteristik der Collineation.*

*Ist die Charakteristik -1, so ist die Collineation involutorisch. Ist sie gleich einer m^{ten} primitiven Einheitswurzel, so ist die Collineation eine cyklische der Ordnung m**).

18. Es ist bekannt, dass im Raume R_3 das Doppelverhältniss der 4 Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenflächen eines Tetraeders gleich ist dem Doppelverhältnisse der 4 Ebenen, die durch die Gerade und die Ecken des Tetraeders gehen. Ein analoger Satz findet in jedem Raume R_{2m+1} statt. Man hat nämlich:

---

*) Die verschiedenen Fälle, die für zwei in einander liegende collineare Gebilde vorkommen können, können erschöpfend mit Hülfe der sogenannten *Elementartheiler* von **Weierstrass** behandelt werden (**Weierstrass**, Monatsber. der Berliner Akad. 1858, 1868); die Beispiele des Textes geben nur die wichtigsten Fälle.

Jeder Raum R_m *schneidet eine* $(2m+2)$*-eckige Pyramide in* R_{2m+1} *in einer Configuration, die reciprok der Configuration ist, welche durch die Projection derselben Pyramide aus* R_m *entsteht.**)

Abschnitt III.

$(n-1)$-dimensionale Flächen 2ten Grades: F^2_{n-1}.

§ 1.

Erzeugung einer F^2_{n-1} durch zwei ineinander liegende reciproke Gebilde n^{ter} Stufe.

19. Es seien zwei reciproke Gebilde n^{ter} Stufe Σ_n, Σ_n' in R_n gegeben, so beweist man leicht, dass alle Punkte $(P_0 Q_0')$, die in ihren entsprechenden Räumen P'_{n-1} oder Q_{n-1} liegen, eine $(n-1)$-dimensionale Fläche F^2_{n-1} erfüllen, welche *Polfläche* der 2 reciproken Gebilde genannt werden kann. Die Räume P'_{n-1} oder Q_{n-1} umhüllen dann eine andere $(n-1)$-dimensionale Fläche 2ter Classe, die als *Polarfläche* bezeichnet werden mag.

Wenn die reciproken Gebilde eine Involution oder ein sogenanntes *Polarsystem* bilden, d. h. wenn jedem Punkte P_0 in R_n derselbe Raum P_{n-1} in Σ_n wie in Σ_n' entspricht, so hat man in jeder Geraden g_1 eine Involution, anstatt zweier allgemeinen projectivischen Reihen, wie im allgemeinen Falle; und die Doppelpunkte derselben gehören der Polfläche an. Zieht man aus einem Punkte P_0 alle möglichen Geraden, so schneiden dieselben die Polfläche in zwei Punkten und der vierte harmonische Punkt P_0' von P_0 in Bezug auf dieselben erfüllt den Raum P_{n-1}, den wir als *Polarraum* des Punktes P_0 in Bezug auf die Polfläche bezeichnen können. Die Berührungspunkte der von P_0 an die Polfläche gehenden Tangenten liegen natürlich auch in dem Polarraume P_{n-1}, und da dieser Raum die Polfläche in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche F^2_{n-2} schneidet, so sehen wir, dass alle Tangenten durch P_0 an die Fläche einen $(n-1)$-dimensionalen P_0-Kegel 2ter Ordnung bilden. Die Begriffe Polfläche und Polarfläche fallen daher zusammen, *d. h. eine* $(n-1)$*-dimensionale Fläche* 2^{ter} *Ordnung ist auch der zweiten Classe.* Man sieht auch leicht: *Ein Raum* R_m *schneidet die* $(n-1)$*-dimensionale Fläche* 2^{ten} *Grades* F^2_{n-1} *in einer Fläche* F^2_{m-1}*, in welchem die* F^2_{n-1} *von dem entsprechenden* $(n-1)$*-dimensionalen* R_{n-m-1}*-Kegel* 2^{ter} *Ordnung des Polarraumes* R_{n-m-1} *von* R_m *berührt wird.* Man beweist ebenfalls, *dass jeder Tangentialraum* R_{n-1} *der Fläche* F^2_{n-1} *dieselbe in einem* $(n-2)$*-Kegel* 2^{ter} *Ordnung schneidet, dessen Scheitel der Berührungspunkt ist. Alle Erzeugenden des Kegels gehören der Fläche* F^2_{n-1} *selbst.**)

---

*) Man kann diesen Satz beweisen, indem man eine Reciprocität bestimmt, bei welcher den Ecken der Pyramide die gegenüberliegenden Räume R_{2m} entsprechen, und so, dass den Punkten von R_m die durch R_m hindurchgehenden $2m$-dimensionalen Räume eindeutig entsprechen.

Man muss natürlich beweisen, dass wirklich 2 reciproke Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ ein *Polarsystem* bilden können. Es ist aber leicht zu sehen, dass ein Polarsystem durch $n+1$ Ecken einer Fundamentalpyramide in R_n $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ und deren Räume $A^{(1)}_{n-1}, \cdots, A^{(n+1)}_{n-1}$, wo z. B. $A^{(1)}_{n-1} \equiv A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ ist, und noch durch ein beliebiges Paar entsprechender Elemente P_0 und P_{n-1} bestimmt wird.

20. Eine Pyramide, wie sie soeben betrachtet wurde, nennen wir in Bezug auf die Kernfläche 2^{ten} Grades F^2_{n-1} des Polarsystems *conjugirt.*

Wenn man einen Punkt P_0 und seinen Polarraum P_{n-1} in Bezug auf F^2_{n-1} betrachtet, so schneidet P_{n-1} die F^2_{n-1} in einer F^2_{n-2}; jede n-eckige conjugirte Pyramide von F^2_{n-2} giebt mit P_0 verbunden eine conjugirte Pyramide im Bezug auf F^2_{n-1}. Wir haben daher in P_0 n Kanten der Pyramide, die ein *Entupel conjugirter Geraden in Bezug auf die* F^2_{n-1} *bilden,* indem wir als Conjugirte einer gegebenen Geraden g_1 diejenigen bezeichnen, die den Polarraum G_{n-2} von g_1 schneiden.

Wir haben also um P_0 so viele Entupeln conjugirter Geraden, als es n-eckige conjugirte Pyramiden in Bezug auf die F^2_{n-2} giebt.

Wenn insbesondere P_0 der Pol des unendlichen fernen Raumes P_{n-1} ist, so wird er das *Centrum der Fläche* sein, und die Entupeln conjugirter Geraden um P_0 nennen wir dann *Entupeln conjugirter Durchmesser der* F^2_{n-1}. Einem Durchmesser g_1 der Fläche entspricht ein Raum G_{n-2}, der ganz im Unendlichen liegt.

Man sieht auch, dass zwei parallele Räume R_m, die F^2_{n-1} in ähnlichen $(m-1)$-dimensionalen Flächen 2^{ten} Grades schneiden.

---

*) Ich halte diese Erzeugung als Definition der Fläche 2^{ten} Grades für besser als die durch 2 reciproke Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$; denn so ziehen wir auch die imaginären F^2_{n-1} heran. Wir werden aber später auch die Erzeugung der F^2_{n-1} durch 2 beliebige reciproke Gebilde m^{ter} Stufe, wo $m<n$ ist, kennen lernen.

§ 2.

Die (n — 1)-dimensionale Kugel und die Definition der Perpendicularität.

21. Wenn alle Durchmesser einer F^2_{n-1} einander gleich sind*), so nennt man die F^2_{n-1} eine (n — 1)-*dimensionale* Kugel und das zugehörige Polarsystem kann als *ein n-dimensionales sphärisches Polarsystem* bezeichnet werden. Die (n — 1)-dimensionale Kugel bestimmt im Unendlichen ein (n — 1)-dimensionales sphärisches Polarsystem, das eine imaginäre (n — 2)-dimensionale Fläche 2ten Grades bestimmt, *die wir als die unendlich ferne imaginäre Kugel* J^2_{n-2} *benennen wollen.*

So sieht man, dass jeder Raum R_m durch das Centrum, und daher auch jeder Raum R'_m, der zu diesem parallel ist, die (n — 1)-dimensionale Kugel in einer (m — 1)-dimensionalen Kugel schneidet, deren Polarsystem durch das Polarsystem der ersten mitbestimmt ist.

Jetzt geben wir folgende Definition der Perpendicularität der Räume:

Wenn zwei Räume R_m und R'_m in keinem niedrigeren Raume als R_n gegeben sind, so bestimmen sie im Unendlichen des R_n zwei Räume R_{m-1}, R'_{m-1}, die in Bezug auf die imaginäre Kugel J^2_{n-2} des R_n zwei Polarräume R_{n-m-1}, R'_{n-m-1} haben. Die zwei Räume R_m und R'_m sind zu einander senkrecht, wenn der Raum R_{m-1} in dem Raume R'_{n-m-1} enthalten ist oder durch ihn geht. Wenn dagegen R_m und R'_m in einem niedrigeren Raume R_p als R_n gegeben sind, so gilt die entsprechende Definition für R_p, indem man das unendlich ferne sphärische Polarsystem von R_p betrachtet.

Wenn man ein Entupel conjugirter Durchmesser der (n — 1)-dimensionalen Kugel betrachtet, so sieht man aus der vorigen Definition, dass sie zu einander senkrecht sind, und dass *jeder Raum R_m, der durch m conjugirte Durchmesser eines Entupels der Kugel geht, und jeder Raum R_s, der durch eine beliebige Anzahl der übrigen n — m Durchmesser bestimmt wird, zu einander senkrecht sind.***)

---

*) Ich nehme die Definition der Länge der gewöhnlichen Geometrie in der Ebene oder in R_3 an.

**) Bemerkung. Wir können mit Hülfe der Perpendicularität auch die *Umklappung* von zwei Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} in R_n ausführen. Es genügt, von einem Punkte P_0' von R'_{n-1}, die senkrechte Ebene P_2 zu dem Schnittraume R_{n-2} von R_{n-1}, R'_{n-1} zu ziehen, die R_{n-2} in einem Punkte R_0 trifft. Wenn wir das für alle Punkte des R'_{n-1} machen, und wir lassen diese Punkte in den entsprechenden senkrechten Ebenen P_2 in einem Kreise mit dem Radius R_0P_0' sich gleichförmig bewegen, so sagen wir, dass der Raum R'_{n-1} um R_{n-2} sich *dreht*. Schliesslich, wenn einer der Punkte P_0' des R'_{n-1} in R_{n-1} fällt, so ist der ganze Raum R'_{n-1} in R_{n-1} umgeklappt.

§ 3.

Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Flächen F^2_{n-1}, speciell von einer F^2_{n-1} mit einer Kugel K^2_{n-1}.

22. Es ist leicht zu beweisen, dass im Allgemeinen zwei Polarsysteme des R_n eine conjugirte Pyramide gemein haben. Die beiden F^2_{n-1} der beiden Polarsysteme können verschiedene Lagen gegen ihre conjugirte Pyramide haben. Wir betrachten nur die allgemeinen Fälle*) und haben:

Wenn die $(n-1)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades zweier Polarsysteme zwei reciproke Räume $A^{(1,2,\ldots m)}_m$, $A^{(m+1,\ldots,n+1)}_{n-m-1}$ ihrer conjugirten Pyramide in denselben $(m-1)$ und $(n-m-2)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades schneiden, so haben sie auch die $(n-1)$-dimensionalen Berührungskegel, deren Scheitelräume $A^{(1,2,\ldots m)}_m$, $A^{(m+1,\ldots,n+1)}_{n-m-1}$ sind, gemein. Sie haben noch unendlich viele conjugirte Pyramiden gemein, deren Ecken respective in den beiden Räumen $A^{(1,2,\ldots m)}_m$, $A^{(m+1,\ldots,n+1)}_{n-m-1}$ enthalten sind.

Im allgemeinen Falle schneiden sich die beiden Flächen zweiten Grades in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche vierter Ordnung. In dem durch zwei Flächen bestimmten Büschel giebt es $(n+1)$ R_0-Kegel von $n-1$ Dimensionen, deren Scheitel in den Ecken der conjugirten Pyramide liegen und deren Erzeugenden die F^4_{n-2} in zwei Punkten schneiden.

*Wenn in zwei Räumen R_{n-1} zwei $(n-2)$-dimensionale Flächen zweiten Grades liegen, die eine $(n-3)$-dimensionale Fläche in dem Schnittraume R_{n-2} der gegebenen Räume R_{n-1} gemein haben, so geht durch sie ein Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades.***)

---

*) Nach dem Bezout'schen Theoreme weiss man, dass zwei $(n-1)$-dimensionale Flächen F^m_{n-1}, $F^{m'}_{n-1}$ sich in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche $F^{mm'}_{n-2}$ schneiden. Man findet auch, *dass, wenn s Flächen $F^{m^{(1)}}_{a^{(1)}}$ $F^{m^{(2)}}_{a^{(2)}}$, $\cdots F^{m^{(s)}}_{a^{(s)}}$ gegeben sind und die beiden ersten einem Raume R_{n-d}, die drei ersten einem Raume R_{n-d_1} u. s. w. angehören, so schneiden sie sich in einer Fläche von: $\Sigma d_k + \Sigma a^{(i)} - sn$ Dimensionen und von der Ordnung $m^{(1)} \cdot m^{(2)} \cdot m^{(3)} \cdots m^{(s)}$, wo einige d verschwinden können und wo $i = 1, 2, \ldots s$ und $k = 0, 1, \ldots s-3$* zu nehmen ist.

**) *Bemerkung.* Die Zahl der Punkte, die eine F^m_{n-1} in R_n bestimmen, ist

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!} - 1 = G_{(m)}.$$

Für die Flächen zweiten Grades ist

$$G_{(2)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2},$$

23. Wir betrachten jetzt eine F^2_{n-1} und eine mit ihr concentrische Kugel K^2_{n-1}. Da ihre unendlich fernen Polarsysteme eine n-eckige conjugirte Pyramide gemein haben, *so sehen wir, dass die F^2_{n-1} im Allgemeinen ein Entupel, aber nur ein Entupel senkrechter conjugirter Durchmesser besitzt. Diese Durchmesser nennen wir die Axen der F^2_{n-1}, und die Räume, die durch sie gehen, Haupträume der Fläche.*

Die F^2_{n-1} und die Axen derselben können aus einem Entupel conjugirter Durchmesser, die in Grösse und Richtung durch das Centrum C_0 der Fläche gegeben sind, construirt werden.

Denn es genügt, zu jedem Raume R_{n-1} durch das Centrum C_0 der Fläche den conjugirten Durchmesser R_1 und die senkrechte Gerade N_1 zu ziehen, dann bilden R_1 und N_1 um C_0 zwei Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe, welche *n Strahlen* gemein haben, die eben die *Axen* sind. Wie man leicht sieht, ist die Beziehung dieser zwei Gebilde um C_0 mit Hülfe des gegebenen Entupels von conjugirten Durchmessern in der That bestimmbar.

24. Die unendlich ferne Fläche F^2_{n-2} und J^2_{n-2} der F^2_{n-1} und der K^2_{n-1} haben eine Fläche F^4_{n-3} gemein. Jede im Unendlichen gelegene Gerade, die diese Fläche zweimal schneidet, ist die unendlich ferne Gerade von ∞^{n-2} Ebenen des R_n, welche F^2_{n-1} in *Kreisen* schneiden. Da die F^4_{n-3} von den n-Ecken der conjugirten Pyramide von F^2_{n-2} und J^2_{n-2} durch Geraden projicirt wird, die sie zweimal schneiden, so sehen wir, *dass alle Ebenen, die durch jede Axe einer allgemeinen $(n-1)$-dimensionalen Fläche F^2_{n-1} gehen und diese in einem Kreise schneiden, einen $(n-1)$-dimensionalen Kegel zweiter Ordnung umhüllen.*

Die im Unendlichen gelegene F^4_{n-3} kann im Besonderen zerfallen, und aus den verschiedenen Fällen, die entstehen können, erhält man $(n-1)$-dimensionale Flächen zweiten Grades, *deren metrische Eigenschaften verschieden sind.*

25. *Wir betrachten als Beispiel die F_3^2 in R_4.*

Sie schneidet den unendlich fernen Raum in einer F_2^2, welche die imaginäre Kugel J_2^2 in einer Curve C^4 trifft. *Im Allgemeinen also giebt es keinen Raum R_3 des R_4, der die F_3^2 in einer Kugel schneidet.*

Die C^4 kann aber auch in zwei Kreise zerfallen. Dann giebt es nur zwei Kegel zweiter Ordnung, die beide Kreise enthalten; ihre

---

d. h. gleich der Anzahl der Punkte, die eine Curve $n$ter Ordnung in der Ebene bestimmen. Allgemein findet man so auch

$$G_{(m)} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} - 1.$$

Scheitel $M_0\, M_0'$ liegen in der conjugirten Geraden der Schnittlinie der Ebenen der beiden Kreise im Bezug auf J_2^2 oder F_2^2. — In diesem Falle berühren zwei Axen der F_3^2 die Fläche selbst im Unendlichen, während die beiden andern Axen durch $M_0\, M_0'$ gehen.

Es giebt also eine F_3^2 in R_4, die vier Axen $a_1^{(1)}\, a_1^{(2)}\, a_1^{(3)} a_1^{(4)}$ hat, von denen zwei $a_1^{(1)}\, a_1^{(2)}$ die Fläche im Unendlichen berühren. Es giebt zwei Richtungen von Räumen R_3, welche die F_3^2 in Kugeln schneiden. Die beiden Räume R_3, welche durch das Centrum der F_3^2 und parallel zu den genannten Richtungen verlaufen, bilden mit den beiden Haupträumen R_3, die als $a_1^{(1)}\, a_1^{(2)}\, a_1^{(3)}$, $a_1^{(1)}\, a_1^{(2)}\, a_1^{(4)}$ zu bezeichnen sind, eine harmonische Gruppe.

Die F_2^2 und die J_2^2 können sich auch längs eines Kreises berühren; sie haben dann unendlich viele Polartetraeder gemein. *In diesem Falle ist die F_3^2 eine Rotationsfläche zweiten Grades um eine Axe a_1*: um die Axe, die den Mittelpunkt von F_3^2 mit dem Scheitel des gemeinsamen Berührungskegels von F_2^2 und J_2^2 verbindet.*)

Die Flächen F_2^2.und J_2^2 können sich auch in einem windschiefen Vierseite schneiden. Dann haben sie wieder unendlich viele Polartetraeder gemein, deren Ecken in zwei Geraden $R_1 R_1'$ liegen, d. h.: in den übrigen Kanten des Tetraeders, das durch das Vierseit bestimmt wird. *In diesem Falle ist die F_3^2 eine Rotationsfläche zweiten Grades in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen $R_2 R_2'$, deren unendlich ferne Geraden $R_1 R_1'$ sind. Wenn man die Rotation um R_2 ausführt, so beschreibt jeder Punkt einen Kreis, dessen Ebene durch R_1' geht, und umgekehrt.*

Die F_2^2 und J_2^2 können sich auch in einer Geraden und in einer C^3 schneiden, was wir nicht näher unternehmen.

§ 4.

Anzahl der linearen Räume, die in einer $(n-1)$-dimensionalen F_{n-1}^2 enthalten sind. Erzeugung derselben durch reciproke Gebilde.

26. Wir wollen jetzt die Anzahl der Räume bestimmen, die in einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche zweiten Grades liegen können. Zu diesem

---

*) Die *Bewegung* um eine Axe a_1 oder um eine Ebene E_2 in R_1 kann mit Hülfe der Perpendicularität ausgeführt werden. Wir ziehen durch einen Punkt P_0 den senkrechten Raum R_3 zu a_1, der a_1 in einem Punkte P_0' trifft. In der Bewegung um a_1 wird P_0 eine 2-dimensionale Kugel mit dem Centrum P_0' beschreiben, die in R_3 enthalten ist — oder wenn es sich um die *Rotation* um eine Ebene E_2 handelt, so beschreibt der Punkt P_0 einen Kreis, dessen Centrum P_0' in E_2 liegt und zwar in dem Schnittpunkte der senkrechten Ebene, die man von P_0 zu E_2 ziehen kann und die mit E_2 nicht in dem Raume $P_0 E_2$ liegt; und dessen Ebene die senkrechte Ebene selbst ist. —

Zwecke brauchen wir die *stereographische Projection*, d. h. wir projiciren die F_{n-1}^2 aus einem ihrer Punkte P_0 in denjenigen Tangentialraum S_{n-1}, der zu dem Tangentialraume in P_0 parallel ist.*)

Betrachten wir zuerst eine F_3^2 in R_n und projiciren wir sie von einem ihrer Punkte P_0 auf den Tangentialraum S_3, der zu dem Tangentialraume P_3 in P_0 parallel ist. S_3 und P_3 schneiden sich in einer unendlich fernen Ebene, welche die F_3^2 in einem Kegelschnitte K_1^2 trifft. Verbinden wir die Punkte dieses Kegelschnittes mit P_0, so bekommen wir einen 2-dimensionalen Kegel zweiter Ordnung, dessen Erzeugenden in der F_3^2 selbst liegen. Dieser Kegelschnitt kann nicht in zwei Geraden zerfallen, denn sonst wäre die unendlich ferne Ebene Tangentialebene an die Fläche, was nicht möglich ist. Jede Gerade g_1 von F_3^2 wird aus P_0 in eine Gerade g_1' von S_3 projicirt, die den Kegelschnitt K_1^2 trifft. Denn die Ebene durch P_0 und g_1 schneidet die F_3^2 in einer andern Geraden, die durch P_0 geht und die parallel zu g_1' ist. Umgekehrt jede Gerade g_1' in S_3, die K_1^2 trifft, ist die Projection einer und nur einer Geraden der $F_3'^2$, die nicht durch P_0 geht. Zweien solchen Geraden g_1', die sich in einem endlichen Punkte A_0' von S_3 treffen, entsprechen zwei Geraden von F_3^2, die sich in einem Punkte A_0 schneiden. Wir sehen also, dass *die Geraden der* F_3^2 *eine* ∞^3*-fache Mannigfaltigkeit bilden.*

Wenn drei beliebige Geraden der F_3^2 gegeben sind, die nicht in einem R_3 liegen und sich nicht schneiden, so haben sie nur eine Transversale, die auch in der Fläche liegt. In der That, der Raum R_3, der durch zwei derselben bestimmt ist, trifft die dritte in einem Punkte A_0, und wenn wir von diesem Punkte die Transversale zu den beiden ersten ziehen, so ist eben diese die gewünschte Gerade. Man hat also:

Wenn ein Quadrupel von vier beliebigen geraden Linien einer F_3^2 *derart gegeben ist, dass sich die Geraden zu zwei und zwei nicht schneiden und auch nicht zu drei und drei in einem Raume* R_3 *liegen, so bestimmt dasselbe vier Transversalen, die auch in der* F_3^2 *liegen und die das zu dem ersten complementäre Quadrupel bilden. Wenn fünf beliebige Geraden der* F_3^2 *gegeben sind, so kann man in dieser Weise beliebige viele andere Geraden der* F_3^2 *construiren.*

---

*) In verschiedenen Aufsätzen der Comptes Rendus (siehe z. B. t. LXIX „Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques), sowie in seinem Buche: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873)“ hat Darboux die stereographische Projection der F_{n-1}^2 in einen R_{n-1} für *metrische* Geometrie benutzt; desgleichen Lie in den Göttinger Nachrichten 1871, 1872, sowie Klein im V. Bande der mathem. Annalen (Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie), oder Göttinger Nachrichten 1872 (Ueber einen liniengeometrischen Satz).

Da eine F_3^2 in R_n durch 14 beliebige Punkte bestimmt wird (siehe Bemerkung Nr. 24.), so kann man 12 von diesen Punkten drei zu drei in vier beliebigen Geraden wählen. Das Quadrupel dieser Geraden hat ein complementäres Quadrupel von vier Geraden, die auch in der F_3^2 liegen. *Somit sind die acht Geraden zweier complementären Quadrupel der vollständige Durchschnitt von drei Flächen* F_3^2.

27. Wenn wir jetzt eine F_4^2 in R_5 stereographisch von einem ihrer Punkte P_0 in den Tangentialraum S_4 projiciren, der zu dem Tangentialraum P_4 in P_0 parallel ist, so bekommen wir im Unendlichen eine F_2^2 (d. h. in dem Schnittraume von S_4 und P_4), die kein Kegel sein kann. Hieraus schliessen wir, dass die F_4^2 keinen Raum R_3 enthält.*)

Wenn wir die zwei Systeme von Geraden von F_2^2 mit P_0 verbinden, so erhalten wir die zwei Systeme von Ebenen des 3-dimensionalen Kegels P_0, der zur Fläche F_4^2 gehört. Jede Gerade g_1 von F_4^2 wird in S_4 in eine Gerade g_1' projicirt, welche die unendlich ferne Fläche F_2^2 schneidet, und umgekehrt. Eine Ebene G_2 von F_4^2 wird von P_0 in eine Ebene G_2' von S_4 projicirt, die durch eine Gerade der F_2^2 geht. Umgekehrt, jede Ebene G_2' von S_4, welche die F_2^2 in einer Geraden schneidet, ist die Projection einer einzigen Ebene G_2 von F_4^2, die nicht durch P_0 geht. Zwei Ebenen G_2' von S_4, die sich in einem im Endlichen gelegenen Punkte A_0' treffen und überdies die F_2^2 in zwei Geraden desselben Systems schneiden, entsprechen zwei Ebenen G_2 der F_4^2, die sich nur in einem Punkte A_0 schneiden; dagegen zwei Ebenen G_2', die sich in einer Geraden schneiden (und also die F_2^2 in zwei Geraden von verschiedenen Systemen treffen), entsprechen zwei Ebenen der F_4^2, die eine Gerade gemein haben. Die Zahl der Ebenen durch eine Gerade in R_4 ist ∞^2 und die Zahl der Geraden von F_2^2 ist $2\infty^1$, daher besitzt die F_4^2 zwei Systeme von ∞^3 Ebenen.**)

Wenn wir eine F_5^2 in R_6 betrachten, so haben wir im Unendlichen eine $F_3'^2$, die ∞^3 Gerade hat, und da die Zahl aller Ebenen durch eine Gerade R_5 ∞^3 ist, so hat die F_5^2 $\infty^{3.3} = \infty^9$ Ebenen. Sie kann keinen höheren Raum enthalten.

Das Gesetz ist evident, und wir können daher sagen:

Im Allgemeinen enthält die $(2m - 1)$-*dimensionale Fläche zweiten Grades in* R_{2m} *ein System von*

---

*) Das Studium der projectivischen Eigenschaften der F_4^2 in R_5 ist nach Klein (Mathem. Annalen V, p. 263) ohne Weiteres für Liniengeometrie zu verwerthen und also für projectivische Geometrie des gewöhnlichen R_3 sehr wichtig.

**) Cayley hat diese zwei Systeme von Ebenen der F_4^2 bereits in einer Note: On the superlines of a Quadric surface in five-dimensional space. Quartely XII, 1873, betrachtet.

$$\infty^3 \cdot \infty^{3.4.5\ldots(m-1)n}$$

Räumen R_{m-1}, *dagegen die* $2m$*-dimensionale Fläche zweiten Grades in* R_{2m+1} *zwei Systeme von*

$$\infty^3 \cdot \infty^{3.4\ldots m(m-1)}$$

Räumen R_m. *Diese Flächen können keinen höheren Raum enthalten, ohne in einen Kegel auszuarten.* Für $m = 1$ hat die $F_2{}^2$ nur $2\infty^1$ R_1, wie bekannt.

Man sieht auch aus dem Vorhergehenden, dass ein R_0-Kegel zweiter Ordnung in R_4 und von drei Dimensionen zwei Systeme von Ebenen, ein 4-dimensionaler R_0-Kegel zweiter Ordnung in R_5 nur Ebenen und zwar ∞^3 besitzt u. s. w.

Im Allgemeinen hat ein $(2m - 2)$*-dimensionaler* R_0*-Kegel zweiter Ordnung im Raume* R_{2m-1} *oder ein* $(2m - 1)$*-dimensionaler* R_0*-Kegel zweiter Ordnung in* R_{2m} *nur Räume* R_m, *andernfalls artet er aus.*

28. Wir wollen über die Erzeugung der F^2_{n-1} durch reciproke Gebilde nur die Sätze mittheilen.

Betrachten wir zwei projectivische Büschel von Räumen R_{n-1} um $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$. Diese können sowohl als reciproke wie auch als collineare Gebilde angesehen werden. Wir haben:

Zwei collineare (oder reciproke) Gebilde erster Stufe, deren Axen zwei Räume $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$ *sind, erzeugen einen* $(n - 1)$*-dimensonalen Kegel zweiter Ordnung, dessen Scheitel ein Raum* S_{n-4} *ist.*

Wenn wir zwei beliebige reciproke Gebilde nehmen, deren Axen $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ sich nirgendwo schneiden, so haben wir folgenden Satz:

Die $(n - 1)$*-dimensionale Fläche zweiten Grades in* R_n *wird durch zwei beliebige reciproke Gebilde erzeugt, deren Axen* $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ *sich nirgendwo schneiden und übrigens ganz beliebig in der Fläche liegen* $\left(p \leqq \frac{n-1}{2} \text{ oder } \leqq \frac{n}{2} - 1\right)$.

Wenn eine einzige Gerade der Fläche reell ist, so sind alle Räume R_1, R_1, $\ldots$, $R_{\frac{n-1}{2}}$ *oder* R_1, $\ldots$, $R_{\frac{n}{2}-1}$ *der Fläche reell.*

Wenn die zwei Axen $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ *in einem Raume* S_q *sich schneiden, so erzeugen die beiden reciproken Gebilde einen* $(n - 1)$*-dimensionalen* S_q*-Kegel zweiter Ordnung.* —

§ 5.

Polarfiguren in Bezug auf eine $(n - 1)$-dimensionale F^2_{n-1}.

29. Betrachten wir eine $(n + 1)$-eckige Fundamentalpyramide in R_n. Wir können die Ecken und die gegenüberliegenden Räume R_{n-1} als entsprechende Elemente eines Polarsystems ansehen. Es giebt dann

∞^n reelle Polarsysteme (in denen jedem reellen Elemente ein reelles entspricht), die die Fundamentalpyramide als conjugirt gemein haben.

Es sei dagegen eine Pyramide von N Räumen $1, 2, \ldots, N$, wo $N \leqq 2n$ ist, gegeben, so nennen wir sie *polar* in Bezug auf eine Fläche F^2_{n-1}, wenn jedem Punkte der Pyramide z. B. $1, 2, 3, \ldots, n$, ein Polarraum entspricht, der durch den Raum geht, in welchem sich die übrigen Räume $n+1, \ldots, N$ schneiden. Es ist dann leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Es giebt $m-1$ Polarfiguren eines Raumes R_m, die aus einer Fundamentalpyramide der Räume $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_{2m-1}$ durch Schneiden mit R_m entstehen. Sie sind Polarfiguren in Bezug auf ∞^{m+1}, $\infty^{m+2}, \ldots, \infty^{2m-1}$ F^2_{m-1}.

30. Es sei wieder eine $(n+1)$-eckige Pyramide in R_n gegeben. Schneiden wir sie mit einem Raume S_{n-1}, so erhalten wir in S_{n-1}, wie es aus Nr. 6. hervorgeht, wenn man $N = n+1$, $r = n-1$ setzt, eine Figur von

$$\frac{n(n+1)}{2} R_0, \quad \frac{n(n+1)(n-1)}{2} R_1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} R_{n-3}, \quad n+1 \; R_{n-2},$$

so dass in dieser Figur jeder Punkt einem Raume R_{n-3} complementär ist. Durch jeden R_0 gehen $n-1$ $R_1, \ldots,$

$$\frac{(n-1)\cdots(n-m)}{(m-1)!} R_m, \text{ etc.}, \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} R_{n-3}, \quad n-1 \; R_{n-1}.$$

In jedem R_1 liegen $3 R_0$ etc., in jedem R_{n-2} $\frac{(n-1)(n-2)}{2} R_0$.

Nun schneiden wir mit S_{n-1} auch alle ∞^n F^2_{n-1}, in Bezug auf welche die Fundamentalpyramide in R_n sich selbst conjugirt ist. So erhalten wir in S_{n-1} ∞^n F^2_{n-2}, welche die Schnittfigur A als Polarfigur haben. Greifen wir eine solche F^2_{n-2} heraus und bezeichnen wir die $n+1$ Räume R_{n-2} der Figur A mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$. Der Punkt R_0, der durch die Räume $1, 2, \ldots, n-1$ bestimmt wird, hat in Bezug auf die gewählte Fläche F^2_{n-2} einen Polarraum R_{n-2}, der durch den Schnittraum R_{n-3} geht, der in der Figur A zu dem Punkte $1, 2, \ldots, n-1$ complementär ist, d. h. durch denjenigen Raum R_{n-3}, der durch die übrigen Räume R_{n-2}, nämlich n und $n+1$, gegeben ist. Wenn wir das für alle Punkte R_0 von A machen, so erhalten wir die polarreciproke Figur von A in Bezug auf F^2_{n-2}, die also aus $\frac{n(n+1)}{2} R_{n-2}$ besteht, welche eine $(n+1)$-eckige Pyramide in S_{n-1} bilden. Die $n+1$ Ecken liegen natürlich in $\frac{n(n+1)}{2}$ Geraden, die den Räumen R_{n-3} der Figur A entsprechen. In dem Raume $n, n+1$

z. B. liegen, nach dem Vorhergehenden, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ R_0 der Figur A. Die Polarräume R_{n-2} dieser Punkte in Bezug auf F^2_{n-2} gehen durch die Polargerade des Raumes $R_{n-3}: n, n+1$, welche zwei Ecken der reciproken Figur verbindet, die wir als $\overline{n}$, $\overline{n+1}$ bezeichnen. Die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ R_0 liegen aber auch in dem Polarraume R_{n-2} des Punktes $1, 2, 3, \ldots, n-1$ der Figur A. Dieser Punkt muss daher in der Geraden $\overline{n}$, $\overline{n+1}$ liegen.

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Geraden der reciproken Figur gehen also respective durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ Punkte der Figur A. Die Pyramide aus $n+1$ Räumen R_{n-2} und die reciproke in Bezug auf F^2_{n-2}, die aus $n+1$ Ecken besteht, bilden zusammen eine Figur von

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ R_0 \text{ und ebensovielen } R_{n-2}.$$

Diese Punkte R_0 liegen drei zu drei in

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$$

Geraden, die n zu n durch jeden Punkt R_0 gehen.

Wie aus Nr. 7. ersichtlich ist, ist dies die Figur von zwei perspectivischen n-eckigen Pyramiden in S_{n-1}; es genügt, im Satze Nr. 7. $r = n - 1$ zu setzen. Das perspectivische Centrum der beiden Pyramiden hat als Polarraum in Bezug auf F_{n-2} den perspectivischen Raum R_{n-2}. Somit haben wir folgenden Satz:*)

Zwei perspectivische Fundamentalpyramiden $13, 14, \ldots, 1(n+1)$; $23, 24, \ldots, 2(n+1)$ *in* R_n, *die das perspectivische Centrum* 12 *haben, sind in Bezug auf eine und nur eine* $(n-1)$*-dimensionale Fläche zweiten Grades* F^2_{n-1} *einander polarreciprok, so dass der Punkt* 12 *den Raum* $34, \ldots, n+1$ *als Polarraum hat.*

Jeder Punkt der Figur (Nr. 7.) kann als Centrum von zwei solchen in Bezug auf F^2_{n-1} *einander reciproken Pyramiden angesehen werden, deren Ecken zu der Figur selbst gehören; d. h. die ganze von zwei perspectivischen Pyramiden gebildete Figur ist in Bezug auf* F^2_{n-1} *sich selbst reciprok.*

Aus Nr. 7. geht ferner hervor:

Für eine jede der $n+3$ *Gruppen, die aus der vorigen Figur entstehen, sind die* $(n+2)$*-eckige Pyramide und die duale Pyramide in Bezug*

---

*) Ich spreche den Satz für zwei perspectivische Fundamentalpyramiden des R_n, statt des R^{n-1}, aus.

auf die F^2_{n-1} *sich selbst polar und einander polarreciprok. Die Gleichungen der* F^2_{n-1} *bezogen auf die* $n+3$ $(n+2)$*-eckigen Pyramiden oder auf die* $n+3$ *dualen Pyramiden enthalten daher nur die Quadrate der Variabeln.**)

Abschnitt IV.

Curven.

§ 1.

Charaktere der Curven in R_n und die zwischen ihnen stattfindenden unabhängigen Gleichungen.**)

31. Für eine ebene Curve m^{ter} Ordnung und k^{ter} Classe mit D Doppelpunkten, R Spitzen, d Doppeltangenten und w Inflexionstangenten hat man folgende drei unabhängige Plücker'sche Gleichungen:

$$h = k(k-1) - 2D - 3R, \quad k = n(n-1) - 2d - 3w,$$
$$w - R = 3(k-n);$$

man hat ferner aus diesen Formeln

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - D - R = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - d - w.$$

Eine Curve C^m in R_3 hat im Allgemeinen neun Charaktere und zwischen ihnen bestehen zwei Gruppen von drei unabhängigen Cayley-Plücker'sche Gleichungen.

Man erhält die erste Gruppe aus den Plücker'schen Gleichungen derjenigen ebenen Curve, die durch Projection der Raumcurve von einem beliebigen Punkte in eine beliebige Ebene entsteht; die zweite Gruppe aus den Plücker'schen Gleichungen der Schnittcurve der zur Raumcurve gehörigen Developpable mit einer beliebigen Ebene.

Betrachten wir jetzt eine C^m im Raume R_4. Wir bestimmen ihre Charaktere, indem wir zuerst die Curve C^m von einem beliebigen Punkte O in einen Raum von drei Dimensionen S_3 projiciren und nachher die Developpable der C^m mit einem 3-dimensionalen Raume R_3 schneiden.

Es sei ${}_3C^m$ die Projectionscurve in S_3 und ${}_3C_1^{m'}$ die Schnittcurve von R_3 mit der Developpablen. Um die Charaktere der ${}_3C^m$ zu erhalten, projiciren wir sie einmal von einem Punkte O' von S_3 in eine beliebige Ebene S_2 von S_3, und schneiden sodann ihre Developpable mit einer Ebene S_2'.

---

*) Der Beweis vereinfacht sich für zwei perspectivische Dreiecke in der Ebene oder für zwei perspectivische Tetraeder in R_3 beträchtlich.

**) Vergl. meine Notiz im 18. Bande dieser Annalen, p. 448.

Um die Charaktere der $_3C_1^{m'}$ zu erhalten, projiciren wir sie aus einem Punkte O_1' von R_3 in eine Ebene R_2 von R_3 und schneiden übrigens ihre Developpable mit einer Ebene R_2'. Es ist klar, dass das Schneiden der Developpable von $_3C^m$ mit der Ebene S_2' und das Projiciren der $_3C_1^{m'}$ in eine Ebene äquivalente Operationen sind, d. h. die Curve in S_2' und die Curve in R_2 liefern dieselben Charaktere der C^m.

Wir haben also für die C^m nur drei Gruppen von unabhängigen Gleichungen.

Wenn man in dieser Weise fortfährt, so sieht man, dass man für eine C^m in einem n-dimensionalen Raume R_n (wo $m \geqq n$) $n-1$ Gruppen von drei unabhängigen Gleichungen erhält.

Die erste Gruppe bekommen wir durch successives Projiciren. Wir projiciren die C^m zunächst von einem Punkte O aus in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum S_{n-1} in $_{n-1}C^m$, dann projiciren wir die $_{n-1}C^m$ von einem Punkte $O^{(1)}$ von S_{n-1} in einen Raum S_{n-2}; etc.; endlich projiciren wir die $_3C^m$ aus einem Punkte $O^{(n-3)}$ von S_3 in eine Ebene S_2 als Curve $_2C^m$; d. h. wir projiciren die C^m selbst in S_2 von dem $(n-3)$-dimensionalen Raume aus, der durch die $n-2$ Punkte $O, O^{(1)}, \ldots, O^{(n-3)}$ bestimmt wird.

Die weiteren Gruppen erhalten wir, indem wir die Developpable der C^m und aller Projectionscurven $_{n-1}C^m$, $_{n-2}C^m$, etc., $_3C^m$ respective mit Ebenen schneiden, die in $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_3$ enthalten sind. Die Schnittcurven seien $_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}}$, $_{n-2}C_1^{m^{(n-3)}}$, $\ldots$, $_2C_1^{m^{(1)}}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die $n-1$ ebenen Curven $_2C^m$, $_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$, $\ldots$, $_2C_1^{(1)}$ genügen, um die Charaktere und die Gleichungen aller Curven zu bestimmen, die aus der C^m durch Schneiden und Projiciren entstehen können.

32. Wir wollen jetzt die Charaktere der C^m mittelst der obengenannten Curven finden.

Um dies auszuführen, fangen wir mit der ebenen Projectionscurve $_2C^m$ an, deren Charaktere m, k, w, D, R, d sein mögen. Wir interpretiren sie für die C^m.

m liefert die *Ordnung* m aller Projectionscurven und der C^m selbst.

k „ den *ersten Rang* k der Developpable der C^m und aller Projectionscurven, d. h. k ist die Zahl der Tangenten der C^m, die einen Raum R_{n-2} schneiden;

w „ für die C_3^m die Classe, für die $_4C^m$ die Zahl der Schmiegungsebenen, die eine Gerade schneiden, für die $_5C^m$ die Zahl von Schmiegungsebenen, die eine beliebige Ebene treffen u. s. w., und endlich die Zahl der Schmiegungsebenen der C^m, die einen beliebigen Raum R_{n-3} schneiden. *Wir nennen w den zweiten Rang der C^m.* Also:

Die Schmiegungsebenen der C^m bilden eine einfache Mannigfaltigkeit, die eine 3-dimensionale Fläche w^{ter} Ordnung bilden.

R liefert die Zahl der *Spitzen* der C^m selbst und aller ihrer Projectionscurven;

D „ die Zahl der Räume R_{n-2}, die durch den Projectionsraum $O_{n-3} \equiv O, O^{(1)}, \ldots, O^{(n-3)}$ gehen und die Curve C^m zweimal schneiden;

d „ die Zahl der Räume R_{n-1} durch O_{n-3}, die zwei nicht aufeinanderfolgende Tangenten der C^m enthalten.

Hat die C^m D_1 *Doppelpunkte* und d_1 *Doppeltangenten*, so vermehren sich D und d respective um D_1 und d_1. —

Anstatt nun die verschiedenen Curven ${}_2C^{m^{(1)}}, \ldots, {}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ einzeln zu betrachten, wie wir es jetzt für die ${}_2C^m$ gemacht haben, wollen wir jeden Charakter bei allen Curven zugleich für die C^m interpretiren. Es seien

$$m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n-2)}; \;\; k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(n-2)}; \;\; w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-2)};$$
$$R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n-2)}; \;\; D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(n-2)}; \;\; d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(n-2)}$$

die Charaktere dieser Curven. Dann folgt zunächst:

Die Ordnungen $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n-2)}$ *sind alle gleich* k.

Die Inflexionstangenten $w^{(1)}$ der ${}_2C^{m^{(1)}}$ liefern die stationären Ebenen der ${}_3C^m$, die Classe der ${}_4C^m$, und für die folgenden Curven ${}_5C^m, {}_6C^m, \ldots, C^m$ die Zahl der Schmiegungsräume R_3, welche eine Gerade, eine Ebene, u. s. w., einen beliebigen Raum R_{n-4} schneiden. *Wir nennen* $w^{(1)}$ *den dritten Rang der* C^m, *wie auch ihrer Projectionscurven* ${}_{n-1}C^m, \ldots, {}_5C^m$.

Wir können also sagen:

Die Schmiegungsräume R_3 der C^m bilden eine einfache Mannigfaltigkeit von Räumen R_3 und erzeugen zusammengenommen eine 4-dimensionale Fläche $w^{(1)\,ter}$ Ordnung.

Die Inflexionstangenten $w^{(2)}$ der ${}_3C_1{}^{m^{(2)}}$ liefern die stationären Räume R_3 der ${}_4C^m$, die Classe der ${}_5C^m$, dann ferner für die ${}_6C^m$, die ${}_7C^m$ etc., die Zahl der Schmiegungsräume R_4, die eine Gerade, eine Ebene u. s. w., schneiden. *Wir nennen* $w^{(2)}$ *den vierten Rang der* C^m *ebenso von* ${}_{n-1}C^m, \ldots, {}_6C^m$. *Alle Schmiegungsräume R_4 der C^m bilden eine 5-dimensionale Fläche $w^{(2)\,ter}$ Ordnung.*

Das Gesetz der Bildung der Ränge der C^m und ihrer Projectionscurven ist hiernach klar; insbesondere giebt $w^{(n-3)}$ die Classe der C^m und $w^{(n-2)}$ die Zahl ihrer stationären Räume R_{n-1}. Die C^m kann noch w_1 Inflexionstangenten, $w_1^{(1)}$ stationäre Schmiegungsräume R_{n-2} haben, die dann auch respective bei den Projectionscurven vorhanden sein werden. — *Die* C^m *hat also* $n-2$ *Ränge* k, w, $w^{(1)}, \ldots, w^{(n-4)}$, und wir können sagen:

Die Schmiegungsräume R_p *der* C^m $(p > 1 \leqq n-2)$ *bilden eine einfache Mannigfaltigkeit von Räumen* R_p *einer* $(p+1)$-*dimensionalen Fläche der* $w^{(p-2)\text{ten}}$ *Ordnung. Für* $p = 1$ *hat man* $w^{-1} = k$.

Die fernere Uebersicht über die Singularitäten unserer Curven gestaltet sich folgendermassen:

1) *Die Classen*

$$\begin{array}{llll}
k^{(1)} & \text{von} & {}_2C_1^{m^{(1)}} & \text{ist} = w, \\
k^{(2)} & \text{„} & {}_3C_1^{m^{(2)}} & \text{„} \; = w^{(1)}, \\
\vdots & & & \\
k^{(n-2)} & \text{„} & {}_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}} & \text{„} \; = w^{(n-3)}.
\end{array}$$

2) *Die Zahl der Spitzen*

$$\begin{array}{lllllllllll}
R^{(1)} & \text{von} & {}_2C_1^{m^{(1)}} & \text{ist} & \text{gleich} & \text{der Ordnung} & \text{von} & {}_3C^m & \text{d. h.} & = m, \\
R^{(2)} & \text{„} & {}_3C_1^{m^{(2)}} & \text{„} & \text{„} & \text{dem Range } k & \text{„} & {}_4C^m & \text{„} & = k, \\
R^{(3)} & \text{„} & {}_4C_1^{m^{(3)}} & \text{„} & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} \quad w & \text{„} & {}_5C^m & \text{„} & = w, \\
\vdots & & & & & & & & & \\
R^{(n-2)} & \text{„} & {}_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}} & \text{„} & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} \quad w^{(n-4)} & \text{der} & C^m & \text{„} & = w^{(n-4)}.
\end{array}$$

3) *Doppelpunkte.*

a) *Die Zahl der Doppelpunkte* $D^{(1)}$ *von* ${}_2C^{m^{(1)}}$ liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Tangenten der ${}_3C^m$, die sich in einem Punkte einer festen Ebene schneiden. Insofern man die C^m aus dem Raume $O_{n-4} \equiv O, O^{(1)}, \ldots, O^{(n-4)}$ projicirt, liefert sie also die Zahl der Paare von zwei nicht consecutiven Tangenten der C^m, die einen beliebigen Raum R_{n-1} (nämlich den Raum der durch O_{n-4} und die Ebene der Curve ${}_2C^{m^{(1)}}$ bestimmt wird) in zwei Punkten einer Gerade schneiden, welche einen beliebigen Raum O_{n-4} in R_n trifft. *Hat die* C^m d_1 *Doppeltangenten, so vermehrt sich* $D^{(1)}$ *ersichtlich um* d_1.

b) *Die Zahl der Doppelpunkte* $D^{(2)}$ *von* ${}_3C^{m^{(2)}}$. In analoger Weise, wie für $D^{(1)}$, sieht man, dass $D^{(2)}$ die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der C^m liefert, die einen beliebigen R_{n-2} von R_n in zwei Punkten einer Geraden schneiden, welche einen beliebigen festen Raum O_{n-5} von R_{n-2}

trifft. *Hat die* C^m $d_1^{(1)}$ *Doppelschmiegungsebenen, so vermehrt sich* $D^{(2)}$ *um* $d_1^{(1)}$.

Das Gesetz der Bildung dieser Charaktere ist hiernach evident. Schliesslich kommt:

Die Zahl der Doppelpunkte $D^{(n-2)}$ *von* ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ liefert die Zahl von Paaren nicht aufeinanderfolgender Schmiegungsräume R_{n-2} der C^m, die sich in einem Punkte einer festen Ebene schneiden.

$D^{(n-2)}$ *ist also die Ordnung der* $(n-2)$*-dimensionalen Doppelfläche derjenigen Developpable, die aus den Schmiegungsräumen* R_{n-2} *der* C^m *gebildet ist, etc.*

Hat die C^m $d_1^{(n-2)}$ *doppelte Schmiegungsräume* R_{n-2}, *so vermehrt sich* $D^{(n-2)}$ *um* $d_1^{(n-2)}$.

4) *Doppeltangenten.*

a) *Die Zahl der Doppeltangenten* $d^{(1)}$ von ${}_2C^{m^{(1)}}$ liefert die Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der ${}_3C^m$, die sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden, d. h. $d^{(1)}$ liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der C^m, die einen Raum R_{n-1} in zwei Geraden schneiden, welche mit einem festen Raume O_{n-4} von R_{n-1} in einem Raume R_{n-2} liegen. *Hat die* C^m $d_1^{(1)}$ *doppelte Schmiegungsebenen, so vermehrt sich* $d^{(1)}$ *um* $d_1^{(1)}$ *etc.*

b) *Die Zahl der Doppeltangenten* $d^{(n-2)}$ von ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsräumen R_{n-1} der C^m, die sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden.

33. Jede der $n-1$ Curven ${}_2C^m$, ${}_2C_1^{m^{(1)}}$, . . ., ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ besitzt sechs Charaktere. Für die C^m ergeben sich also zunächst $6n-6$ Charaktere. Wir haben aber gesehen, dass:

$$m^{(1)} = m^{(2)} = \cdots = m^{(n-2)} = k;\ k^{(1)} = w,\ k^{(2)} = w^{(1)}, \cdots, k^{(n-4)} = w^{(n-3)};$$

$$R^{(1)} = m,\ R^{(2)} = k,\ R^{(3)} = w, \ldots,\ R^{(n-2)} = w^{(n-2)}.$$

Es sind also $3n-6$ der $6n-6$ Charaktere respective anderen gleich. Daher hat die C^m nur $3n$ allgemeine Charaktere; sie kann überdies noch $n-2$ verschiedenartige stationäre Elemente respective in der Anzahl w_1, $w_1^{(1)}$, $\cdots$, $w_1^{(n-3)}$ und n verschiedenartige Doppelelemente D_1, d_1, d_1^{1}, $\cdots$, $d_1^{(n-2)}$, nämlich D_1 Doppelpunkte, d_1 Doppeltangenten etc., $d_1^{(n-2)}$ Doppelschmiegungsräume R_{n-1} besitzen.

Wir haben also folgende $(n-1)$-Gruppen von 3 Gleichungen:

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} &k = m(m-1) - 2[D + D_1] - 3R;\\ &m = k(k-1) - 2[d + d_1] - 3(w + w_1);\\ &w + w_1 - R = 3(k-m);\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left|\begin{array}{l} w = k(k-1) - 2[D^{(1)} + d_1] - 3(m + w_1); \\ k = w(w-1) - 2[d^{(1)} + d_1^{(1)}] - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}); \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k - w); \end{array}\right.$$

$$(3)\quad\left|\begin{array}{l} w^{(1)} = w(w-1) - 2[D^{(2)} + d_1^{(1)}] - 3(k + w_1^{(1)}); \\ w = w^{(1)}(w^{(1)} - 1) - 2[d^{(2)} + d_1^{(2)}] - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}); \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}); \end{array}\right.$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$(n-1)\quad\left|\begin{array}{l} w^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)} - 1) - 2[D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - 3(w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)}); \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)} - 1) - 2[d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - 3w^{(n-2)}; \\ \qquad w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)} - w^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)} - w^{(n-3)}). \end{array}\right.$$

Für das Geschlecht aber erhält man $2(n-1)$ Gleichungen:

$$(n)\quad\left\{\begin{array}{l} p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - [D + D_1] - R = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - [d + d_1] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (w + w_1), \\ = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - [D^{(1)} + d_1] - (m + w_1) = \frac{(w-1)(w-2)}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \frac{(w^{(n-4)} - 1)(w^{(n-4)} - 2)}{2} - [D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - (w^{(n-2)} + w^{(n-3)}) \\ = \frac{(w^{(n-3)} - 1)(w^{(n-3)} - 2)}{2} - [d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - w^{(n-2)}. \end{array}\right.$$

Wir haben also die Sätze:

Eine Curve C^m in einem n-dimensionalen Raume R_n hat $3n$ allgemeine Charaktere, zwischen welchen $n-1$ Gruppen von 3 unabhängigen Gleichungen bestehen.

Sie kann noch $n-2$ Arten von stationären und n Arten von Doppelelementen enthalten.

Wenn Doppelelemente vorhanden sind, so treten sie in den vorausgehenden Gleichungen nur in den eckigen Klammern auf, d. h. wir können alsdann die Summen $[D + D_1]$, $[d + d_1]$ etc. als $2(n-1)$ Charaktere betrachten.

Man sieht zugleich aus dem Vorhergehenden, dass die Projectionscurven und die Schnittcurven mit ihren Developpablen oder mit den von C^m selbst *dasselbe Geschlecht p besitzen*, wie es sein muss.

Ich sage nun überdiess:

Wenn 3 Charaktere gegeben sind, so kann man die übrigen berechnen.

In der That aus dem Ausdrucke

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - [D + D_1] - R$$

hat man

$$[D + D_1] + R = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p,$$

und aus den Formeln (1), (2), $\cdots$, $(n-1)$ folgt:

$$\begin{aligned}
k &= 2(m-1) - R + 2p,\\
w &= 3(m-2) - 2R - w_1 + 6p,\\
w^{(1)} &= 4(m-3) - 3R - 2w_1 - w_1^{(1)} + 12p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
w^{(n-4)} &= (n-1)(m-n+2) - (n-2)R - [(n-3)w_1 + (n-2)w_1^{(1)} + \cdots\\
&\qquad + w_1^{(n-4)}] + (n-1)(n-2)p,\\
w^{(n-3)} &= n(m-n+1) - (n-1)R - [(n-2)w_1 + \cdots + w_1^{(n-3)}] + n(n-1)p,\\
w^{(n-2)} &= (n+1)(m-n) - nR - [(n-1)w_1 + \cdots +] + n(n+1)p.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben uns aber das Mittel um die Ränge, die Classe und die stationären Räume R_{n-1} der C_m zu berechnen, wenn das Geschlecht p, die Ordnung m, die Zahl der Spitzen und die andern stationären Elemente gegeben sind, was zu beweisen war.

34. Die Projectionscurven der C^m des R_n in die niedrigeren Räume R_{n-1}, R_{n-2}, $\cdots$, R_3, R_2 werden, wie wir wissen, erhalten, indem man von einem R_0, R_1, $\cdots$, R_{n-3} respective projicirt. Wenn wir specielle Lagen der Projectionsräume R_0, R_1, $\cdots$, R_{n-3} betrachten, so bekommen wir Curven der m^{ten} oder niedrigerer Ordnung, deren Singularitäten von der speciellen Lage der Projectionsräume abhängen.

Ein Raum R_{n-3} kann z. B. einen Punkt A_0 mit der Curve gemein haben. Dann legen wir durch die Tangente in A_0 an die Curve einen Raum R_{n-1}, der die Curve C^m noch in $m-2$ Punkten schneidet. Daher wird $[D + D_1]$ sich um $m-2$ vermindern; *und allgemein, wenn* R_{n-3} $\frac{n}{2}$ *Punkte mit der* C^m *gemein hat, so vermindert sich* $[D + D_1]$ *um* $m - n$.

Wenn der R_{n-3} eine Tangente schneidet, so erhält die ebene Projectionscurve der C^m eine Spitze, dasselbe geschieht für die Projectionscurve in einem Raume R_p $(p < n)$, wenn der projicirende Raum R_{n-p-1} von einer Tangente der C^m getroffen wird. Trifft der Raum R_{n-p-1} eine Schmiegungsebene der C^m in einem Punkte, so erhält die Projectionscurve in R_p eine Inflexionstangente; wenn R_{n-p-1} einen

Schmiegungsraum R_s der Curve schneidet, $(s < p)$, so bekommt die Projectionscurve einen stationären Raum R_s.

Wir sehen also, dass die verschiedenen Singularitäten der Projectionscurve. der C^m *aus den verschiedenen Lagen der Projectionsräume* $R_0, R_1, \cdots, R_{n-3}$ *gegen die* C^m *entstehen. Analoge Betrachtungen kann man natürlich auch mit der Developpablen der* C^m *machen. So erkennen wir, wie wichtig das Princip des Projicirens und Schneidens für das Studium der Singularitäten der Curven und in analoger Weise auch der Flächen sein muss.*

Wir werden das besser in den folgenden Paragraphen durch Beispiele verstehen.

§ 2.

Einfachste Anwendungen.

35. Wenn wir in den letzten Formeln Nr. 33. $p=0$, $w_1=w_1^{(1)}=\cdots=w_1^{(n-3)}=0$, $R=0$, $n=m$ setzen, so haben wir die Ränge, die Classe und die stationären R_{n-1} der allgemeinen rationalen Curve C^n. Wir finden:

$$k=2(n-1),\quad w=3(n-2),\ \cdots,\ w^{(n-4)}=2(n-1),$$
$$w^{(n-2)}=n,\quad w^{(n-3)}=0.$$

Die Rationalcurve C^n *in* R_n *hat also die Ränge* 1^{ten} *und* $(n-2)^{\text{ten}}$, 2^{ten} *und* $(n-3)^{\text{ten}}$ *Grades u. s. w. respective einander gleich. Sie hat die Classe* n *und hat keine stationären oder Doppelelemente.*

Nun werde für das Folgende verabredet:

Wir nennen zwei Curven derselben Art, wenn sie dieselben Charaktere besitzen.

Für jede C^n des R_n ist das Geschlecht p nothwendig gleich null, und die Zahl der Spitzen sowie der wirklichen Doppelpunkte auch null, denn sonst müsste sie in einem R_{n-1} enthalten sein. Daher folgt:

Alle C^n *des* R_n *gehören zu derselben Art. Wir wollen sie daher rationale Normalcurven des Raumes* R_n *nennen. Die rationalen Normalcurven des Raumes* R_n *haben keine stationären und keine Doppelelemente.*

Für die elliptische Curve $C^{n+1}(p=1)$, mit

$$w_1=w_1^{(1)}=\cdots=w_1^{(n-3)}=0$$

hat man:

$$k=2(n-1)+2,\quad w=3(n-2)+6,\ \cdots,\ w^{(n-4)}=n^2-1,$$
$$w^{(n-3)}=n(n+1),\quad w^{(n-3)}=(n+1)^2.$$

Eine einfache Ueberlegung lässt nun folgenden Satz sehen:

Die elliptische Curve C^{n+1} *des* R_n *hat keine doppelten oder stationären Elemente, sie hat nur* $(n+1)^2$ *stationäre Räume* R_{n-1}. *Alle elliptischen Curven* C^{n+1} *in* R_n *gehören also zu derselben Art.* —

Wir nennen die C^{n+1} daher die elliptische Normalcurve des R_n. Sie hat die Classe $n(n+1)$ und ihre Ränge sind respective

$$k = 2(n-1) + 2, \quad w = 3(n-2) + 6, \; \cdots, \; w^{(n-4)} = n^2 - 1.$$

36. Wir wollen jetzt die Charaktere einer Curve bestimmen, die den vollständigen Schnitt von $n-1$ $(n-1)$-dimensionalen Flächen ist, deren Ordnungen respective $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(n-1)}$ betragen, und zwar setze ich zuerst voraus, dass sie keine Doppelpunkte und keine Spitzen besitzt. Ich verallgemeinere zu dem Zwecke die Methode, die in der Salmon-Fiedler'schen Geometrie des Raumes (Bd. 2, Art. 83.) angewandt ist.*)

Es sei ein Raum R_{n-2} durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0, \quad b_1 x_1 + \cdots + b_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

und es seien

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \; \cdots, \; u^{(n-1)} = 0$$

als Gleichungen der $n-1$ Flächen gegeben. Wir bilden folgende Determinante:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ u_1^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}, & u_2^{(n-2)} & \cdots & u_{n+1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, \cdots, u_1^{(n-1)}$; $u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, \cdots, u_2^{(n-1)}$ etc. die ersten Differentialen von $u^{(1)} \cdots u^{(n-1)}$ respective nach $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ sind.

Die Determinante (1) stellt eine $(n-1)$-dimensionale Fläche dar, die der Ort derjenigen Punkte P_0 ist, deren Polarräume R_{n-1} in Bezug auf die $n-1$ Flächen u in einer Geraden p_1 sich schneiden, die den gegebenen Raum R_{n-2} trifft. Für die Punkte P_0, in denen die Fläche (1) der Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen begegnet, ist die Gerade p_1 eine Tangente derselben in P_0, und da die Fläche (1) von der Ordnung

$$\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \cdots + \mu^{(n-1)} - (n-1) = \sum_{i=1,\ldots,(n-1)} \mu^{(i)} - n + 1$$

ist, so wird

$$k = \mu^{(1)} \mu^{(2)} \cdots \mu^{(n-1)} \Big(\sum \mu^{(i)} - n + 1 \Big)$$

sein.

Nunmehr können wir aus der Gleichung

---

*) Man sehe auch den synthetischen Beweis von Cremona: „Theorie der Oberflächen", p. 99, für die Durchschnittcurve zweier Flächen in R_3.

$$k = m(m-1) - 2D$$

D bestimmen. Wir finden:

$$2D = \mu^{(1)}\mu^{(2)}\ldots\mu^{(n-1)}\left[\mu^{(1)}\mu^{(2)}\ldots\mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right].$$

Hieraus ergiebt sich sofort der Werth des Geschlechtes. Wir haben in

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - D$$

für m und D ihre Werthe einzusetzen. Dann folgen alle anderen Singularitäten aus den Formeln des vorigen Paragraphen.

Haben zwei der $(n-1)$-dimensionalen Flächen $u^{(i)}$ eine einfache Berührung, so hat ihre Durchschnittsfläche von $n-2$ Dimensionen einen Doppelpunkt R_0, und daher wird auch die vollständige Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen u_i an der betreffenden Stelle einen Doppelpunkt erhalten. Alle Geraden, welche in R_0 mit der Schnittfläche 3 Punkte gemein haben, bilden nach Nr. 5. einen $(n-2)$-dimensionalen R_0-Kegel 2ter Ordnung. Zerfällt dieser Kegel in zwei Räume R_{n-2}, so bleibt R_0 für die Durchschnittcurve noch immer ein Doppelpunkt; fallen die beiden Räume zusammen, so sagen wir, dass die zwei $(n-1)$-dimensionalen Flächen $u^{(i)}$ sich *stationär* berühren. In diesem Falle ist R_0 eine Spitze der Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(i)}$. Es wird daher:

$$k = \mu^{(1)}\ldots\mu^{(n-1)}\left(\sum \mu^{(i)} - n + 1\right) - 2D_1 - 3R$$

sein, wenn D_1 einfache Berührungen und R stationäre Berührungen stattfinden. Daraus folgt:

$$2D = \mu^{(1)}\ldots\mu^{n-1}\left(\mu^{(1)}\ldots\mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) - 2D_1$$

und

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - D - D_1 - R.$$

Wenn also die vollständige Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ D_1 Doppelpunkte und R Spitzen erhält, so vermindert sich das p um $D_1 + R$.

Uebrigens sind ihre Charaktere, wie wir sehen, vollstängig bestimmt.

Als Beispiel nehmen wir 3 beliebige 3-dimensionale Flächen in R_4; sie schneiden sich in einer C^8. Somit kommt:

$$n = 8,\quad k = 8,\quad D = 16,\quad p = 5,\quad w = 48,\quad w^{(1)} = 32,\quad w^{(2)} = 120.$$

Die vollständige Durchschnittcurve von 3 beliebigen 3-dimensionalen Flächen 2ter Ordnung in R_4 hat den 1ten Rang $= 8$, den 2ten $= 48$; sie hat die Classe 32, das Geschlecht 5, und 120 stationäre Räume R_3. — Welche Lage haben diese 120 Räume?

37. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Durchschnittscurve der $(n-1)$-Flächen $u^{(i)}$ in zwei Curven der Ordnung m und m' zerfällt, und wollen unter dieser Annahme D berechnen, indem wir voraussetzen, dass weder Doppelpunkte noch Spitzen vorhanden sind.

Die Schnittpunkte eines R_{n-2} mit der Durchschnittscurve, welche sie zweimal trifft, können entweder auf einer oder auf der andern Curve, respective auf beiden Curven liegen. Wir benennen diese drei Fälle mit den 3 Zahlen D, D', D''. Wir haben gesehen, dass im allgemeinen Falle

$$2D = \mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)}\left[\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right]$$

ist. Es giebt dann eine $(n-1)$-dimensionale Fläche der Ordnung

$$\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right),$$

welche die Curve in denjenigen $2D$ Punkten schneidet, die mit einen bestimmten Raume R_{n-3} (welchem die Fläche entspricht) verbunden, die D durch R_{n-3} hindurchlaufende Räume R_{n-2} liefern, die die Curve zweimal schneiden*). Dieselbe Fläche muss jetzt in den $2(D+D'+D'')$ Punkten schneiden. Daher müssen wir haben

$$m\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) = 2D + D'',$$
$$m'\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) = 2D' + D''.$$

Daraus folgt:

$$2(D - D') = (m - m')\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right).$$

Wenn also die Charaktere der einen Curve bekannt sind, so kann man die der zweiten berechnen.

Wir denken uns nun, dass die $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ in einer festen Curve $C^{m'}$ sich schneiden. Sie schneiden sich dann im Allgemeinen in einer andern Curve C^m, die im Allgemeinen keine Doppelpunkte oder Spitzen besitzt. Wenn jetzt zwei Flächen $u^{(i)}$ eine einfache oder eine stationäre Berührung in D_1 respective R Punkten bekommen, so wird die C^m D_1 Doppelpunkte und R Spitzen erhalten, und es folgt dann, dass D um D_1 sich vermehrt, und dass p um $D_1 + R$ sich vermindert.

Da man eine beliebige Curve in R_n als (vollständigen oder unvollständigen) Schnitt von $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ betrachten kann, so schliesst man allgemein: *Wenn eine Curve C^m vom Geschlechte p in R_n ge-*

---

*) Man sieht dies, indem man die Gleichung des $(n-1)$-dimensionalen Kegels bildet, welcher aus einem Raume R_{n-3}, der mit der Curve einen Punkt gemein hat, die Schnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(1)}$ projicirt. Man sehe auch den synthetischen Beweis von Cremona, l. c. p. 101, für den Fall $n = 3$.

geben ist und sie erhält noch D_1 *neue Doppelpunkte und* R *Spitzen, so vermindert sich ihr Geschlecht* p *um* D_1+R.

Als Beispiel betrachten wir drei 3-dimensionale Flächen 2ten Grades $F_3{}^2$ in R_4:

1) Schneiden sich die drei Flächen in einer C^3 eines R_3, so schneiden sie sich im Allgemeinen noch in einer C^5. — Wir haben also:

$$D'=1,\quad m'=3,\quad m=5,$$

daher:

$$D=5,\quad p=1.$$

Wir bekommen also die elliptische Normalcurve des R_4, die $(m+1)^2=25$ stationäre Räume R_3 hat*).

Wenn sich zwei der Flächen in einem Punkte berühren, so wird die C^5 einen Doppelpunkt erhalten, d. h.

$$D=6,\quad p=0$$

sein.

2) Schneiden sich die $F_3{}^2$ in einem Kegelschnitte, so schneiden sie sich weiter in einer C^6:

$$D'=0,\quad m'=2,\quad m=6,$$
$$D=8;\quad p=2.$$

3) Schneiden sie sich in einer Geraden g_1, so schneiden sie sich weiter in einer C^7. Man hat für letztere:

$$D'=0,\quad m'=1,$$
$$D=12,\quad p=3.$$

Diese C^7 *hat also das Geschlecht* 3.

Die Gerade g_1 *ist eine dreifache Secante der* C^7. (*Uebrigens die einzige dreifache Secante.*)

In der That, man betrachte, um Letzteres nachzuweisen, drei 3-dimensionale R_0-Kegel 2ter Ordnung in R_4. Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in einer C^8. Haben sie aber eine erzeugende g_1 gemein, so erzeugen sie eine C^7, die durch die Spitzen der 3 Kegel geht. Ueberdies gehen durch die C^7 und die g_1 ∞^2 $F_3{}^2$. Oder auch so: Die 3 Kegel können so liegen, dass 3 Ebenen derselben sich in einer Geraden g_1 schneiden. Dann legen wir durch g_1 einen R_3; er wird die 3 Kegel in drei $F_2{}^2$ schneiden, die durch g_1 gehen und daher noch 4 Punkte gemein haben. Die Gerade g_1 ist also in der That eine dreifache Secante der C^7.

---

*) Klein hat in einer kurzen Note dieser Annalen, Bd. XVII, die elliptische Curve C^{n+1} des Raumes R_n als Vertreterin des elliptischen Integrals 1ter Gattung angenommen. — Die C^5 in R_4 ist in diesem Sinne von Dr. Bianchi in demselben Bande studirt worden.

In dem Netze von drei beliebigen F_3^2, die sich in einer C^7 und einer Geraden g_1 schneiden, giebt es unendlich viele R_0-Kegel, die dem Netze zugehören, und zwar liegen ihre Spitzen in der Jacobi'schen Fläche des Netzes. Daher ist unser Satz allgemein bewiesen.

§ 3.

Rationale Curven.*)

38. Wir haben in § 1. gesehen, dass irgend zwei rationale Normalcurven C^n des R_n dieselben Charaktere besitzen; sie sind von der n^{ten} Classe und haben keine stationären Räume.

Das ergiebt sich auch aus der Thatsache, *dass zwei rationale Normalcurven* C^n, C'^n *des* $R_n \infty^3$ *oft sich linear in einander transformiren lassen*, wie wir jetzt beweisen werden. Eine rationale Curve C^n des R_n kann durch n projectivische Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Räumen

$$A^{(1)}_{n-1} + \lambda B^{(1)}_{n-1} = 0, \quad \cdots, \quad A^{(n)}_{n-1} + \lambda B^{(n)}_{n-1} = 0$$

erzeugt werden (wie wir im nächsten Abschnitte näher erläutern wollen). Es geht aus dieser Construction der C^n hervor, dass die Coordinaten jedes ihrer Punkte bei Einführung eines passenden Coordinatensystems sich folgendermassen darstellen lassen:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_{n+1} = \lambda^n : \lambda^{n-1} : \lambda^{n-2} : \cdots : 1,$$

wo λ ein Parameter ist.

Betrachten wir nun eine andere Curve C'^n. Wir können dann die Coordinaten ihrer Punkte bei Festhaltung des Coordinatensystems durch rationale ganze Functionen von λ darstellen:

$$(2) \qquad x_1' : x_2' : x_3' : \cdots : x_{n+1}' = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda) : \cdots : f_{n+1}(\lambda).$$

Hier lassen sich $f_1, f_2, \cdots f_{n+1}$ linear durch λ^n, $\lambda^{n-1}, \cdots 1$ zusammensetzen, so dass wir zwischen den x_i und x_i' folgende Transformationsformeln haben werden:

$$(3) \qquad \varrho x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n,$$

wo die a_{ik} die Coefficienten der Function $f_i(\lambda)$ sind.

Aus (3) geht hervor, dass nicht nur einem Punkte x_i der C^n ein Punkt der C'^n projectivisch entspricht, sondern auch dass jedem Punkte des Raumes R_n ein anderer Punkt des R_n in projectivischer Weise entspricht, d. h. wir haben zwei collineare Räume S_{n-1}, S'_{n-1} in R_n, bei welchen die Curven C^n, $C^{n\prime}$ sich projectivisch entsprechen. Wenn wir nun beachten, dass derselbe Schluss bestehen bleibt, indem wir in (2)

---

*) Siehe auch Abschnitt V, § 3.

λ durch $\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ ersetzen, so sehen wir in der That, dass die beiden Curven, die auch zusammenfallen können, durch ∞^3 lineare Transformationen in sich übergehen.

39. Betrachten wir jetzt eine Normalcurve C^n des R_n. Wenn wir sie aus einem ihrer Punkte in einen Raum R_{n-1} projiciren, so erhalten wir eine Curve C^{n-1}, die auch eine rationale Normalcurve des R_{n-1} ist. Verfahren wir in derselben Weise mit der C^{n-1} u. s. w., so bekommen wir folgenden Satz:

Jede rationale Normalcurve C^m des $R_m (m < n)$ kann durch Projection der C^n des R_n von einem R_{n-m-1} aus, der $n-m$ beliebige Punkte mit der Curve C^n gemein hat, erhalten werden.

Betrachten wir jetzt eine Rationalcurve C'^n n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_m, so lassen sich die Coordinaten ihrer Punkte durch rationale ganze Functionen n^{ten} oder niedrigeren Grades eines Parameters λ darstellen, d. h. wir haben:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : \cdots : x_{m+1} = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \cdots : f_{(m+1)}(\lambda).$$

Jetzt fügen wir noch $n-m$ Coordinaten $x_{m+2}, \ldots, x_{n+1}$ und noch $n-m$ rationale ganze Functionen n^{ten} Grades von λ hinzu, so erhalten wir eine rationale Normalcurve des R_n, aus welcher die gegebene Curve mittelst Projection entsteht. Die Curve (1) mag also Singularitäten haben, welche sie will, sie wird immer als Projection einer Normalcurve C^n des R_n erhalten, und da alle rationale Normalcurven des R_n projectivisch sind, so sehen wir, dass durch geeignete Projection einer und derselben C^n des R_n alle Arten von Rationalcurven n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in den Räumen von weniger als n Dimensionen erhalten werden können.

Dieser Satz ist dem früher aufgestellten Theoreme analog, dass man aus einer Fundamentalpyramide des R_n alle in niedrigeren Räumen gelegene Arten von Configurationen von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten durch geeignete Projection erhält. Wir haben also den folgenden Satz:

Jede beliebige Rationalcurve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_2, $R_3, \ldots, R_{n-1}$ ist immer die eindeutige Projection einer Normalcurve C^n des R_n. Und umgekehrt aus einer Rationalcurve der n^{ten} Ordnung in R_n kann man durch geeignete Projection jede Art von Rationalcurven der n^{ten} oder niedrigerer Ordnung in den Räumen $R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots, R_3, R_2$ erhalten.

Analog kommt:

Jede rationale Curve n^{ter} oder niedrigerer Classe in $R_2, R_3, \ldots R_{n-1}$ kann immer durch geeignetes Schneiden aus der developpablen Fläche einer C^n in R_n erhalten werden, und umgekehrt.

Also können wir auch sagen:

Wenn eine Rationalcurve in $R_2, \dots R_{n-1}$ *von der* n^{ten} *Ordnung und von der* m^{ten} *Classe ist, wo* $m = n + q$ *sein mag, so kann man sie durch Projection aus der Normalcurve* C^{n+q} *des* R_{n+q} *oder durch Schneiden der zugehörigen Developpabeln erhalten.*

40. Aus den Formeln der 33. Nummer finden wir für $p = 0$ und $m = n$

$$D + R = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad w = 3(n-2) - 2R,$$

so dass die *Maximalzahl der Spitzen* einer Rationalcurve n^{ter} Ordnung in R_2

$$(1) \qquad R_2 = \left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$$

ist.

Sind w Inflexionstangenten vorhanden, so kommt entsprechend

$$(1') \qquad R = \left[\frac{3}{2}(n-2) - \frac{w}{2}\right].$$

Für die rationalen Curven in R_3 ergiebt sich als Maximalzahl der Spitzen:

$$(2) \qquad R = \left[\frac{4}{3}(n-3)\right],$$

und wenn $w_1^{(1)}$ stationäre Ebenen und w_1 Inflexionstangenten vorhanden sind, so ist:

$$(3) \qquad R = \left[\frac{4}{3}(n-3) - \frac{2}{3}w_1 - \frac{w^{(1)}}{3}\right].$$

Allgemein erhält man für die Rationalcurve C^n in R_m die Maximalzahl der Spitzen

$$R = \left[\frac{m+1}{m}(n-m)\right],$$

und wenn w_1 Inflexionstangenten, $w_1^{(1)}$ stationäre Ebenen u. s. w., $w^{(m-2)}$ stationäre Räume R_{m-1} vorhanden sind, so ist:

$$R = \left[\frac{m+1}{m}(n-m) - \frac{m-1}{m}w_1 + \frac{m-2}{m}w_1^{(1)} + \dots + \frac{w^{(m-2)}}{m}\right].$$

Wir werden jetzt sehen: *Dass die* C^n *in* R_m *wirklich das betreffende Maximum erreichen kann, dass überdies auch alle anderen Fälle wirklich vorkommen.*

Betrachten wir zu dem Zwecke die C^n des R_n und projiciren wir dieselbe zunächst von einem allgemein gelegenen Raume R_{n-3} auf eine Ebene, so hat man für die Projectionscurve allgemein:

$$D = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nun ist ein R_{n-3} in R_n durch $n-2$ Punkte bestimmt; der R_{n-3} hängt also von $3(n-2)$ unabhängigen Constanten ab. Wenn $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n-2)}$ die Coordinaten der $n-2$ beliebigen Punkte von

R_{n-3} sind, so haben die Coordinaten jedes Punktes dieses Raumes die Form:

$$\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \ldots + \lambda^{(n-2)} x_i^{(n-2)}.$$

Wenn eine Ebene

$$\mu^{(1)} x_i'^{(1)} + \mu^{(2)} x_i'^{(2)} + \mu^{(3)} x_i'^{(3)}$$

den Raum R_{n-3} schneiden soll, so muss eine Bedingung erfüllt werden, nämlich es muss folgende Determinante verschwinden:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1'^{(1)}, & x_1'^{(2)}, & x_1'^{(3)}, & x_1^{(1)}, & x_2^{(2)} & \ldots & x_1^{(n-2)} \\ x_2'^{(1)}, & x_2'^{(2)}, & x_2'^{(3)}, & x_2^{(1)}, & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n-2)} \\ \vdots & & & & & & \\ x'^{(1)}_{n+1}, & x'^{(2)}_{n+1}, & x'^{(3)}_{n+1}, & x^{(1)}_{n+1}, & x^{(2)}_{n+1} & \ldots & x^{(n-2)}_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Dagegen müssen zwei Bedingungen erfüllt werden, wenn eine Gerade den Raum R_{n-3} schneiden soll, denn statt einer $(n-1)$ gliedrigen Determinante (1) haben wir eine Matrix mit $n+1$ Zeilen und n Columnen. Also:

Wenn $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ *beliebige Geraden oder* $3(n-2)$ *Ebenen in* R_n *gegeben sind, so giebt es wenigstens einen* R_{n-3}, *der sie alle trifft.**)

Wenn man jetzt die $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ beliebigen Geraden als Tangenten der C^n annimmt und die C^n von einem Raume R_{n-3}, der diese Tangenten trifft, projiciren, so erhält die Projectionscurve in der Ebene wirklich $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ Spitzen. Die ebene Rationalcurve n^{ter} Ordnung erreicht dann also die Maximalzahl der Spitzen, *und umgekehrt sehen wir, dass es keinen Raum* R_{n-3} *giebt, der mehr als* $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ *Tangenten der* C^n *schneidet.*

Wir können einen Raum R_{n-3} nach Belieben natürlich auch so wählen, dass er weniger als $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ Tangenten der C^n schneidet. Die C^n in R_2 kann also $R=0, 1, 2, \cdots \left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ haben, wie behauptet wurde.

Wenn ein R_{n-3} eine Schmiegungsebene der C^n trifft, aber nicht die Tangenten in ihr, so erhält die C^n eine Inflexionstangente. Soll nun ein R_{n-3} w Schmiegungsebenen der C^n in einem Punkte treffen, so kann man noch so über ihn verfügen, dass er $\left[\frac{3}{2}(n-2) - \frac{w}{2}\right]$

---

*) Durch Ueberlegungen, die ich hier nicht ausführe, kann man sich in aller Strenge überzeugen, dass die Zahl der betreffenden R_{n-3} immer > 0 sein muss.

Tangenten trifft; diese Zahl stimmt mit der Maximalzahl der Spitzen der ebenen Rationalcurve, wenn w Inflexionstangenten vorhanden sind, überein. Da $3(n-2)$ beliebige Ebenen in R_n immer von einem R_{n-3} respective in einem Punkte geschnitten werden, und im Allgemeinen für die ebene Curve

$$w = 3(n-2)$$

ist, so sehen wir umgekehrt, *dass ein* R_{n-3} *in* R_n *nur* $3(n-2)$ *Schmiegungsebenen der* C^n *schneiden kann*, *dass dies im Allgemeinen aber auch wirklich geschieht.*

41. Wir projiciren jetzt die C^n von einem Raume R_{n-4} in einen Raum R_3. Der Raum R_{n-4} hängt von $4(n-3)$ Constanten ab, und daher werden $\left[\frac{4}{3}(n-3)\right]$ beliebige Geraden, oder $2(n-3)$ beliebige Ebenen, oder $4(n-1)$ R_3, in R_n wenigstens von einem R_{n-4} in Punkten geschnitten.

Wenn wir so fortfahren und die nämlichen Schlüsse ziehen, die wir vorher für die ebenen Curven gezogen haben, so sehen wir, dass eine Curve n^{ter} Ordnung in einem Raume R_m die Maximalzahl der Spitzen, Inflexionstangenten u. s. w. stationären Räume R_{m-1} wirklich erreichen kann.

Nun überlege man sich, dass, wenn die stationären Elemente w_1, $w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(n-4)}$ gegeben sind, man die anderen Charaktere durch das Geschlecht p, die Ordnung m und Zahl der Spitzen berechnen kann.

Man beachte ferner, dass, wenn ein System positiver ganzer Lösungen der $3(m-1)$ Gleichungen, die zwischen den Singularitäten der Curven in R_n bestehen, gegeben ist, auch R ganz und positiv sein muss, zugleich aber auch das Maximum von R nicht übersteigen kann. Somit haben wir folgenden Satz:

Alle ganzen positiven Lösungen der $3(n-1)$ *Gleichungen einer* C^m *in* R_n (*daher auch der Plücker'schen Gleichungen in der Ebene und der Cayley-Plücker'schen Gleichungen in* R_3) *sind für* $p=0$ *Charaktere wirklich existirender Curven.* —

Andere Eigenschaften der Rationalcurven mittelst des Projicirens und Schneidens werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

§ 4.

Elliptische Curven und Curven von beliebigem p.

42. *Elliptische Curven.*

Man hat auch für die elliptischen Normalcurven das Analogon desjenigen Satzes, den wir für die rationalen Normalcurven der Räume R_2, R_3, $\cdots$ R_{n-1} in Nr. 38. gegeben haben, d. h. *dass die elliptischen Normalcurven der Räume* R_2, R_3, $\cdots$ R_{n-1} *durch Projection der*

C^{n+1} *des* R_n *hervorgehen, in derselben Weise wie die rationalen Normalcurven derselben Räume aus der* C^n *des* R_n *entstehen.*

Die Coordinaten der Punkte einer elliptischen Normalcurve C^{n+1} des R_n lassen sich als elliptische Functionen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades eines Parameters darstellen, welche identische Periodicitätsmoduln ω, ω' besitzen.*)

Die Coordinaten einer elliptischen Curve C^q in einem Raume R_m, wo $m < n$ ist, lassen sich auch als elliptische Functionen eines Parameters darstellen, so dass man durch Hinzufügung von $n - m$ Coordinaten und betreffenden elliptischen Functionen mit identischen Periodicitätsmoduln ω, ω' eine Normalcurve in R_n erhält, aus welcher die gegebene Curve in R_m als Projection entsteht.

Wir haben gesehen, dass alle elliptischen Curven C^{n+1} des R_n dieselben Charaktere besitzen und also zu derselben Art gehören. Somit:

Jede elliptische Curve der $(n+1)^{\text{ten}}$ *oder niedrigeren Ordnung in einem* R_m, *wo* $m < n$ *ist, kann als eindeutige Projection einer elliptischen Normalcurve des Raumes* R_n *angesehen werden. — Und umgekehrt, aus der einzelnen elliptischen Normalcurve* C^{n+1} *in* R_n *kann man alle Arten von elliptischen Curven von der* $(n+1)^{\text{ten}}$ *oder niedrigeren Ordnung in den Räumen* $R_2, R_3, \cdots, R_{n-1}$ *erhalten, die bei demselben Modul möglich sind.*

Es gilt natürlich der duale Satz, aber nicht in derselben Form wie bei den Rotationalcurven, denn die Classe der C^n in R_n ist auch n, während die Classe der elliptischen Curven C^{n+1} in R_n gleich $n(n+1)$ ist (Nr. 36.).

Dass bei allen diesen Projectionen der Modul der elliptischen Functionen (der für die Curven ein Doppelverhältniss bedeutet) ungeändert bleibt, erläutere ich im Texte der Kürze halber nicht. Der Hauptzweck meiner Arbeit ist der, das Studium der projectivischen Eigenschaften eines geometrischen Gebildes eines Raumes R_m durch Projection oder Schneiden eines allgemeineren und einfacheren Gebildes des R_n zu erleichtern, und in diesem Sinne z. B. die verschiedenen Arten von Curven und Flächen nach ihren Singularitäten zu studiren, wie ich schon in der Einleitung betont habe. Daher werde ich diejenigen Sätze der Theorie der algebraischen Functionen als gegeben betrachten, die mich zu meinem Ziele führen.

43. *Curven von beliebigem Geschlechte p.*

Man unterscheidet auf einer ebenen Curve $F(s, z) = 0$ Punktgruppen, durch welche keine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung φ hindurchgeht und Punktgruppen (Specialgruppen), bei denen dieses der Fall ist.*) Wenn wir in irgend einer Curve $F(s, z) = 0$ der Ordnung n und des Geschlechts p, m Punkte nehmen, die eine Gruppe der ersten Art bilden, so geht durch sie keine φ, aber wohl eine adjungirte Curve $C^{n'}$, wo $n' > n - 3$ sein wird. Dann sind genau p der nn' Schnittpunkte der beiden Curven durch die übrigen bestimmt. Daher gehen durch sie $m - p + 1$ unabhängige Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... $F^{(m-p+1)}$.

---

*) Siehe Clifford l. c. und Klein, Math. Annalen Bd. XVII l. c.

Setzt man jetzt

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{m-p+1} = F^{(1)} : F^{(2)} : \ldots : F^{(m-p+1)},$$

so hat man eine C^m in R_{m-p} mit dem Geschlechte p, und eine solche C^m kann nicht in einem höheren Raume als R_{m-p} enthalten sein, ohne in einem R_{m-p} zu liegen.**) Wir sehen also: Dass die C^n in R_n nothwendig $p = 0$, die C^{n+1} höchstens $p = 1$ etc., die C^{n+r}, wo $r < n$ ist, höchstens $p = r$ hat. Für die C^{n+n} hört das Gesetz auf, weil Punktsysteme 2ter Art auftreten. Die C^{n+n} kann höchstens das Geschlecht $n + 1$ haben, wie z. B. die C^4 in der Ebene das Geschlecht 3 erreichen kann. Solche Curven kann man *Curven* 2ter *Art* des bezüglichen Raumes nennen. Wir werden aber für unsern Zweck nur Curven 1ter Art betrachten, denn wir können immer in einem höheren Raume Curven 1ter Art mit einem bestimmten p finden. So z. B. ist die C^7 in R^4 eine Curve 1ter Art mit $p = 3$, wie die allgemeine C^4 in der Ebene, die eine Curve 2ter Art ist.

Die C^{n+r} des R_n, mit $p = r < n$, kann keine Doppelpunkte oder Spitzen erhalten, denn nach unseren früheren Untersuchungen (Nr. 37.) würde das p sich dann vermindern.

Sie kann aber stationäre Elemente erhalten. Daher zerfallen die C^{n+r} in R_n mit $p = r$ in verschiedene Arten von Curven, die wir alle *Normalcurven* des Geschlechtes $p = r < n$ in R_n nennen.

Wenn man eine solche C^{n+r} von einem Raume R_{n-r-2} in einen R_{r+1} projicirt, der mit der C^{n+r} $n - m - 1$ Punkte gemein hat, so erhält man in R_{r+1} eine Normalcurve C^{2r+1} desselben Geschlechtes r, und welche die letzte Normalcurve des R_{r+1} ist, wenn man als erste die rationale Normalcurve bezeichnet. Projicirt man aber die C^{n+r} von einem Raume R_{n-r-1}, der mit C^{n+r} $n - m$ Punkte gemein hat, in einen R_n, so erhält man eine C^{2r}, die in R_r keine Normalcurve, in unserem Sinne, ist; nur die rationalen und elliptischen Normalcurven des R_n haben die Eigenthümlichkeit, dass sie von einem beliebigen solchen Raume R_{n-r-1} in einen R_n projicirt, eine rationale oder elliptische Normalcurve des R_r liefern. Also:

---

*) Brill und Nöther: „Ueber algebraische Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie," Math. Annalen Bd. VII, p. 269.

**) Diesen Satz hat Clifford l. c. mit Hülfe des Abel'schen Theorems bewiesen.

Jede Normalcurve C^{n+r} mit dem Geschlechte $p = r < n$ ergiebt, durch geeignetes Projiciren, Normalcurven desselben Geschlechtes in den Räumen R_{n-1}, R_{n-2}, $\cdots$, R_{r+1}.

44. Projiciren wir jetzt eine Normalcurve C^{n+r} des R_n von einem beliebigen Raume R_{n-m-1} in R_m, so erhalten wir eine Curve C'^{n+r} des R_m von dem Geschlechte $p = r$ und von der Ordnung $n + r$, sofern R_{n-m-1} die C^{n+r} nirgendwo schneidet.

Projiciren wir jetzt weiter die C'^{n+r} in eine ebene Curve ${}_1C'^{n+r}$. Diese Curve ${}_1C'^{n+r}$ und die Curve $F(s, z) = 0$ der vorigen Nummer, die uns zur Bestimmung der C^{n+r} gedient hat, sind auf einander transformirbar, daher kann man die $C'^{(n+r)}$ auch durch algebraische Functionen eines Parameters darstellen, die nach Riemann*) mit denjenigen der Normalcurven C^{n+r} des R_n zu derselben Classe gehören.

Umgekehrt kann man von jeder Curve $(n + r)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung zur Normalcurve C^{n+r} des R_n aufsteigen. Also:

Wenn man alle Normalcurven eines Geschlechtes $p < n$ in R_n in allen möglichen Weisen projicirt, so erhält man alle Arten von Curven der $(n + p)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in den niedrigeren Räumen als R_n, und umgekehrt:

Jede beliebige Curve der $(n + p)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in R_m (wo $m < n$ ist) vom Geschlechte p kann als eindeutige Projection einer Normalcurve des Geschlechtes p des Raumes R_n erhalten werden.

45. Ob die ganzzahligen Lösungen der $3(n - 1)$ unabhängigen Gleichungen, welche für die Singularitäten einer Curve in R_n, $p > 0$, bestehen, die Charaktere existirender Curven sind, bleibt zu untersuchen. Man muss zusehen, welches das Maximum von Tangenten, z. B. der elliptischen Normalcurve ist, die von einem R_{n-3} etc. geschnitten werden können. Man bekommt dann in der Ebene u. s. w. die Maximalzahl der Spitzen der Projectionscurve der Ordnung $n + 1$. Jedenfalls lassen sich die Betrachtungen, die wir für die rationale Normalcurve des R_n in Nr. 40. gemacht haben, ganz ebenso für die anderen Normalcurven des R_n^p anstellen und daher gewinnen wir folgenden Satz:

Eine Curve in R_2, R_3 etc. der $(n + p)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem Geschlechte p kann wenigstens $0, 1, \cdots, \frac{3}{2}(n-2)$ respective $0, 1, \cdots, \frac{4}{3}(n-3)$ etc. Spitzen etc.; $0, 1, \cdots, 3(n-2)$ respective $0, 1, \cdots, 2(n-3)$ etc. Inflexionstangenten und eine Curve in R_3 etc. $0, 1, \cdots, 4(n-3)$ stationäre Ebenen etc. erhalten.

---

*) Theorie der Abel'schen Functionen; siehe Riemanns Werke, p. 112.

Abschnitt V.

Erzeugnisse durch collineare Grundgebilde.

§ 1.

Doppelerzeugung derselben.

46. Die Erzeugnisse durch collineare Grundgebilde in der 3-dimensionalen Geometrie besitzen eine doppelte Erzeugung.

Zum Beispiel wird die C^3 in der Ebene durch zwei lineare Systeme 2^{ter} Stufe von collinearen Geradensystemen erzeugt. Die $F_2{}^3$ in R_3 lässt sich durch zwei lineare Systeme 2^{ter} Stufe von collinearen Ebenenbündeln erzeugen, deren Scheitel auf der $F_2{}^3$ selbst liegen. Diesen zwei Systemen entsprechen zwei Systeme von Curven 3^{ter} Ordnung der Fläche, wie es bekannt ist.*)

Ehe ich zu den Erzeugnissen des R_n übergehe, die ich später behandeln will, schicke ich den allgemeinen Beweis ihrer doppelten Erzeugung voraus.

Es seien $p_1{}^{(1)}, p_2{}^{(1)}, \cdots, p_m^{(1)}$ m Räume, die ein Gebilde $S^{(1)}_{n-m}$ $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe bestimmen, und in analoger Weise $p_i{}^{(2)}, p_i{}^{(3)}, \cdots, p_i{}^{(s)}$ (wo $i = 1, 2, \cdots, m$ ist) andere $s-1$ Gruppen von m Räumen R_{n-1}, welche die Gebilde $S^{(2)}_{n-m}, S^{(3)}_{n-m}, \cdots, S^{(s)}_{n-m}$ bestimmen. Um die Ideen besser zu fixiren, schreiben wir die s Gebilde in folgender Form:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda^{(1)} p_1{}^{(1)} + \lambda^{(2)} p_2{}^{(1)} + \cdots + \lambda^{(m)} p_m^{(1)} = 0, \\ \vdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda^{(1)} p_1{}^{(s)} + \lambda^{(2)} p_2{}^{(s)} + \cdots + \lambda^{(m)} p_m^{(s)} = 0. \end{array}\right.$$

Das Erzeugniss dieser Gebilde wird dann durch das Verschwinden folgender Matrix dargestellt:

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} p_1{}^{(1)},\ p_2{}^{(1)},\ \cdots,\ p_m^{(1)} \\ \vdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p_1{}^{(s)},\ p_2{}^{(s)},\ \cdots,\ p_m^{(s)} \end{array}\right| = 0.$$

Wenn wir uns nun folgende m collineare Gebilde M^k_{n-s} $(s-1)^{\text{ter}}$ Stufe gebildet denken, nämlich

---

*) Herr Dr. Schur hat sich in seiner Habilitationsschrift, Math. Annalen, Bd. XVIII, 1. Heft, mit der doppelten Erzeugung der C^3 in der Ebene und in R_3, der $F_2{}^3$, einer $F_2{}^4$ und der C^6 vom Geschlechte $p = 3$ des R_3 beschäftigt. Er giebt aber für jeden Fall dieser Erzeugnisse einen Beweis, obgleich er in der Vorrede bemerkt, dass ihre Doppelerzeugung aus den einfachsten Determinanteneigenschaften hervorgeht.

$$(1') \quad \begin{cases} \mu^{(1)} p_1^{(1)} + \mu^{(2)} p_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} p_1^{(s)} = 0, \\ \vdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \mu_1^{(1)} p_m^{(1)} + \mu^{(2)} p_m^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)} p_m^{(s)} = 0, \end{cases}$$

so sehen wir, dass sie die nämliche Fläche (2) erzeugen. Denn der Uebergang von (1) zu (1′) kommt darauf hinaus, die Zeilen mit den Columnen der Matrix zu vertauschen.

Wenn wir jetzt aus dem linearen System (1) s beliebige collineare Gebilde S_{n-m} herausgreifen, z. B.

$$\sigma_1 (\lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \cdots + \lambda^{(m)} p_m^{(1)}) + \cdots + \sigma_s (\lambda^{(1)} p_1^{(s)} + \cdots + \lambda^m p_m^{(s)}) = 0$$
etc.,

und diese vermöge der σ collinear beziehen, so erzeugen sie wieder dieselbe Fläche, da die Matrix (2) unverändert bleibt; denn das kommt darauf hinaus, für das erste geschriebene Gebilde die Columnen respective mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ zu multipliciren und zu der ersten zu addiren.

Dasselbe gilt natürlich auch für das System (1′). Liegt ein Raum $S_{n-m}^{(i)}$ oder ein $M_{n-s}^{(k)}$ der zwei Systeme (1) und (1′) in der Fläche, d. h. gehören alle seine Punkte der Fläche an, so liegt offenbar jeder solche Raum S_{n-m} oder M_{n-s} in der Fläche.

Wir wollen die zwei Systeme (1) und (1′) *conjugirt* nennen.

Man hat also folgende allgemeine Sätze:

Ist eine Fläche F von irgend einer Dimension und Ordnung durch s collineare Grundgebilde $(m-1)^{ter}$ Stufe $S_{n-m}^{(1)}, S_{n-m}^{(2)}, \cdots, S_{n-m}^{(s)}$ erzeugbar, so ist sie es auch durch m collineare Grundgebilde $(s-1)^{ter}$ Stufe $M_{n-s}^{(1)}, M_{n-s}^{(2)}, \cdots, M_{n-s}^{(m)}$. Die s collinearen Gebilde $S_{n-m}^{(i)}$ und die m Gebilde $M_{n-s}^{(k)}$ (wo $i = 1, 2, \cdots, s$; $k = 1, 2, \cdots, m$ ist) bilden zwei conjugirte lineare Systeme respective der $(s-1)^{ten}$ und $(m-1)^{ten}$ Stufe. s beliebige collineare Gebilde des 1^{ten} oder m des 2^{ten} erzeugen ebenfalls die Fläche F, insofern sie nicht zu einem linearen Systeme niedriger Stufe gehören. Wenn die Räume $S_{n-m}^{(i)}$ oder $M_{n-s}^{(k)}$ in der Fläche F liegen, so werden auch alle S_{n-m} oder M_{n-s} der beiden linearen Systeme in der Fläche enthalten sein.

Man hat auch selbstverständlich den Satz:

Wenn irgend s oder m entsprechende Räume der s Gebilde $S_{n-m}^{(i)}$ oder der m Gebilde $M_{n-s}^{(k)}$ in einem Raume R_q sich schneiden, der entweder in der Fläche liegt, oder ein Secantenraum R_q) derselben ist;*

---

*) Es sei eine Fläche F_m^q des R_n gegeben $(m < n - 1)$; ein beliebiger Raum R_s schneidet im Allgemeinen die F_m^q in einer $(m + s - n)$-dimensionalen Fläche q^{ter} Ordnung. Schneidet aber R_s die F_m^q in einer $(m + s - n + p)$-dimensionalen Fläche q^{ter} Ordnung, so nenne ich R_s *einen Secantenraum der* F_m^q.

so kann man die Räume R_q der Fläche auf die Punkte eines Raumes R_{m-1} oder R_{s-1} eindeutig abbilden.

Greift man aus der Matrix (2) eine Determinante mit m oder s Zeilen heraus, so stellt sie, gleich Null gesetzt, eine $(n-1)$-dimensionale Fläche vor, die offenbar die Fläche (2) enthält. Also:

Die Fläche F liegt in allen denjenigen $(n-1)$-dimensionalen Flächen m^{ter} oder s^{ter} Ordnung, die durch m collineare Gebilde S_{n-m} oder durch s collineare Gebilde M_{n-s} der beiden linearen Systeme (1) *und* (1') *entstehen.*

47. Unter den Flächen, welche durch das Verschwinden einer Matrix dargestellt werden, sind in erster Linie diejenigen bemerkenswerth, bei denen sich jene Matrix (2) auf eine einzelne Determinante reducirt. Für sie insbesondere hat man folgende Eigenschaften:

Alle Flächen F^m_{n-1} in R_n, die durch m collineare Gebilde $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe erzeugt werden, besitzen 2 Erzeugungssysteme $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe, welchen zwei Systeme von Flächen niedrigerer Dimension, als F^m_{n-1}, entsprechen, die ganz in F^m_{n-1} liegen und unter einander gleichberechtigt sind.

Zwei Flächen M, M' derselben Ordnung und Dimension, die nicht zu demselben System gehören, liegen in einer bestimmten Fläche N, die dieselbe Ordnung und Dimension für jedes Paar von Flächen M, M' hat.

Wenn $m \leqq n+1$ ist, so sind die Axen der m collinearen Gebilde Räume S_{n-m}, die in der Fläche selbst liegen. Die Räume S_{n-m} der F^m_{n-1} können eindeutig auf die Punkte eines Raumes R_{m-1} bezogen werden.)*

§ 2.

Einige Specialfälle.

48. Ich will in diesem Paragraphen einige der wichtigsten Specialfälle betrachten, die ich im Folgenden zu gebrauchen habe.

1) Zwei projectivische Büschel $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$ in R_n erzeugen einen $(n-1)$-dimensionalen S_{n-4}-Kegel 2^{ter} Ordnung, drei solche projectivische Bündel erzeugen dagegen einen $(n-2)$-dimensionalen Kegel 3^{ter} Ordnung, und allgemein:

---

*) Wenn $p_1^{(1)}, \cdots, p_1^{(s)}; \cdots; p^{(1)}_m, \cdots, p^{(s)}_m$ statt lineare $(n-1)$-dimensionale Räume $(n-1)$-dimensionale Flächen respective der Ordnung $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(m)}$ bedeuten, so gelten, wie man sieht, einige analoge Sätze.

m projectivische Büschel $S_{n-2}^{(1)}, S_{n-2}^{(2)}, \cdots, S_{n-2}^{(m)}$ *in* R_n *erzeugen eine* $(n-m+1)$*-dimensionale Fläche* m^{ter} *Ordnung, die auch ein Kegel sein kann, wenn nämlich* $S_{n-2}^{(1)}, \cdots, S_{n-2}^{(m)}$ *in einem Raume* R_s *sich schneiden.*

2) Zwei, drei, vier collineare Gebilde 2^{ter} Stufe in der Ebene erzeugen, wie man weiss, respective 3 Punkte, eine C^3, und 6 Punkte, so dass zwei, drei, vier Bündel im Raume R_3 respective eine C^3, F_2^3 und eine allgemeine C^6 vom Geschlechte $p = 3$ erzeugen.*)

Dementsprechend finden wir folgende Sätze:

n, $n+1$, $n+2$ *collineare Gebilde* n^{ter} *Stufe in* R_n *erzeugen respective eine Fläche* $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, *eine Fläche* F_{n-1}^{n+1}, *und eine Fläche* $F_{n-2}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, und daher:

$n-1$, n, $n+1$ *collineare Gebilde* $(n-1)^{ter}$ *Stufe* $S_0^{(i)}$ *erzeugen respective eine Fläche* $F_{n-2}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, *eine Fläche* F_{n-1}^{n}, *eine Fläche* $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Um die ersten Sätze zu beweisen, nimmt man sie für den Raum R_{n-1} als richtig an; dann betrachten wir n collineare Gebilde n^{ter} Stufe $\Sigma_n^{(1)}, \Sigma_n^{(2)}, \cdots, \Sigma_n^{(n)}$ des R_n. Es seien $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, \cdots, S_0^{(n)}$ n entsprechende Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe derselben; sie erzeugen eine F_{n-1}^{n}. Bewegt sich nun $S_0^{(1)}$ in einer Geraden $g_1^{(1)}$, so werden sich auch die entsprechenden Punkte $S_0^{(2)}, \cdots, S_0^{(n)}$ in Geraden $g_1^{(2)}, \cdots, g_1^{(n)}$ bewegen. Die bezüglichen Flächen F_{n-1}^{n} bilden daher ein Büschel; sie schneiden sich aber in der Fläche $F_{n-2}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, die durch die n collinearen Gebilde $(n-2)^{ter}$ Stufe $g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \cdots, g_1^{(n)}$ nach den obigen Sätzen erzeugt wird. Daher schneiden sich die F_{n-1}^{n} ausserdem noch in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche von der Ordnung $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, die das Erzeugniss der n collinearen Gebilde $\Sigma_n^{(1)}, \Sigma_n^{(2)}, \cdots, \Sigma_n^{(n)}$ ist.

In der vorigen Nummer haben wir gesehen, dass $n+1$ solche

---

*) Die Haupteigenschaften der C^6 lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen ableiten. Da sie vom Geschlechte 3 ist, so gehen durch jeden ihrer Punkte 3 dreifache Secanten derselben.

Diese C^6 und verschiedene Fälle, bei welchen sie zerfällt, sind gleichzeitig von **Cremona** (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Mai 1871 und Math. Annalen Bd. IV, „Ueber die Abbildung algebraischer Flächen“) und von **Nöther**, „Eindeutige Raumtransformationen“, Math. Annalen Bd. III, p. 345 untersucht worden. Man findet sie auch in der citirten Abhandlung von **Schur**.

Gebilde eine F_{n-1}^{n+1} erzeugen; und wenn man $n+2$ solche betrachtet, so findet man in der That, dass sie eine $F_{n-2}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ erzeugen.

Da die Sätze für $n-1=3$ richtig sind, so sind sie es auch für ein beliebiges n.

§ 3.

Rationalcurven.

49. Ich habe im vorigen Abschnitte bewiesen, dass die C^n in R_n eine Normalcurve ist, aus welcher man durch geeignetes Projiciren oder Schneiden alle Arten von Rationalcurven in niedrigeren Räumen erhalten kann; es ist desshalb äusserst wichtig, die Eigenschaften der C^n zu studiren.

Nach dem Vorhergehenden lässt sich die C^n durch n Büschel $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$, $\cdots$, $S^{(n)}_{n-2}$ bestimmen, z. B.

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda^{(1)}p_1^{(1)}+\lambda^{(2)}p_1^{(2)}=0, \\ \vdots\;\;\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^{(1)}p_n^{(1)}+\lambda^{(2)}p_n^{(2)}=0, \end{array}\right.$$

d. h. sie ist durch das Verschwinden einer Matrix der folgenden Art gegeben:

$$(2)\qquad \left|\begin{matrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} \\ \vdots & \cdots \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} \end{matrix}\right| = 0.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die C^n auch durch zwei collineare Gebilde $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$ $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe erzeugbar ist, nämlich:

$$(1')\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu^{(1)}p_1^{(1)}+\cdots+\mu^{(n)}p_n^{(1)}=0, \\ \mu^{(1)}p_1^{(2)}+\cdots+\mu^{(n)}p_n^{(2)}=0. \end{array}\right.$$

Nun sehen wir, dass die Axen $S^{(1)}_{n-2}$ der Gebilde des Systems (1) *mit der C^n $n-1$ Punkte gemein haben; daher nennen wir sie Secantenräume der C^n.*

In der That, wenn wir z. B. $S^{(1)}_{n-2}$ mit den übrigen entsprechenden Gebilden $S^{(2)}_{n-2}$, $\cdots$, $S^{(n)}_{n-2}$ schneiden, so erhalten wir in $S^{(1)}_{n-2}$ $n-1$ Büschel $S^{(2)}_{n-4}$, $\cdots$, $S^{(n)}_{n-4}$, die nach dem Vorhergehenden $n-1$ Punkte bestimmen, welche natürlich in der C^n liegen. Man hat ferner:

Eine Gerade R_1, eine Ebene R_2 u. s. w., ein Raum R_m können mit der C^n höchstens respective 2, 3, u. s. w. $m+1$ Punkte gemein haben. Hätte z. B. ein Raum R_m $m+2$ Punkte mit der C^n gemein, so könnten wir durch ihn und durch andere $n-m-1$ Punkte einen

R_{n-1} legen, der die Curve in $n+1$ Punkten schneiden würde; was nicht möglich ist, ohne dass die C^n in R_{n-1} selbst liegt.

Wir haben also $n-2$ Arten von Secantenräumen zu betrachten, nämlich Secantengeraden, Secantenebenen u. s. w., Secantenräume S_{n-2}.

Wir haben auch:

Ist die Curve durch zwei Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$ erzeugt, und schneiden sich 2 entsprechende Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ in einem Raume S_{m-1}, so ist dieser Raum ein Secantenraum der Curve.

In der That, die projectivischen Gebilde in den Räumen $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$, welche zu den Gebilden $(n-1)^{ter}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$ gehören, schneiden S_{m-1} in zwei collinearen Gebilden $(m-1)^{ter}$ Stufe, die m Punkte gemein haben, welche wieder der Curve C^n angehören.

50. Nehmen wir jetzt einen Punkt A_0 in R_n und legen wir durch A_0 und $S_0^{(1)}$ eine Gerade $S_1^{(1)}$. Dieser Geraden entspricht eine Gerade $S_1^{(2)}$ durch $S_0^{(2)}$, die im Allgemeinen nicht durch A_0 geht; durch $S_1^{(2)}$ und A_0 geht aber eine Ebene $S_2^{(2)}$, welcher eine Ebene $S_2^{(1)}$ durch $S_1^{(1)}$ entspricht. Die zwei collinearen Gebilde $(n-3)^{ter}$ Stufe $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$ erzeugen einen 3-dimensionalen A_0-Kegel $(n-2)^{ter}$ Ordnung. Ist A_0 ein Punkt der Curve, so schneiden sich in ihm die beiden Strahlen $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ und daher sind die Secantenräume durch ihn Secantenräume eines 2-dimensionalen A_0-Kegels $(n-1)^{ter}$ Ordnung. Also:

Alle Secantenräume S_{n-2} der C^n, die durch einen Punkt A_0 gehen, sind die Secantenräume eines 3-dimensionalen A_0-Kegels $(n-2)^{ter}$ Ordnung.

Alle Secantenräume S_{n-2}, die durch einen Punkt A_0 der C^n gehen, sind die Secantenräume eines 2-dimensionalen A_0-Kegels $(n-1)^{ter}$ Ordnung, nämlich des von A_0 ausgehenden die Curve projicirenden Kegels.

Betrachten wir jetzt eine Gerade A_1 und verbinden wir sie mit $S_0^{(1)}$ durch eine Ebene $S_2^{(1)}$, so entspricht derselben eine Ebene $S_2^{(2)}$ durch $S_0^{(2)}$, die A_1 im Allgemeinen weder trifft noch enthält.

Es geht aber durch $S_2^{(2)}$ und A_1 ein Raum $S_4^{(2)}$, welchem ein Raum $S_4^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht, und daher sind alle Secantenräume S_{n-2}, die durch A_1 gehen, Secantenräume eines 5-dimensionalen Kegels $(n-4)^{ter}$ Ordnung.

Wird dagegen A_1 von $S_2^{(2)}$ in einem Punkte geschnitten, so geht durch A_1 von $S_2^{(2)}$ ein Raum $S_3^{(3)}$, welchem ein Raum $S_3^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht; in diesem Falle sind daher alle Secantenräume S_{n-2} durch A_1 Secantenräume eines 4-dimensionalen A_1-Kegels $(n-3)^{ter}$ Ordnung. Endlich wenn die Ebene $S_2^{(2)}$ durch A_1 geht, d. h. wenn die Gerade A_1 eine Secantengerade der C^n ist, so sind alle Secantenräume S_{n-2} durch A_1 die Secantenräume eines 3-dimensionalen A_1-Kegels $(n-2)^{ter}$ Ordnung, nämlich des von A_1 ausgehenden, die

Curve projicirenden Kegels. Man sieht, wie man fortzufahren hat, um folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Durch einen beliebigen Raum A_m *geht kein Secantenraum* S_{n-2} *der* C^n, *wenn* $2m + 3 \geq n + 1$ *ist. Dem Raume* $S_0^{(1)} A_m$ *entspricht in dem collinearen Gebilde* $S_0^{(2)}$ *ein Raum* $S^{(2)}_{m+1}$. *Liegen* $S^{(2)}_{m+1}$ *und* A_m *in einem Raume* R_s, *wo* $s \geq m + 1 < n$ *ist, so sind alle durch* A_m *hindurchgehenden Secantenräume* S_{n-2} *Secantenräume eines* $(s + 1)$*-dimensionalen* A_m*-Kegels* $(n - s)$*ter Ordnung.*

Ist speciell $m = n - 3$, so geht durch A_{n-3} entweder kein Secantenraum S_{n-2} oder einer. Ist $m = n - 4$, so geht durch A_{n-4} entweder kein Secantenraum S_{n-2}, oder einer, oder ∞^1, die einen $(n - 1)$-dimensionalen A_{n-4}-Kegel 2ter Ordnung bilden. Wir erkennen auch, dass keine anderen speciellen Lagen von Räumen A_{n-3}, A_{n-4} gegen die Secantenräume S_{n-2} der C^n vorkommen können.

51. Wir haben im vorigen Abschnitte (Nr. 39.) gesehen, dass von den verschiedenen Lagen, die ein Raum A_{n-m-1} gegen die Curve C^n annehmen kann, die verschiedenen Arten von Rationalcurven $n$ter oder niedrigerer Ordnung im Raume R_m abhängen. *Je nach der Lage des projicirenden Raumes* A_{n-m-1} *gegen die Secantenräume* S_{n-2} *der* C^n *bekommen wir in* R_m *verschiedene Hauptarten von rationalen Curven* C^n, *die wir Species nennen wollen.*

Aus der vorigen Nummer wissen wir, dass ein Raum A_{n-3} zwei verschiedene Lagen in Bezug auf die Secantenräume S_{n-2} haben kann. Entweder nämlich geht durch ihn ein Secantenraum S_{n-2} oder keiner; *daher sind die Rationalcurven* n*ter Ordnung in der Ebene von 2 Species, entweder haben sie einen* $(n - 1)$*-fachen Punkt oder nicht,* wobei natürlich ausgeschlossen ist, dass die Curven zerfallen.

Die einzigen Ausnahmefälle sind der Kegelschnitt, der keinen Doppelpunkt haben kann, ohne zu zerfallen, und die rationale Curve 3ter Ordnung, die immer einen Doppelpunkt oder eine Spitze besitzt.

Wir sehen ferner, dass ein Raum A_{n-4} 3 verschiedene Lagen gegen die Secantenräume S_{n-2} der C^n haben kann. Entweder geht durch ihn kein Secantenraum S_{n-2}, oder einer, oder einfach unendlich viele, die einen $(n - 1)$-dimensionalen A_{n-4}-Kegel 2ter Ordnung bilden. *Daher sind die Rationalcurven* n*ter Ordnung in* R_3 *von 3 Species: entweder haben sie keine* $(n - 1)$*-fache Secantengerade, oder eine, oder einfach unendlich viele, die dann einem Hyperboloid angehören, das als Schnitt des* R_3 *mit dem* A_{n-4}*-Kegel 2ter Ordnung erhalten wird.*

Die einzigen Ausnahmefälle davon sind die rationalen Curven 3ter und 4ter Ordnung, die nur von einer Species sind, und die von der 5ten Ordnung, welche nur in 2 Species vorkommen. Die Curven fünfter Ordnung der einen Species haben nur eine vierfache Secante, die der zweiten haben deren einfach unendlich viele, die einem Hyperboloid angehören, wie es bekannt ist.

Desgleichen findet man nach den Sätzen der vorigen Nummer, *dass die Rationalcurven n^{ter} Ordnung des R_m von m Species sind. Bei der ersten hat die Curve keinen $(n-1)$-fachen Secantenraum R_{m-2}, bei der zweiten nur einen, bei der dritten einfach unendlich viele, die einen $(m-1)$-dimensionalen R_{m-n}-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden etc., und bei der s^{ten}, wo $s \leq m$ ist, einfach unendlich viele, welche die Secanträume S_{n-2} eines $(n-s+2)$-dimensionalen R_{m-2s+2}-Kegels $(s-1)^{ter}$ Ordnung sind, der eine gewöhnliche Fläche (ohne Kegelspitze) sein wird, sobald $m-2s+2$ eine negative Zahl ist.* Wir finden auch:

Bei den Rationalcurven n^{ter} Ordnung in R_m können auch $(n-2)$-fache Secantenräume R_{m-2}, $(n-3)$-fache Secantenräume R_{m-3} u. s. w. $(n-m+2)$-fache Secantengeraden auftreten, da nämlich der projicirende Raum A_{n-m-1} in einem Secantenraum S_{n-3}, S_{n-4} etc. S_{n-m+2} der C^n liegen kann. Daher hat man bei $m > 3$ noch *Unterspecies*, die wir nicht weiter studiren.

52. Für die Entstehung der Singularitäten der Rationalcurven in niedrigeren Räumen als R_n will ich folgende Beispiele für die rationalen Curven C^4 und C^5 in R_3 und R_2 geben. Analoge Betrachtungen werden auch für solche Curven gelten, die ein höheres Geschlecht besitzen.

1. Beispiel. *Die Rationalcurven C^4.*

Es geht aus der 50. Nummer hervor, dass alle Secantenebenen der C^4 in R_4 (welche die C^4 in 3 Punkten schneiden) eine 3-fach unendliche Mannigfaltigkeit bilden, und dass alle Secantenebenen durch einen beliebigen Punkt A_0 von R_4 ein einfach unendliches System von Ebenen eines 3-dimensionalen A_0-Kegels 2^{ter} Ordnung $K_3{}^2$ bilden. Daher wird die C^4 von einem beliebigen Punkte A_0 des R_4 in einen Raum S_3 nach einer Curve C'^4 projicirt, welche mit den Geraden eines Systems von Erzeugenden eines Hyperboloids (Schnitt von S_3 mit dem Kegel $K_3{}^2$) 3 Punkte gemein hat. Die C'^4 ist also eine allgemeine Curve 4^{ter} Ordnung, wie sie gewöhnlich von der 2^{ten} Species genannt wird, die aber in unserem Sinne der 1^{ten} und einzigen Species angehört, die für die rationalen C^4 in R_3 existirt.

Der Kegel $K_3{}^2$ hat auch ein zweites System von Ebenen, und da zwei Ebenen von verschiedenen Systemen in einem R_3 liegen, so ist klar, dass die Ebenen des zweiten Systems von $K_3{}^2$ die Curve C^4 des R_4 nur in einem Punkte schneiden.

Liegt nun der Punkt A_0 in einer Secantengeraden oder in einer Tangente von C^4, *so erhält die C'^4 einen Doppelpunkt oder eine Spitze.*

Liegt A_0 in einer Schmiegungsebene der C^4, *so erhält die C'^4 eine Inflexionstangente.* Zwei nicht aufeinander folgende Schmiegungsebenen der C^4 schneiden sich in einem Punkte A_0; projiciren wir die C^4 von diesem Punkte aus, *so erhält die* C'^4 *zwei Inflexionstangenten.*

Projicirt man ferner die C^4 von einer beliebigen Geraden A_1 in eine Ebene S_2, so erhält man in S_2 eine C''^4 mit drei Doppelpunkten. *Eine beliebige Gerade* A_1 *von* R_4 *schneidet also drei Secantengeraden der* C^4.

Nehmen wir umgekehrt drei Secantengeraden der C^4, so giebt es immer eine Transversale A_1, die sie alle drei schneidet (Nr. 26.); wenn eine, zwei oder alle drei Secanten Tangenten sind, *so erhält die* C''^4 *eine, zwei oder drei Spitzen.*

Liegt A_1 in einer Secantenebene der C^4, *so erhält die* C''^4 *einen dreifachen Punkt mit getrennten Tangenten.*

Berührt die Secantenebene die Curve, *so erhält die* C''^4 *im dreifachen Punkte eine Spitze.*

Liegt endlich A_1 in einer Schmiegungsebene der C^4, *so erhält die* C''^4 *einen dreifachen Punkt mit lauter zusammenfallenden Tangenten.*

Diese Arten der rationalen Curven vierter Ordnung in R_2 und R_3 sind alle bekannt; wir sehen auf unserem Wege, wie leicht und anschaulich sie aus einer einzigen Quelle erhalten werden können.

Zweites Beispiel. Die Rationalcurven C^5.

Wir wollen jetzt nur die verschiedenen Arten der rationalen C^5 in R_3 hervorheben. Man muss zu diesem Zwecke die C^5 des R_5 von einer Geraden A_1 in R_3 projiciren. *Im Allgemeinen geht durch eine Gerade* A_1 *nur ein Secantenraum* S_3 *der* C^5, *daher bekommt die Projectionscurve* C'^5 *in* R_3 *im Allgemeinen nur eine vierfache Secante.* Es kann aber auch geschehen, dass durch A_1 unendlich viele Secantenräume S_3 gehen, die dann einen 4-dimensionalen Kegel zweiter Ordnung bilden. *Daher erhält dann die* C'^5 *unendlich viele vierfache Secantengeraden, die eine Regelschaar in* R_3 *bilden.*

Liegt A_1 in einem Schmiegungsraume R_3 der C^5, *so erhält die* C'^5 *eine dreifache berührende Tangente. Die* C'^5 *zweiter Species kann zwei solche Tangenten haben,* weil zwei nicht folgende Schmiegungsräume R_3 der C^5 in einer Geraden A_1 sich schneiden. Schneidet A_1 eine oder zwei Secantengeraden der C^5, *so erhält die* C'^5 *einen oder zwei Doppelpunkte;* wenn eine dieser Geraden oder beide Tangenten sind, *so erhält die* C'^5 *eine oder zwei Spitzen.*

Liegt A_1 in einer Secantenebene der C^5, *so erhält die* C'^5 *einen dreifachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten.*

In analoger Weise kann man natürlich die verschiedenen Arten der rationalen Curven 6ter, 7ter Ordnung u. s. w. in R_2 und R_3 etc. studiren.

Ich bemerke auch, dass, wenn in einer Curve oder in einer Fläche F_2, F_3, F_4, ..., F_{m-1} *des* R_n *Configurationen von Punkten, Geraden,*

$R_2, \ldots, R_{m-1}$ existiren, die gewisse projectivische Beziehungen zu jener Curve oder Fläche haben, dieselben durch die Projection in einen niederen Raum R_m nicht zerstört werden können.

§ 4.

Die in einer Ebene eindeutig abbildbaren 2-dimensionalen Linienflächen.*)

53. Die in eine Ebene eindeutig abbildbaren Linienflächen bilden die einfachste Classe von den eindeutig abbildbaren 2-dimensionalen Flächen, von denen wir in der Anmerkung sprechen. Sie sind alle die Projection einer „normalen“ Linienfläche, welche selbst eine Projection der in der Anmerkung genannten „Normalfläche“ ist.

Die F_2^{n-1} in R_n ist die 2-dimensionale Fläche niedrigster Ordnung des Raumes R_n (Nr. 4.); sie wird von irgend einem Raume R_{n-1} in einer Normalcurve C^{n-1} geschnitten.

Wir wollen insbesondere diejenige F^2_{n-1} in R_n betrachten, die

---

*) *Alle 2-dimensionalen Flächen des Raumes R_n, deren Schnittcurven mit den Räumen R_{m-1} von R_m durch Curven n^{ter} Ordnung in einer Ebene eindeutig abbildbar sind, sind immer die Projectionen einer einzigen Normalfläche der Ordnung n^2 des Raumes $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$, deren Punkte folgendermassen sich darstellen lassen:*

$$(1)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : \cdots : x_{\frac{n(n+3)}{2}+1} = \xi_1{}^n : \xi_2{}^n : \xi_3{}^n : \xi_1{}^{n-1}\xi_2 : \xi_1{}^{n-1}\xi_3 : \cdots : \xi_2\xi_3{}^{n-1}.$$

Die Glieder rechter Hand sind die verschiedenen Potenzen der drei homogenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Die Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3, als die Coordinaten eines Punktes der Ebene angesehen, liefern die eindeutige Abbildung der Fläche (1) in der Ebene. Man sieht, *dass die Schnittcurven der Fläche* (1) *mit den Räumen $R_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ des $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$ durch Curven n^{ter} Ordnung sich abbilden, die keine Punkte (Fundamentalpunkte) gemein haben.*

Projicirt man die Fläche von einem ihrer Punkte in einen Raum $R_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$, so erhält man eine Fläche der Ordnung $n^2 - 1$, die sich evident durch Curven n^{ter} Ordnung abbildet, welche einen Fundamentalpunkt gemein haben. Und allgemein, *wenn man die Normalfläche durch einen Raum $R_{\frac{n(n-1)}{2}-1}$, der mit ihr $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte gemein hat, in einen Raum R_n projicirt* (da $R_{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ und R_n duale Räume in $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$ sind), *so erhält man in R_n eine Fläche der Ordnung $\frac{n(n+1)}{2}$, deren Schnittcurven mit den Räumen R_{n-1} des R_n durch Curven n^{ter} Ordnung sich abbilden, welche $\frac{n(n-1)}{2}$ Fundamentalpunkte gemein haben.*

Eine solche Fläche des R_n wird durch n collineare Gebilde zweiter Stufe durch $n - 1$ projectivische Büschel oder, was dasselbe ist, durch zwei collineare Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ erzeugt wird. Es seien

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \cdots + \lambda^{(n-2)} p_1^{(n-1)} = 0, \\ \lambda^{(1)} p_2^{(1)} + \cdots + \lambda^{(n-2)} p_2^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

die zwei collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe.

Die Fläche ist dann:

$$\text{(2)}\qquad \begin{vmatrix} p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{n-1} \\ p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

sie wird also zugleich von den $n - 1$ Büscheln

$S_{n-3}^{(1)}, \cdots, S_{n-3}^{(n)}$ *oder durch drei collineare Gebilde* $(n-1)^{\textit{ter}}$ *Stufe* $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, S_0^{(3)}$ erzeugt. Wir schreiben die conjugirten Systeme der Fläche folgendermassen:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \xi_1 A^{(1)} + \xi_2 B^{(1)} + \xi_3 C^{(1)} = 0, \\ \xi_1 A^{(2)} + \xi_2 B^{(2)} + \xi_3 C^{(2)} = 0, \\ \quad\vdots \\ \xi_1 A^{(n)} + \xi_2 B^{(n)} + \xi_3 C^{(n)} = 0, \end{cases}$$

$$\text{(I')}\qquad \begin{cases} \lambda^{(1)} A^{(1)} + \cdots + \lambda^{(n)} A^{(n)} = 0, \\ \lambda^{(1)} B^{(1)} + \cdots + \lambda^{(n)} B^{(n)} = 0, \\ \lambda^{(1)} C^{(1)} + \cdots + \lambda^{(n)} C^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten der Punkte dieser Fläche aus dem System (I) lassen sich folgendermassen darstellen:

$$\text{(2)}\qquad x_1 : \cdots\cdots : x_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1 a_2^{(1)} + \xi_2 b_2^{(1)} + \xi_3 c_2^{(1)}, & \xi_1 a_3^{(1)} + \xi_2 b_3^{(1)} + \xi_3 c_3^{(1)}, \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(1)} + \xi_2 b_{n+1}^{(1)} + \xi_3 c_{n+1}^{(1)} \\ \xi_1 a_2^{(2)} + \xi_2 b_2^{(2)} + \xi_3 c_2^{(2)}, & \xi_1 a_3^{(2)} + \xi_2 b_3^{(2)} + \xi_3 c_3^{(1)}, \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(2)} + \xi_2 b_{n+1}^{(2)} + \xi_3 c_{n+1}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1 a_2^{(n)} + \xi_2 b_2^{(n)} + \xi_3 c_2^{(n)}, & \xi_1 a_3^{(n)} + \xi_2 b_3^{(n)} + \xi_3 c_3^{(n)}, \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(n)} + \xi_2 b_{n+1}^{(n)} + \xi_3 c_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \text{etc.}$$

oder

$$x_1 : \cdots : x_{n+1} = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \cdots : f_{n+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

wo $f_1, \ldots, f_{n+1}$ homogene rationale Functionen n^{ten} Grades in ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind. Betrachtet man wie vorher ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Coordinaten eines Punktes der Ebene, so findet man in der That, dass die Schnittcurven der Fläche (2) mit den Räumen R_{n-1} des R_n durch C^n sich abbilden, welche $\frac{n(n-1)}{2}$ Fundamentalpunkte gemein haben.

Die Normalfläche (I) *spielt für die eindeutig in eine Ebene abbildbaren Flächen die analoge Rolle wie die rationale Normalcurve* C^n *für die rationalen Curven.*

Ich wünsche das Studium dieser Flächen zu vervollständigen und werde bei einer andern Gelegenheit meine betreffenden Resultate publiciren.

$$
\left\{\begin{array}{l}
\mu^{(1)}p_1^{(1)}+\mu^{(2)}p_2^{(1)}=0,\\
\vdots\\
\mu^{(1)}p_1^{(n-1)}+\mu^{(2)}p_2^{(n-1)}=0
\end{array}\right. \tag{1'}
$$

erzeugt. *Die Fläche hat einfach unendlich viele erzeugende Geraden,* wie aus (1′) ersichtlich ist, *daher bezeichnen wir sie mit dem Symbol* $R_1 - F_2^{n-1}$.

Betrachten wir die Erzeugung der Fläche durch die zwei Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$. *Die Geraden* $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ *sind zwei Erzeugenden der* $R_1 - F_2^{n-1}$, *und daher auch nach Nr.* 46. *alle Axen der Gebilde des Systems* (1).

Zwei entsprechende Räume $S_{n-1}^{(1)}$, $S_{n-1}^{(2)}$ durch $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ schneiden sich in einem Raume S_{n-2}, der die F_1^{n-1} in einer Curve C^{n-2} trifft; denn die collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ in $S_{n-1}^{(1)}$, $S_{n-1}^{(2)}$ schneiden S_{n-2} in zwei colinearen Gebilden $(n-3)^{\text{ter}}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, die eine C^{n-2} der F_2^{n-1} erzeugen. *Wir nennen* S_{n-2} *einen Secantenraum der Fläche* $R_1 - F_2^{n-1}$. *Diese Secantenräume sind an Zahl* ∞^{n-2}, *und schneiden die* F_2^{n-1} *in rationalen Normalcurven* C^{n-2}.

Schneiden sich zwei entsprechende Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ durch $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ in einem Raume S_a, $a < m - 1 < n - 2$, so sieht man in analoger Weise wie vorher, dass S_a $a + 1$ Punkte mit der F_2^{n-1} gemein hat. *Wir nennen* S_a *einen Secantenraum erster Art.* Derselbe hat mit der Curve $a + 1$ Punkte gemein, während im Allgemeinen ein Raum R_a die $R_1 - F_2^{n-1}$ nirgendwo schneidet.

Schneiden sich die beiden entsprechenden Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ in einem Raume S_{m-1}, so beweist man in derselben Weise, *dass dieser Raum die* $R_1 - F_2^{n-1}$ *in einer Normalcurve* C^{m-1} *schneidet. Wir nennen einen solchen Raum einen Secantenraum* S_{m-1} *zweiter Art.*

Es ist nicht nöthig eine solche Unterscheidung für die Secantenräume S_{n-2} zu machen, da jeder beliebige S_{n-2} die F_2^{n-1} in $n - 1$ Punkten schneidet.

Aus der Construction der Fläche hat man schliesslich noch folgenden Satz:

Wenn man $n - 1$ *beliebige Secantenräume* S_{n-2} *mit den Punkten der* $R_1 - F_2^{n-1}$ *verbindet, so erhält man* $n - 1$ *projectivische Büschel, welche die Fläche erzeugen.*

54. Betrachten wir jetzt einen Punkt A_0 des R_n, und verbinden wir ihn mit $S_1^{(1)}$ durch eine Ebene $S_2^{(1)}$; so entspricht derselben eine Ebene $S_2^{(2)}$ durch $S_1^{(2)}$, die im Allgemeinen nicht durch A_0 geht. Es geht aber durch $S_2^{(2)}$ und durch A_0 ein Raum $S_3^{(2)}$, welchem ein Raum $S_3^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht. Die zwei collinearen Gebilde $(n-4)^{\text{ter}}$ Stufe $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$ erzeugen also ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2} der $R_1 - F_2^{n-1}$, welche Secantenräume eines 4-dimensionalen A_0-Kegels $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

Geht die Ebene $S_2^{(2)}$ durch A_0, so ist A_0 ein Punkt der F_2^{n-1} selbst, denn ein R_{n-1} durch A_0 schneidet die $R_1 - F_2^{n-1}$ in einer durch A_0 hindurchlaufenden C^{n-1}. Also:

Die $R_1 - F_2^{n-1}$ ist der Ort aller derjenigen Punkte, in denen sich zwei entsprechende Ebenen von zwei collinearen Gebilden des Systems (1) *schneiden.*

Durch einen beliebigen Punkt A_0 des R_n gehen ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2}, welche Secantenräume eines 4-dimensionalen A_0-Kegels $(n - 3)^{ter}$ Ordnung sind.

Liegt A_0 in der Fläche, so gehen durch ihn ∞^{n-3} Secantenräume S_{n-2}, welche Secantenräume eines 3-dimensionalen Kegels sind, nämlich des von A_0 ausgehenden projicirenden Kegels der $R_1 - F_2^{n-1}$.

Betrachten wir jetzt eine Gerade A_1, so finden wir:

Alle durch eine beliebige Gerade hindurchgehenden Secantenräume S_{n-2} bilden eine ∞^{n-6}-fache Mannigfaltigkeit, welche die Secantenräume eines 6-dimensionalen A_1-Kegels $(n - 5)^{ter}$ Ordnung sind. Die Gerade A_1 kann auch so liegen, dass durch sie ∞^{n-5} Secantenräume S_{n-2} hindurchgehen, welche die Secantenräume eines 5-dimensionalen A_1-Kegels $(n - 4)^{ter}$ Ordnung bilden.

Ist endlich die Gerade A_1 eine Secantengerade der $R_1 - F_2^{n-1}$, d. h. trifft sie die $R_1 - F_2^{n-1}$ in zwei Punkten, so gehen durch sie ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2}, welche die Secantenräume eines 4-dimensionalen A_1-Kegels $(n - 3)^{ter}$ Ordnung sind, nämlich des von A_1 ausgehenden projicirenden Kegels der $R_1 - F_2^{n-1}$.

Aus dem letzten Satze geht auch hervor:

Eine Gerade A_1 kann mit der R_1-Fläche höchstens zwei Punkte gemein haben, ohne ganz in der Fläche enthalten zu sein.

Ist allgemein ein Raum A_m gegeben, so findet man:

Verbindet man A_m mit $S_1^{(1)}$, so erhält man einen Raum $S^{(1)}_{m+2}$, welchem ein Raum $S^{(2)}_{m+2}$ durch $S_1^{(2)}$ entspricht. Liegen A_m und $S^{(1)}_{m+2}$ in einem Raume R_s, wo $s \leqq n - 1 > m + 2$ ist, so sind alle Secantenräume S_{n-2} der $R_1 - F_2^{n-1}$ durch A_m die Secantenräume eines $(s + 1)$-dimensionalen A_m-Kegels $(n - s)^{ter}$ Ordnung.

Im speciellen Falle geht durch einen A_{n-4} kein Secantenraum S_{n-2}, oder nur einer.

Man findet aus diesem Satze:

Ein Raum R_m ist entweder kein Secantenraum, oder ein Secantenraum erster oder zweiter Art der $R_1 - F_2^{n-1}$.

55. Wir können eine Parameterdarstellung der $R_1 - F_2^{n-1}$ leicht aufstellen. Zu dem Zwecke schneiden wir sie mit zwei Räumen R_{n-1}. Wir haben dann zwei Normalcurven C^{n-1}, deren Punkte durch rationale Functionen $(n - 1)^{ten}$ Grades eines Parameters λ sich darstellen lassen. Die Fläche hat einfach unendlich viele geradlinige Erzeugenden, die auf beiden Curven zwei projectivische Punktreihen ausschneiden. Ein Punkt der $R_1 - F_2^{n-1}$ kann daher in der Form:

$$(1) \qquad \sigma x_i = \varphi_i'(\lambda) + \mu\, \varphi_i''(\lambda)$$

geschrieben werden.*)

Umgekehrt kann jede R_1-Fläche, für welche die Formeln (1) *bestehen, durch* $n - 1$ *projectivische Büschel erzeugt werden.* Diese Fläche ist daher auch durch zwei collineare Gebilde $(n - 2)^{\text{ter}}$ Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ erzeugbar.

Die zwei Axen $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ können keine specielle Lage unter einander haben. *Denn treffen sie sich in einem Punkte R_0, so wird die $R_1 - F_2^{n-1}$ ein R_0-Kegel,* und diesen Fall haben wir hier nicht näher zu betrachten. Die speciellen Lagen aber, die zwei entsprechende Räume $R_2, R_3, \ldots, R_{n-2}$ der beiden Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ im einzelnen Falle haben mögen, kommen nothwendigerweise auch bei allen andern Fällen vor. Daher müssen alle eigentlichen $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n projectivisch gleichberechtigt sein.

Wir nennen die $R_1 - F_2^{n-1}$ daher die in eine Ebene eindeutig abbildbare Normal R_1-Fläche des R_n.

Wenn man jetzt in irgend einem Raume R_m eine Linienfläche $(m - 1)^{\text{ter}}$ oder niedriger Ordnung hat, so kann man die Coordinaten ihrer Punkte in der Form (1) darstellen; wir haben also:

Jede Normal-$R_1 - F_2^{m-1}$ des R_m $(m < n)$ kann durch Projection der Normalfläche $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n von einem R_{n-m-1} aus, der $n - m$ beliebige Punkte mit der $R_1 - F_2^{n-1}$ gemein hat, erhalten werden.

Jede beliebige in einer Ebene eindeutig abbildbare Linienfläche in $R_3, R_4, \ldots, R_{n-1}$ von niederer als der n^{ten} Ordnung ist immer die eindeutige Projection einer Normalfläche $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n. Und umgekehrt aus einer solchen Normalfläche kann man durch geeignete Projection jede Art von in einer Ebene eindeutig abbildbaren Flächen der $(n - 1)^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Ordnung erhalten.

Beispiele von der Wichtigkeit dieser Sätze geben wir im nächsten Paragraphen.

56. Wie bei den rationalen Curven (Nr. 51.) kann man bei unseren Flächen ebenfalls eine Unterscheidung in Species machen, je nach der

---

*) Siehe Clebsch, Mathem. Annalen Bd. I. Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$ (in R_3).

Die Abbildungsgleichungen sind also $\varrho x_i = \xi_3 \cdot \varphi_i(\xi_1 \xi_3) + \xi_2 \cdot \psi_i(\xi_1 \xi_3)$, wo $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\mu = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, und ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten eines Punktes der Ebene andeuten.

Die Schnitte der $R_1 - F_2^{n-1}$ mit den Räumen R_{n-1} des R_n bilden sich also als Curven n^{ter} Ordnung ab. Dieselben haben einen $(n - 1)$ *fachen Punkt bei* $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ *und einen einfachen Punkt bei* $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ *und daher ausserdem noch $n - 1$ einfache Fundamentalpunkte gemein.*

Lage des projicirenden Raumes gegen die Secantenräume S_{n-2} der Fläche $R_1 - F_2^{n-1}$; und in Unterspecies je nach der Lage des projicirenden Raumes gegen die anderen Secantenräume derselben. Es ist nicht schwer zu sehen, *dass die Linienflächen* ($p = 0$) *in* R_m ($m < n$) *von* $m - 1$ *Species sind.*

Im Raume R_3 *sind sie speciell von zwei Species, entweder haben sie, nach Nr.* 54., *keine* ($n - 2$)*-fache Gerade, oder nur eine.*

In analoger Weise kann man die auf einen Raum R_m eindeutig abbildbaren F_m studiren.

§ 5.

Die Flächen F'^3_2, F_2^6, F_3^4 des R_4, die durch collineare Grundgebilde erzeugt werden.*)

57. *2-dimensionale Flächen dritter Ordnung* F_2^3.

Wir betrachten zwei collineare Gebilde zweiter Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, d. h.

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_2^{(1)} + \lambda^{(3)} p_3^{(1)} = 0, \\ \lambda^{(1)} p_1^{(2)} + \lambda^{(2)} p_2^{(2)} + \lambda^{(3)} p_3^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Sie erzeugen eine F'^3_2, nämlich:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0,$$

die auch aus den drei folgenden projectivischen Büscheln $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_3^{(3)}$

---

*) Wenn man eine F_2^m in R_n von einem beliebigen Punkte A_0 in einen R_3 projicirt, so erhält man in R_3 eine 2-dimensionale Fläche $F_2'^m$ derselben Ordnung. Man kann die Charaktere der F_2^m durch diejenigen von $F_2'^m$ bestimmen, und umgekehrt kann man die Singularitäten der $F_2'^m$ durch die F_2^m studiren. Ich will nur einige Charaktere hervorheben.

Eine Gerade durch A_0, welche die Fläche F_2^m in zwei Punkten B_0, C_0 schneidet, liefert einen *biplanaren* Punkt $B_0' \equiv C_0'$ der $F_2'^m$. Die Tangentialebenen in B_0 und C_0 an die F_2^m werden in die beiden Tangentialebenen, welche in B_0' $F_2'^m$ berühren, projicirt.

Liegen die zwei in B_0 und C_0 construirbaren Tangentialebenen in einem Raume R_3 durch A_0, so erhält die $F_2'^m$ in B_0' einen *uniplanaren* Punkt.

Liegt A_0 in der Tangentialebene von B_0, *so erhält die* $F_2'^m$ *einen Doppelpunkt, bei welchem der osculirende Kegel zweiter Ordnung sich auf eine Gerade reducirt, nämlich auf die Schnittlinie der Tangentialebene in* B_0 *mit* R_3.

Ein conischer Doppelpunkt der $F_2'^m$ muss also durch einen conischen Doppelpunkt der F_2^m selbst hervorgerufen sein.

Ein Raum S_3, welcher durch die in B_0 berührende Tangentialebene hindurchgeht, schneidet die F_2^m in einer Curve mit einem Doppelpunkte in B_0, deren zwei Tangenten in der Tangentialebene liegen.

Aus einem parabolischen Punkte der $F_2'^m$ erhält man zwei unendlich nahe Tangentialebenen der F_2^m, die in einem R_3 liegen, der durch A_0 geht, d. h. die in einem Schmiegungsraume R_3 der F_2^m liegen.

$$(1')\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu^{(1)}p_1^{(1)} + \mu^{(2)}p_1^{(2)} = 0,\\ \mu^{(1)}p_2^{(1)} + \mu^{(2)}p_2^{(2)} = 0,\\ \mu^{(1)}p_3^{(1)} + \mu^{(2)}p_3^{(2)} = 0 \end{array}\right.$$

construirt werden kann.

Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, *dass die F_2^3 eine Linienfläche $R_1 - F_2^3$ ist, und dass sie ∞^2 Secantenebenen besitzt, die sie in einem Kegelschnitte schneiden, während jede andere Ebene die $R_1 - F_2^3$ in drei Punkten schneidet.*

Die entsprechenden Ebenen von zwei collinearen Gebilden des Systems (1) *schneiden sich je in einem Punkte, der der Fläche angehört.*

Betrachten wir jetzt drei Erzeugende der F_2^3. Dieselben können sich nicht wechselseitig schneiden; denn durch einen Punkt der F_2^3 geht nur eine Erzeugende derselben, wie aus der zweiten Erzeugung ersichtlich ist. Sie können auch nicht in einem R_3 liegen, weil eine Gerade, welche drei Erzeugende trifft, ganz in der Fläche enthalten ist, und daher das durch die drei Erzeugenden bestimmte Hyperboloid zur F_2^3 gehören würde, die F_2^3 also in eine Ebene und ein Hyperboloid zerfallen würde. Aber drei beliebige Erzeugende der F_2^3 haben eine Transversale gemein (Nr. 26.), die natürlich alle anderen Erzeugenden trifft, da sie in F_2^3 selbst liegt. Wir haben also folgenden Satz:

Alle Erzeugenden der F_2^3 haben eine und nur eine Transversale d_1 gemein, die wir als Directrixgerade d_1 bezeichnen.

58. Indem wir die erste Erzeugung unserer Fläche näher betrachten, sehen wir, dass man die Ebenen der beiden collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ oder die Punkte der F_2^3 auf die Punkte einer Ebene Σ_2 abbilden kann. Wir haben:

Die F_2^3 ist Punkt für Punkt in einer Ebene Σ_2 abbildbar. Den Geraden von Σ_2 entsprechen die Kegelschnitte der F_2^3, den Raumcurven C^3 der F_2^3 entsprechen Kegelschnitte von Σ_2, die durch einen Fundamentalpunkt gehen, welchem die Directrixgerade d_1 der F_2^3 entspricht.

Wir finden auch folgende Sätze:

Sind vier beliebige Gerade in R_4 gegeben, die aber eine gemeinsame Transversale d_1 haben, so ist durch sie eine F_2^3 bestimmt. Denn nimmt man zwei von diesen Geraden als $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ an, so kann man die zwei collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ mit Hülfe der übrigen zwei Geraden in nur einer Weise bestimmen.

Durch zwei Kegelschnitte in zwei Ebenen $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, die sich in dem Schnittpunkte der beiden Ebenen schneiden, und durch eine dritte Ebene $S_2^{(3)}$, ist eine und nur eine F_2^3 bestimmt, die $S_2^{(3)}$ als Secantenebene hat, und durch beide Kegelschnitte hindurchgeht.

59. Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, *dass durch einen* *beliebigen Punkt* A_0 *von* R_n *nur eine Secantenebene der* $F_2{}^3$ *geht; wenn aber der Punkt* A_0 *in* $F_2{}^3$ *selbst liegt, so bilden alle Secantenebenen durch ihn das System von Ebenen eines* 3-*dimensionalen* A_0-*Kegels zweiter Ordnung.*

Durch einen beliebigen Punkt A_0 geht also nur eine Secantenebene E_2. *Es giebt ausser dieser Ebene keine Gerade, die durch* A_0 *geht und dabei die* $F_2{}^3$ *in zwei Punkten schneidet.* Denn ist eine solche Gerade vorhanden, so lege man durch sie und durch eine Gerade von E_2, welche durch A_0 hindurchgeht, eine Ebene. Diese Ebene hat dann vier Punkte mit der $F_2{}^3$ gemein, sie ist also nach dem letzten Satze der Nr. 54. eine Secantenebene der $F_2{}^3$, d. h. durch den Punkt A_0 gehen zwei Secantenebenen der $F_2{}^3$, was nicht möglich ist. Ziehen wir jetzt durch A_0 in der Secantenebene E_2 eine Gerade, die den Kegelschnitt K^2 derselben, der zu der $F_2{}^3$ gehört, in zwei Punkten X_0, Y_0 schneidet. Durch X_0, Y_0 gehen zwei Erzeugende X_1, Y_1 der $F_2{}^3$, welche die Directrix in zwei Punkten X_0', Y_0' schneiden. Dieselben liegen also mit d_1 in einem Raume R_3, der natürlich durch A_0 geht. Drehen wir die Gerade $X_0\,Y_0$ um A_0 in E_2, so bilden $X_0\,Y_0$ eine Involution in K^2, und daher auch die Punkte $X_0'\,Y_0'$ auf d_1. Also:

Alle Räume R_3, *welche durch die Directrix* d_1 *und einen beliebigen Punkt* A_0 *des* R_4 *hindurchgehen, schneiden die* $F_2{}^3$ *in Paaren von Erzeugenden, die eine Involution bilden.* Man hat auch:

Die Directrixgerade d_1 *schneidet keine Secantenebene der* $F_2{}^3$.

60. *Jetzt projiciren wir die* $F_2{}^3$ *von einem beliebigen Punkte* A_0 *in allen möglichen Weisen in einen Raume* S_3; *so erhalten wir in* S_3 *nach den Sätzen der Nr.* 55. *alle Arten von Linienflächen dritten und zweiten Grades.*

Wir bekommen im Allgemeinen in S_3 eine Linienfläche dritten Grades $F_2'^3$. Alle Erzeugenden der $F_2{}^3$ werden von A_0 in die Erzeugenden der $F_2'^3$ projicirt, und da alle Erzeugenden der $F_2{}^3$ den Kegelschnitt K^2 von E_2 schneiden, so sieht man, dass die $F_2'^3$ eine Doppelgerade e_1 hat, die von allen Erzeugenden geschnitten wird. Die Directrix d_1 der $F_2{}^3$ wird in eine Gerade d_1' der $F_2'^3$ projicirt, die alle ihre Erzeugenden schneidet. Das Büschel von Räumen R_3, die durch A_0 und d_1 hindurchgehen, bestimmt in S_3 ein Büschel von Ebenen R_2, die durch d_1' hindurchgehen, und welche die $F_2'^3$ in zwei Geraden x_1', y_1' schneiden. Diese Geraden treffen sich offenbar auf der Geraden e_1. Und da x_1, y_1 eine Involution bilden, so bilden auch x_1', y_1' eine Involution.

Liegt A_0 ausserhalb des Kegelschnittes K^2, so kann man durch ihn an K^2 zwei Tangenten ziehen, welche *die zwei in* e_1 *gelegenen Cuspidalpunkte* der $F_2'^3$ ausschneiden. Liegt dagegen A_0 innerhalb von K^2, so fallen diese Tangenten und mit ihnen die Cuspidalpunkte fort.

Wenn A_0 in einer Ebene liegt, die durch d_1 und eine beliebige Erzeugende von F_2^3 geht, *so entsteht in S_3 eine $F_2'^3$, für welche die Doppelgerade e_1 mit der Directrix d_1' zusammenfällt.*

Projicirt man die F_2^3 von einem ihrer Punkte A_0, so erhält man in S_3 eine Linienfläche zweiten Grades. Das System der Directricen derselben wird durch die unendlich vielen durch A_0 hindurchgehenden Secantenebenen veranlasst.

Diese verschiedenen Arten der Linienflächen dritten Grades des R_3 sind lange bekannt, aber wir sehen hier, wie man sie *alle* aus einer einzigen Fläche durch Projection erhalten kann. Zugleich erkennt man an diesem Beispiele, wie man in andern Fällen zu verfahren hat.

61. *2-dimensionale Flächen F_2^6, die durch drei collineare Gebilde dritter Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, $S_0^{(3)}$ oder durch vier collineare Gebilde zweiter Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$ erzeugt werden.*

Ich theile hier über diese Fläche nur die Sätze mit:

Sie geht durch alle Scheitel S_0 der Gebilde des ersten Erzeugungssystems, und sie hat alle Axen S_1 der Gebilde des zweiten als dreifache Secantengeraden.

Ein beliebiger Raum R_3 des R_4 schneidet die F_2^6 in einer allgemeinen C^6 vom Geschlechte $p = 3$.

Aus der ersten Erzeugung der F_2^6 geht hervor:

Die F_2^6 hat ∞^3 dreifache Secantengeraden. Durch einen beliebigen Punkt des R_n geht nur eine solche Secante hindurch; und die dreifachen Secantengeraden durch einen Punkt R_n der F_2^6 selbst bilden einen 2-dimensionalen R_0-Kegel dritter Ordnung.

Aus der zweiten Erzeugung haben wir:

Bezieht man eine Ebene Σ_2 auf vier collineare Gebilde zweiter Stufe des R_4, welche dem zweiten Erzeugungssystem gehören, so entspricht jedem Punkte bez. jeder Geraden von Σ_2 respective ein Punkt und eine rationale Normalcurve C^4 der F_2^6. Zwei solche Normalcurven schneiden sich immer in einem und nur in einem Punkte.

Den Schnittcurven C^6 aller R_3 des R_4 mit F_2^6 entsprechen in Σ_2 Curven vierter Ordnung des Geschlechtes $p = 3$, die zehn Fundamentalpunkte gemein haben, welche im Allgemeinen beliebig liegen. Den letzteren entsprechen zehn Geraden der F_2^6. — Dieselben schneiden sich wechselweise nicht. —

Den zehn Curven dritter Ordnung durch neun der zehn Fundamentalpunkte in Σ_2 entsprechen zehn ebene Curven dritter Ordnung Z^3 der F_2^6.

Den 45 Verbindungslinien der zehn Fundamentalpunkte entsprechen 45 Kegelschnitte der F_2^6.

Den Geraden, die durch einen Fundamentalpunkt hindurchgehen, entsprechen Raumcurven C^3 der F_2^6.

Je zwei Kegelschnitten in Σ_2, *die respective durch die zehn Fundamentalpunkte gehen, entsprechen ein Paar von Raumcurven* C^3 *der* F_2^6, *die in einem* R_3 *liegen. Es giebt* 120 *solche Paare.*

Einer Curve vierter Ordnung in Σ_2, *die einen Fundamentalpunkt als Doppelpunkt hat und durch die übrigen hindurchgeht, entspricht eine* C^5 *der* F_2^6, *die in einem* R_3 *liegt, welcher durch eine Gerade der Fläche hindurchgeht.*

Den 45 C^4 *von* Σ_2, *die zwei Fundamentalpunkte als Doppelpunkte haben und durch die übrigen hindurchgehen, entsprechen Curven* C^4 *der* F_2^6, *die respective in den* 45 *Räumen* R_3 *liegen, welche durch die zehn Geraden der* F_2^6 *zwei zu zwei bestimmt werden. Allen* C^3 *durch acht der zehn Fundamentalpunkte in* Σ_2 *entsprechen Curven* C^4 *der* F_2^6, *deren Räume* R_3 *durch den Kegelschnitt gehen, welcher dem verbindenden Strahle der zwei übrigen Fundamentalpunkte entspricht.*

62. Projiciren wir jetzt die F_2^6 von einem beliebigen Punkte A_0 des R_4 in einen Raum S_3, *so erhält man eine* $F_2'^6$, *welche, wie man leicht sieht, eine Doppelcurve siebenter Ordnung besitzt.* Da durch A_0 eine dreifache Secantengerade der F_2^6 geht, *so hat die* $F_2'^6$ *einen triplanaren Punkt, der in die Doppelcurve selbst fällt.*

Die $F_2'^6$ *hat zehn Geraden, und es giebt zehn Ebenen (die den Curven* Z^3 *der* F_2^6 *entsprechen), welche die* $F_2'^6$ *in zwei Curven dritter Ordnung schneiden.*

In analoger Weise findet man für die $F_2'^6$ die entsprechenden Sätze zu allen andern Sätzen der vorigen Nummer.*)

Man kann die F_2^6 insbesondere aus einem ihrer Punkte projiciren. Man erhält dann in S_3 eine $F_2'^5$, welche eine Doppelcurve dritter Ordnung besitzt, wie aus der vorigen Nummer hervorgeht.

Andere interessante Flächen erhält man in S_3, wenn man den Projectionspunkt in verschiedenen andern Lagen gegen die F_2^6 annimmt.

Wenn die Erzeugungssysteme der F_2^6 *speciell sind, so bekommt man specielle* F_2^6, F_2^5, F_2^4 *des* R_4, *und durch Projection erhält man in* S_3 *specielle in einer Ebene eindeutig abbildbare Flächen* $F_2'^6$, $F_2'^5$, $F_2'^4$, $F_2'^3$, die ich der Kürze halber nicht weiter studiren will.

63. Endlich wollen wir etwas über die F_3^4 des R_4, die durch vier collineare Gebilde dritter Stufe erzeugbar ist, mittheilen.

Die F_3^4 ist Punkt für Punkt in einen Raum Σ_3 abbildbar und man erhält folgende Sätze:

Vier collineare Gebilde $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(4)}$ *dritter Stufe in* R_4 *erzeugen eine 3-dimensionale Fläche* F_3^4. *Sie besitzt zwei conjugirte Erzeugungs-*

---

*) Es scheint mir diese Fläche $F_2'^6$ des R_3 ganz neu zu sein, obgleich Clebsch, Cremona und Nöther mit anderen in einer Ebene eindeutig abbildbaren $F_2'^6$, welche auch 10 Geraden besitzen, sich beschäftigt haben.

systeme dritter Stufe, welchen zwei Systeme von Normalcurven C^4 *und zwei Systeme von* F_2^6 *entsprechen.* (Nr. 47.)

Zwei Flächen F_2^6*, die verschiedenen Systemen angehören, liegen in einer* F_3^3.

Eine C^4 *und eine* F_2^6 *desselben Systems treffen sich in einem und nur in einem Punkte, sofern die* C^4 *nicht selbst in* F_2^6 *liegt. Zwei* F_2^6 *desselben Systems schneiden sich in einer* C^4.

Die zwei Systeme der F_2^6 *und der* C^4 *sind gleichberechtigt.*

Die F_3^4 *hat* ∞ *viele Geraden, die den Punkten einer* C^{10} *des Bildraumes* Σ_3 *entsprechen.*

Es giebt ∞^2 *viele Ebenen, welche die* F_3^4 *in zwei Kegelschnitten schneiden.*

Ich habe in dieser Arbeit die nächtstliegenden projectivischen Beziehungen zwischen den Räumen von verschiedenen Dimensionen behandelt; es bleiben aber viele interessante Fragen nicht nur für den Raum von n Dimensionen, sondern auch für den gewöhnlichen Raum zu erledigen.

Leipzig, im Sommer 1881.

Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Fast alle Sätze der Analysis reeller Functionen stehen mit der Theorie der trigonometrischen Reihe in Verbindung, ja aus der Lösung der hier auftauchenden Probleme ist ein nicht geringer Theil der umfassendsten Lehrsätze hervorgegangen. Ursprünglich einer physikalischen Aufgabe dienend, bezog sich die Controverse zwischen Euler und d'Alembert doch schon auf eine rein mathematische Frage, auf die Zulässigkeit einer willkürlichen Function, die nicht durch ein bestimmtes analytisches Gesetz definirt ist; und aus der endgiltigen, selbst über Euler's Behauptung hinausgehenden Lösung derselben durch Fourier's Nachweis, dass das Gesetz der trigonometrischen Reihe den Begriff der willkürlichen Function nicht ausschliesst, ergab sich für die Analysis vollends die Nothwendigkeit, die Tragweite aller ihrer Sätze zu bestimmen. Den Anfang damit machte Dirichlet, welcher hier den Begriff der bedingten und unbedingten Convergenz für unendliche Reihen sowohl wie für das bestimmte Integral aufdeckte. Ihm folgte Riemann, der seinen Untersuchungen die allgemeine Erörterung über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voranstellte und die Trennung zwischen der trigonometrischen Reihe überhaupt und der Fourier'schen vollzog. Ferner schlossen sich die Arbeiten über die gleichmässige Convergenz einer Reihe, über den zweiten Mittelwerthsatz, und endlich über die allgemeinen Eigenschaften der fluctuirenden Functionen und der darstellenden Integrale an Fourier's Theorie an. Die Abhandlungen von Dirichlet und Riemann selbst aber haben eine verschiedene Geschichte gehabt. Dirichlet's Beweis, der sich von vornherein auf die Fourier'sche Reihe beschränkte, und auch hier das Problem unter gewissen Begrenzungen erledigte, wurde durch die beiden von einander unabhängigen Arbeiten der Herren Bonnet*) und du Bois-Reymond**) vermittelst des für die gesammte Integralrechnung wichtigen neuen Mittelwerthsatzes auf eine einfachere Form gebracht, während Herr Lipschitz*) lehrte, dass Dirichlet's Beweismethode auch unter allgemeineren Voraussetzungen ausreichend ist. Als dann von Heine das Problem gestellt wurde, die Eindeutigkeit der Entwickelung einer Function durch die Fourier'sche Reihe nachzuweisen, entstand zugleich die Aufgabe, die gleichmässige Convergenz zu erkennen, was von demselben auf Grund des vereinfachten Dirichlet'schen Beweises ausgeführt wurde.**) Aber das allgemeinere Problem, die Eindeutigkeit jeder trigonometrischen Entwickelung festzustellen, und zu zeigen, unter welchen Bedingungen die trigonometrische Reihe die Fourier'sche ist, führte in den Arbeiten der Herren Cantor,***) Ascoli†) und du Bois-Reymond††) auf Riemann's Untersuchung zurück. Riemann's Beweis im Artikel 8. seiner Abhandlung ist unverändert das Fundament für die Theorie der trigonometrischen Reihen überhaupt geblieben, und sein Satz im Artikel 13. gab die Wegleitung, um Grenzen der Darstellbarkeit zu finden, die Hr. du Bois-Reymond†††) zum ersten mal auch für stetige Functionen an bestimmter Stelle nachwies. Auch der vorliegende Aufsatz, der sich im Wesentlichen nur das Ziel gesteckt hat, die Theorie der Fourier'schen Reihe darzulegen, vermag, wo er das Gebiet der trigonometrischen Reihen überhaupt streift, an dem Riemann'schen Beweise nichts zu ändern. Derselbe bildet im Folgenden die Grundlage der Artikel II. und VI.

---

*) Liouville, Journal de Mathématiques. Tom. XIV, p. 249.

**) Journal für Mathematik. Bd. 69.

Die Vereinfachungen, welche ich mit meiner Arbeit für die Beweise der angedeuteten Sätze (mit Ausschluss der letzterwähnten Untersuchungen über die Darstellbarkeit an einer bestimmten Stelle) zu erzielen hoffe, beruhen auf zwei ganz verschiedenen Gedanken. Erstlich lässt sich, was ich schon in einer früheren Abhandlung*†) angegeben habe, die gleichmässige Convergenz der Fourier'schen Reihe, soweit sie für die gliedweise Integration nothwendig ist, sehr einfach darthun und an die Spitze der ganzen Theorie stellen. Auf das Verfahren, welches dazu dient, wurde ich durch eine Abhandlung von Herrn Töpler*††) geführt; die dort nachgewiesene Eigenschaft der einzelnen

---

*) Journal für Mathematik Bd. 63.

**) Journal für Mathematik Bd. 71. Handbuch der Kugelfunctionen Bd. 1, p. 53. Bd. 2, p. 346 ff.

***) Mathemat. Annalen Bd. IV und V.

†) Atti della Accademia dei Lincei. Ser. 3. Vol. 2. p. 584. Mathemat. Annalen Bd. VI.

††) Abhandlungen der k. bayer. Akad. 2. Cl. Bd. XII, Abth. I.

†††) Abhandlungen der k. bayer. Akad. 2. Cl. Bd. XII, Abth. II. Mathemat. Annalen Bd. X.

*†) Mathemat. Annalen Bd. VII.

*††) Anzeiger d. Ak. zu Wien. 7. Dec, 1876. Repertorium d. Mathem. Bd. 1, p 402.

Glieder einer Fourier'schen Reihe ist indessen schon früher von Herrn Plarr*) erkannt worden. Das zweite, wodurch allen Sätzen der Integralrechnung mit verhältnissmässiger Einfachheit die grösstmögliche Allgemeinheit gegeben werden kann, ist die consequente Ausbildung des Begriffes einer unendlichen „discreten“ Punktmenge. Dieser Begriff, welcher die von den Herren Cantor**) und Dini***) mehrfach behandelten Punktmengen erster Gattung umfasst, ist im Wesentlichen, wenn auch nicht völlig correct, zuerst in einer Abhandlung von Hankel†) angedeutet, und auch schon gelegentlich von Hrn. du Bois-Reymond erwähnt worden. In meinem Lehrbuche††) habe ich denselben präciser gefasst und seine Bedeutung für die Fundamentalsätze der Integralrechnung ausgeführt. Nichts desto weniger hielt ich es für nothwendig, als ersten Artikel der vorliegenden Arbeit die Hauptsätze über discrete Mengen und über das Verhalten stetiger sowohl wie integrirbarer Functionen in discreten Punkten aufzunehmen; einmal weil für die folgenden Untersuchungen diese Sätze unentbehrlich sind, sodann weil es nothwendig war, dieselben zum Theil ausführlicher zu behandeln, als es in dem genannten Buche geschehen ist.

Artikel II. enthält, nach Aufstellung des Begriffes der Convergenz einer unendlichen Reihe „im allgemeinen“, die Cantor'schen Sätze über das schliessliche Verschwinden der Coefficienten und über das eindeutige Bestimmtsein der trigonometrischen Reihe. Diese Beweise mussten ausgeführt werden, weil an Stelle der Punktmenge erster Gattung die discrete Menge zu setzen ist. Da es sich hier um trigonometrische Reihen überhaupt handelt, so war der oben erwähnte Riemann'sche Beweis unentbehrlich.

Im Artikel III. ist die „im allgemeinen“ gleichmässige Convergenz der Fourier'schen Reihe unter Voraussetzung der Integrirbarkeit von $[f(x)]^2$ bewiesen, die Integralbedingung für die Darstellung der Function an einer bestimmten Stelle abgeleitet, und der Dirichlet'sche Beweis in möglichst einfache Form gebracht.

Artikel IV. erläutert den Begriff der Darstellung einer Function „im allgemeinen“, und weist nach, dass unter der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzung solch eine Darstellung durch die Fourier'sche Reihe geleistet wird.

---

*) Comptes rendues. Mai 1857.

**) Math. Annalen Bd. V, XV und XVII.

***) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. 1878. Serie di Fourier. Pisa 1880.

†) Ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen 1870, sowie in dem Artikel „Grenze“ in der Allg. Encyklopädie von Ersch und Gruber.

††) Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881.

Im Artikel V. wird auch diese Voraussetzung fallen gelassen, und gezeigt, dass jede Fourier'sche Reihe, falls nur die Coefficienten derselben nach Null convergiren, die Function im allgemeinen darstellt. Daran schliesst sich der im Artikel VI. mit Hülfe der Riemann'schen Betrachtung geführte Beweis des Satzes, dass jede trigonometrische Reihe, welche eine integrirbare Function definirt, eine Fourier'sche Reihe ist.

Artikel VII. enthält einige Bemerkungen über das Verhalten der Fourier'schen Reihe an einer singulären Stelle, doch nur insoweit, als dieselben nothwendig sind, um im Artikel VIII. Regeln für die Differentiation und Integration der Reihe zu gewinnen.

I.

Der Begriff einer unendlichen Anzahl von Punkten innerhalb eines linearen Intervalles lässt eine Classification zu, die für alle Probleme der Integralrechnung von Bedeutung ist:

Nennt man das Intervall von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$ die Umgebung eines Punktes x von der Länge 2ε, wobei ε eine beliebig kleine aber endliche Grösse bezeichnet, so soll eine unendliche Menge von Punkten, welche in einem Intervalle von a bis b enthalten sind, eine discrete Menge (oder Mannigfaltigkeit) heissen, wenn es möglich ist, sämmtliche Punkte dieser Menge in Umgebungen einzuschliessen, deren Summe kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine Zahl, während die Anzahl der Umgebungen dabei beliebig wachsen kann. Dagegen soll die unendliche Menge eine lineare genannt werden, wenn sich die Summe der Umgebungen nicht beliebig verkleinern lässt. Beispiele discreter Punktmengen liefern alle Punktmengen erster Gattung.

Die discrete Menge besitzt die Eigenschaft, dass sich hier in beliebiger Nähe zu beiden Seiten jedweder Stelle ein Intervall von endlicher Länge angeben lässt, in welchem kein Punkt dieser Menge liegt. Denn ist α ein beliebiger Punkt des Intervalles ab, so wäre es nur dann nicht möglich in beliebiger Nähe von α ein Intervall ausfindig zu machen, welches keinen Punkt der Menge enthält, wenn in der Umgebung eines jeden Punktes innerhalb einer bei α beginnenden endlichen Strecke von der Länge δ unendlich viele Punkte sich befänden. Alsdann wäre es aber auch nicht möglich, sämmtliche Punkte der Menge von vornherein in Umgebungen einzuschliessen, deren Summe kleiner ist als δ, d. h. die Menge wäre nicht discret.

Mit Benutzung einer Bezeichnung von Hrn. Cantor lautet der Satz: „Die discrete Menge ist in keinem noch so kleinen Intervalle „überall dicht“. Aber es ist zu beachten, dass dieser Satz nicht umkehrbar ist. Zwar hat Hankel seine Umkehrbarkeit in den oben genannten Abhandlungen zu beweisen versucht; jedoch ist sein Beweis unzulänglich. Ich selbst habe die Umkehr in meinem Lehrbuche (pag. 260) ausgesprochen, ohne Beweis und ohne weitere Schlüsse daraus zu ziehen. Die Frage ist wichtig, denn sie enthält, wie schon Herr du Bois-Reymond (Math. Annal. Bd. XVI, pag. 128, Anmerk.) angedeutet hat, den Grund dafür, dass die Dirichlet'sche Bedingung der Integrirbarkeit (Journal f. Math. Bd. 4, pag. 169) nicht zulässig ist, dass überhaupt der Riemann'sche Integralsatz durch keine andere Fassung ersetzt werden kann.

Auch eine lineare Menge kann so vertheilt sein, dass sie in keinem Intervalle überall dicht ist. Man wird die Möglichkeit am besten durch ein Beispiel einsehen. Innerhalb der Strecke von a bis b construire man n Theilpunkte, und mache jeden zum Mittelpunkte einer Strecke von der Länge δ, die so gewählt sei, dass $n\delta = h < b - a$. Die Punkte der zu construirenden Menge sollen sich nur innerhalb dieser Theilstrecken befinden. Jedes Theilintervall werde nun wiederum durch n' Theilpunkte zerlegt, jeder derselben zum Mittelpunkt einer Strecke δ' gemacht, und $nn'\delta' = h' < h$ gewählt. Nur innerhalb der neu construirten Intervalle δ' sollen Punkte der Menge sich befinden. Indem man diese Art der Theilung fortsetzt, innerhalb des Intervalles δ' die Theilstrecken δ'' construirt, deren Anzahl n'' und deren Grösse durch die Gleichung $nn'n''\delta'' = h'' < h'$ bestimmt ist, wird eine lineare Menge erhalten, wenn die Werthe $h, h', h'', \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden, welche nicht unter jeden angebbaren Werth herabsinkt, während die Menge eine discrete ist, wenn dieser Grenzwerth Null wird. In beiden Fällen aber lässt sich innerhalb eines jeden noch so kleinen Intervalles ein Theilintervall angeben, welches keinen Punkt der Menge enthält.

Die Bedeutung der discreten Punktmenge, als einer besonderen Kategorie innerhalb der Mengen, welche in keinem Intervalle überall dicht sind, tritt, wie gesagt, erst bei den Problemen der Integralrechnung hervor. Um den folgenden Sätzen eine einheitliche Formulirung zu geben, habe ich es indessen vorgezogen, von vornherein den Begriff der discreten Menge zu betonen, auch da, wo bei der Beweisführung nur die zweite allgemeinere Eigenschaft derselben benutzt wird.

Für das Verhalten stetiger Functionen gelten folgende Sätze:

Lehrsatz 1. *Eine Function, die in dem Intervalle von a bis b durchweg stetig sein soll, ist vollständig definirt, wenn sie bis auf discrete Punkte gegeben ist.*

Denn ist x ein Werth, für welchen die Function $f(x)$ noch unbekannt ist, so lassen sich in beliebiger Nähe von x Punkte $x + \varepsilon$ und $x - \varepsilon$ angeben, welche nicht der discreten Menge angehören, in denen also die Werthe $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\varepsilon)$ bekannt sind. Der Werth von $f(x)$ ist der Grenzwerth der von $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\varepsilon)$ gebildeten Werthreihen, während ε nach 0 convergirt.

Dieser Satz kann auch so gefasst werden: Zwei stetige Functionen, die sich nur noch in discreten Punkten unterscheiden können, sind durchweg identisch; er ist eine besondere Ausführung des allgemeinern Satzes: Eine stetige Function ist vollständig definirt, sobald die Function in jedem kleinsten Intervalle an einer Stelle bekannt ist.

In derselben Weise lassen sich auch die folgenden vier Sätze verallgemeinern.

Lehrsatz 2. *Wenn eine stetige Function in allen Punkten eines Intervalles mit Ausnahme einer discreten Menge stets unterhalb oder oberhalb einer bestimmten Grenze bleibt, so kann sie an keinem Punkte diese Grenze überschreiten.*

Denn bedeutet G etwa die obere Grenze, so würde, falls die stetige Function in einem Punkte x gleich $G+h$ wäre $(h>0)$, ein endliches Intervall $x\pm\varepsilon$ angebbar sein, in welchem sämmtliche Functionswerthe um weniger als die positive Grösse h von $f(x)$ differiren. Dieses Intervall enthielte Punkte, die nicht der discreten Menge angehören, in denen also wider die Voraussetzung die Werthe der Function grösser sind als G.

Lehrsatz 3. *Wenn für eine stetige Function $f(x)$ an jeder Stelle eines Intervalles mit Ausnahme einer discreten Menge eine obere Grenze für Δx angegeben werden kann, so dass $f(x+\Delta x)-f(x)$ nicht negativ (resp. positiv) wird, so ist $f(x+\Delta x)-f(x)$ an keiner Stelle negativ (resp. positiv), wie klein auch immer $\Delta x>0$ gewählt wird.*

Man betrachte unter der erst genannten Annahme den Verlauf der Function innerhalb eines beliebig herausgegriffenen Intervalles von x_0 bis x_1. Wenn jetzt die Function nicht durchweg von der Stelle x_0 bis x_1 wächst, so muss sie entweder im ganzen Intervalle constant sein (alsdann ist überall $f(x+\Delta x)-f(x)=0$), oder sie erreicht an einer zwischen x_0 und x_1 gelegenen Stelle, die auch mit x_0 zusammenfallen kann, ein relatives Maximum. Für diese Stelle lässt sich ein Δx angeben, so dass $f(x+\Delta x)-f(x)<0$. Es sei der Werth dieser Differenz gleich $-\eta$. Convergirt Δx nach 0, so convergirt auch η nach 0. Bezeichnet also ε eine beliebige Grösse kleiner als η, so lässt sich eine Stelle $x+\Delta' x$ angeben $(\Delta' x<\Delta x)$, für welche

$$f(x+\Delta' x)-f(x)=-\varepsilon$$

wird, und zwar bezeichne $x+\Delta' x$ die erste Stelle zwischen $x+\Delta x$ und x, für welche diese Gleichheit eintritt. Alsdann ist auch

$$f(x+\Delta x)-f(x+\Delta' x)=-\eta+\varepsilon<0,$$

während Δx bis zum Werthe $\Delta' x$ abnimmt. Nun könnte zwar bei einer bestimmten Wahl des ε auch die Stelle $x+\Delta' x$ der discreten

Menge angehören, von deren Punkten nicht bekannt ist, dass die zugehörige Differenz gleich oder grösser als Null werden muss. Da aber ε alle Werthe zwischen 0 und η continuirlich durchläuft, so müssen auch die zugehörigen Stellen $x + \Delta' x$ continuirliche Intervalle durchlaufen, in denen also Punkte gelegen sind, die nicht der discreten Menge angehören, für welche also die Differenz nicht negativ werden kann. Es giebt daher in einem beliebigen Intervalle von x_0 bis x_1 keinen zwischenliegenden Maximalwerth, die Function nimmt also überhaupt an keiner Stelle ab.

Ebenso beweist man, dass die Differenz $f(x + \Delta x) - f(x)$, wenn sie bis auf discrete Punkte nicht positiv wird, an keiner Stelle positiv werden kann. Einen Specialfall dieses Satzes bildet

Lehrsatz 4. *Weiss man von einer in einem Intervalle durchweg stetigen Function, dass sie überall mit Ausnahme einer discreten Menge constant sein muss, so ist die Function im ganzen Intervalle constant, d. h. sie hat ausnahmslos an allen Stellen denselben Werth.*

Lehrsatz 5. *Wenn sich bei einer stetigen Function $f(x)$ an jeder Stelle des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ mit Ausnahme einer discreten Menge eine obere Grenze für Δx angeben lässt, so dass*

$$\text{abs}\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

kleiner als eine beliebig kleine Grösse δ wird, so ist die Function $f(x)$ in dem ganzen Intervalle constant.

Denn bildet man die Function $\psi(x) = \pm [f(x) - f(a)] - (x - a)\delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstanden, so ist

$$\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \pm \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \delta. \quad (\Delta x > 0).$$

Also wird die Differenz $\psi(x + \Delta x) - \psi(x)$ der stetigen Function $\psi(x)$ an jeder Stelle mit Ausnahme einer discreten Menge negativ, sie kann daher nach Lehrsatz 3. an keiner Stelle positiv werden. Mithin ist $\psi(x)$ eine Function, welche an keiner Stelle zunimmt und folglich, da sie an der Anfangsstelle $x = a$ Null ist, nirgends positiv wird.

In dem ganzen Intervalle ist also

$$\text{abs}\,[f(x) - f(a)] < (x - a)\,\delta < (b - a)\,\delta$$

und weil δ eine beliebig kleine Grösse bedeutet, so ist $f(x) = f(a)$.

Die überall endlichen Functionen, welche in einem Intervalle unstetig werden, können an der Unstetigkeitsstelle in verschiedener Weise sich verhalten. Die Unstetigkeit ist erstlich eine punktuelle, wenn an einer Stelle x $\text{Lim}\, f(x + \varepsilon)$ sowohl wie $\text{Lim}\, f(x - \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten und zwar denselben Grenzwerth besitzen, der Werth von $f(x)$ aber von diesem Grenzwerth verschieden, oder überhaupt ganz unbestimmt zwischen endlichen Grenzen ist. Die Differenz zwischen dem Werthe $f(x)$ oder den Unbestimmtheitsgrenzen dieses Werthes und den Nachbarwerthen soll die Schwankung der Function genannt werden. Die Function erleidet zweitens eine bestimmte sprungweise Werthänderung, wenn $\operatorname{Lim} f(x+\varepsilon)$ und $\operatorname{Lim} f(x-\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ bestimmte aber von einander verschiedene Werthe annehmen. Die Differenz dieser Werthe soll hier die Schwankung heissen. Die Function wird drittens völlig unbestimmt an der Stelle x, wenn einer dieser Grenzwerthe oder auch beide völlig unbestimmt sind, indem $f(x \pm \varepsilon)$ unendlich viele Maxima und Minima besitzt, deren Differenz nicht Null wird. Ist im Intervalle von x bis $x+\varepsilon$ G die obere Grenze, welche von den Werthen der Function nicht überschritten wird, g die die untere, so kann, während ε nach 0 convergirt, G mit beständiger Abnahme (oder Constanz) einer bestimmten Grösse G', ebenso g mit beständiger Zunahme (oder Constanz) einer Grenze g' zustreben. Diese Werthe G' und g' geben die Unbestimmtheitsgrenzen der Function an der Stelle x vorwärts genommen; ebenso lassen sich Unbestimmtheitsgrenzen G'' und g'' für die andere Seite der Stelle x ermitteln. Die beiden extremen Werthe dieser vier Grössen bestimmen die Maximal- und Minimalwerthe an der Unstetigkeitsstelle, ihre Differenz die Schwankung der Function an dieser Stelle. Selbstverständlich kann auch eine punktuelle Unstetigkeit mit jeder der beiden anderen Arten sich combiniren; in diesem Falle ist wiederum die Differenz zwischen den extremsten Werthen als Schwankung der Function zu bezeichnen.

Eine Function, welche im allgemeinen stetig, an unendlich vielen Stellen unstetig wird, soll eine punktirt unstetige Function genannt werden, wenn die Stellen, an denen die Schwankungen der Function grösser sind als eine beliebige endliche Zahl δ, stets nur eine discrete Punktmenge bilden.

Linear unstetig dagegen heisse eine Function, bei welcher solche Stellen eine lineare Menge bilden.

Aus der Riemann'schen Definition des bestimmten Integrales folgt unmittelbar:

Lehrsatz 6. *Die in einem Intervalle punktirt unstetigen Functionen sind integrirbar;* und umgekehrt: *Jede überall endliche integrirbare Function ist entweder eine durchweg stetige oder eine punktirt unstetige.*

Man kann nicht behaupten, dass bei einer punktirt unstetigen Function die Unstetigkeitsstellen insgesammt eine discrete Menge bilden; vielmehr können, was ja dem Wesen der discreten Menge widerstreitet, in jedem noch so kleinen Intervalle Unstetigkeiten vorhanden sein. Nur sind die Stellen, an denen die Schwankungen grösser sind als eine beliebig kleine Zahl δ, stets in discreter Menge vorhanden. Daraus ersieht man auch unmittelbar, dass eine integrirbare Function in jedem kleinsten Intervalle Punkte enthalten muss, in denen sie stetig ist. Denn liesse sich in keinem einzigen Punkte eines noch so kleinen Intervalles die Stetigkeitsbedingung $f(x+h) - f(x) < \delta$ erfüllen, wie klein auch h genommen wird, so erfüllten die Unstetigkeitsstellen mit Schwankungen grösser als δ eine endliche Strecke; sie würden also keine discrete Menge bilden.

Lehrsatz 7. *Das Integral einer Function ist vollständig bestimmt, sobald die zu integrirende Function bis auf discrete Punkte definirt ist;* oder genauer: *Zwei integrirbare Functionen liefern dasselbe Integral, wenn die Stellen, an denen sie um mehr als die beliebig kleine Grösse δ differiren, eine discrete Menge bilden.*

Lehrsatz 8. *Der Differentialquotient des bestimmten Integrales*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

ist vorwärts genommen im allgemeinen gleich $f(x)$. Die Stellen, an denen er von diesem Werthe um mehr als eine beliebig kleine Grösse δ abweicht, oder falls $f(x)$ unbestimmt wird, die Stellen, an denen die Differenz zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen und dem Differentialquotienten grösser wird als δ, oder endlich die Stellen, an denen die Unbestimmtheitsgrenzen des Differentialquotienten von denen der Function $f(x)$ um mehr als δ differiren, bilden eine discrete Menge.

Im Integrationsintervalle a bis b denke man sich alle Unstetigkeitsstellen, an denen die Schwankungen der integrirbaren Function $f(x)$ grösser sind als eine beliebig kleine Zahl δ, in Intervalle von beliebiger Kleinheit eingeschlossen. Alsdann kann x noch jeden Werth in beliebiger Nähe jedweder Stelle bezeichnen, und es ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Es sind nun drei Fälle zu betrachten. Entweder es ist $f(x)$ an der Stelle x stetig, so dass $\lim\limits_{h=0} f(x+h) = f(x)$; alsdann wird bekanntlich der vorwärts genommene Differentialquotient von $F(x)$ gleich $f(x)$. Oder $\lim f(x+h)$ hat einen bestimmten Grenzwerth: $f(x+0)$; derselbe differirt aber von dem Werthe $f(x)$ oder von den Unbestimmtheitsgrenzen dieses Werthes um weniger als δ. Alsdann ist

$$F'(x) = f(x+0) = f(x) \pm (< \delta).$$

Oder endlich die Function hat in beliebiger Nähe der Stelle x vorwärts genommen unendlich viele Maxima und Minima, doch werden die Schwankungen schliesslich kleiner als δ. Es sei G die obere, g die untere Grenze der Functionswerthe im Intervalle x bis $x+h$, so ist auch

$$G > \frac{F(x+h)-F(x)}{h} > g.$$

Convergirt nun h nach 0, so braucht der Differenzenquotient keinen bestimmten Werth anzunehmen; er bleibt aber immer zwischen den Grenzen G und g, welche nach den Werthen G' und g' convergiren, und deren Differenz kleiner wird als δ, eingeschlossen. Es sind also die Grenzen des Differentialquotienten von denen der Function um weniger als δ unterschieden. Alle Stellen x, für welche diese Beziehungen möglicherweise nicht gelten, sind die anfangs ausgeschlossenen discreten.

Zu bemerken ist nur noch, dass auch in dem letzten Falle eine punktuelle Unstetigkeit für $f(x)$ hinzukommen kann, doch bleibt der Unterschied zwischen den extremen Werthen von $f(x)$, in deren Intervall auch die Unbestimmtheitsgrenzen des Differentialquotienten fallen, kleiner als δ.

Für den rückwärts genommenen Differentialquotienten besteht derselbe Satz. Da die Stellen, an denen die Differenz der Werthe $f(x+0)$ und $f(x-0)$ grösser wird als δ, oder die extremen Werthe von G', g' und G'', g'' um mehr als δ differiren, ebenfalls nur eine discrete Punktmenge bilden können, so erkennt man zugleich, dass der vorwärts und der rückwärts genommene Differentialquotient des bestimmten Integrales nur in discreten Punkten von einander um eine angebbare Grösse unterschieden sind. Sie liefern daher auch umgekehrt nach Lehrsatz 7. dasselbe Integral, nämlich beide dasselbe wie die Function $f(x)$.

Lehrsatz 9. (Fundamentalsatz der Integralrechnung.) *Bezeichnet $F(x)$ eine stetige Function, welche eine überall endliche integrirbare Ableitung $F'(x)$ besitzt, so ist*

$$\int_a^x F'(x)\,dx - F(x) = \text{const.}$$

Dabei kann $F'(x)$ sowohl die vorwärts, wie die rückwärts genommene Ableitung von $F(x)$ bedeuten, und selbstverständlich in discreten Punkten beliebig abgeändert werden. Diese beiden Zusätze sind unmittelbare Folgerungen aus dem Satze 7. und der Schlussbemerkung zu Satz 8.

Es bedeute $F'(x)$ die vorwärts genommene Ableitung; man setze

$$\varphi(x) = \int_a^x F'(x)\,dx - F(x),$$

so wird:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}F'(x)\,dx-\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\,.$$

Zufolge des vorigen Satzes lässt sich nur an discreten Punkten nicht ohne Weiteres ein Δx angeben, für welches die rechte Seite dieser Gleichung kleiner wird, als eine beliebig kleine Zahl. Es sind nämlich nur diejenigen Stellen vorerst auszuscheiden, an denen $F(x)$ keine bestimmte Ableitung besitzt, an denen vielmehr die Unbestimmtheitsgrenzen von $\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ um mehr als δ differiren, sodann diejenigen Stellen, an denen $F'(x)$ zwar einen bestimmten Werth hat, an denen aber $\lim\limits_{h=0}F'(x+h)$ um mehr als δ von $F'(x)$ abweicht. Alle diese Stellen bilden, zufolge der Integrirbarkeit von $F'(x)$, nur eine discrete Menge. Folglich kann nach Lehrsatz 5. geschlossen werden, dass die stetige Function $\varphi(x)$ constant ist.

Nachträglich kann man nun, da $\varphi(x)$ durchweg constant ist, erkennen, dass auch an den singulären Stellen der Quotient $\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ gleich 0 wird, und man erhält den

Lehrsatz 10. *Besitzt die stetige Function $F(x)$ innerhalb eines Intervalles eine überall endliche integrirbare Ableitung $F'(x)$, so ist der Werth des Differenzenquotienten*

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\quad \textit{gleich}\quad \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}F'(x)\,dx,$$

also überall gleich einem Werthe, der zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe der Function $F'(x)$ im Intervalle von x bis $x+\Delta x$, resp. zwischen den extremsten Unbestimmtheitsgrenzen dieser Function gelegen ist, wie klein auch immer Δx gewählt wird.

Die Integration von Functionen, die in einem Intervalle bestimmt unendlich oder unbestimmt zwischen unendlichen Grenzen werden, verlangt eine besondere Definition, wenn die Unendlichkeitsstellen eine unendliche Menge bilden.

Für das Folgende wird es genügen festzusetzen: Wird die Function $f(x)$ im Intervalle von a bis x an unendlich vielen Stellen, die eine discrete Menge bilden, unendlich, so soll unter dem Integral $\int\limits_{a}^{x}f(x)dx$ diejenige stetige Function von x verstanden werden, welche für $x=a$ verschwindet, und deren Ableitung im allgemeinen, d. h. nach Ausschluss discreter Punkte, von dem Werthe $f(x)$ um weniger als eine beliebig kleine Grösse δ unterschieden ist, vorausgesetzt, dass solch eine Function existirt. Diese Definition ist insofern bestimmt, als es jedenfalls nach Lehrsatz 5. nicht zwei von einander verschiedene stetige Functionen geben kann, welche die geforderte Eigenschaft besitzen.

Es ist nicht schwer Beispiele für integrirbare Functionen zu bilden, die in unendlich vielen discreten Punkten unendlich werden. Eine einfache Form dieser Art ist die Function

$$f(x) = \frac{d\left[x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^r\right]}{dx} = \left(\sin\frac{1}{x}\right)^r - r\,\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{r-1}\cos\frac{1}{x}\,.$$

Dieselbe besitzt, falls $0 < r < 1$ ist, in noch so kleiner Umgebung der Nullstelle unendlich viele Unendlichkeitspunkte.

Für das Folgende kommt noch eine gewisse Modification des Lehrsatzes 9. in Betracht: Weiss man von einer Function, dass sie an keiner Stelle des Intervalles eine sprungweise Werthänderung erleidet (was nicht ausreichend zur Stetigkeit ist, da die Function unbestimmt zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen oder bestimmt unendlich werden könnte), und besitzt dieselbe überall mit Ausnahme discreter Punkte eine integrirbare Ableitung, so kann die Function in den discreten Punkten nur dann bestimmt unendlich oder auch unbestimmt werden, wenn der Werth der Ableitung bei Annäherung an die discreten Punkte über jeden Betrag hinaus wächst. Denn bleibt die integrirbare Ableitung bei Annäherung an eine singuläre Stelle endlich, so ist auch der Werth der Function

$$F(x) = \lim_{\varepsilon=0} F(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=0}\int^{x-\varepsilon} F'(x)dx$$

bestimmt, weil das Integral sicherlich bestimmt bleibt. Dieses Resultat lässt sich kurz so fassen:

Lehrsatz 11. *Erleidet eine Function in einem Intervalle an keiner Stelle eine sprungweise Werthänderung, und ist die Ableitung derselben bis auf discrete Punkte als integrirbare Function bekannt, deren Betrag nirgendwo eine bestimmte angebbare Grösse überschreitet, so ist die Function im ganzen Intervalle stetig, und ihr Werth*

$$F(x) = \int^{x} F'(x)\,dx.$$

Es erübrigt noch den Satz zu beweisen, der seit Riemann's Untersuchung das Fundament für die Theorie der trigonometrischen Reihen bildet.

Bekanntlich besteht der Satz: Wenn sich bei einer stetigen Function $f(x)$ ausnahmslos an jeder Stelle eines Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ eine obere Grenze für Δx angeben lässt, so dass

$$\operatorname{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] < \delta$$

wird, so ist $f(x)$ eine lineare Function. Der Beweis, den man Herrn Schwarz zu verdanken hat, möge der Vollständigkeit halber hier folgen. Man bilde

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\},$$

$$\chi(x) = \pm\psi(x) - \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x),$$

wobei δ wiederum eine positive beliebig kleine Zahl bezeichnet, so wird

$$\frac{\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = \pm\left[\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] + \delta$$

eine Grösse, die an jeder Stelle x durch Wahl einer oberen Grenze für Δx positiv gemacht werden kann. Daraus folgt, dass die stetige Function $\chi(x)$, welche an den Endpunkten des Intervalles den Werth 0 hat, nirgends positiv werden kann; denn alsdann müsste sie irgendwo einen Maximalwerth annehmen. Die Stellen, an denen dieser Maximalwerth erreicht wird, könnten in beliebiger, auch unendlicher Anzahl vorhanden sein. Bezeichnet nun x die letzte Stelle im Intervalle von a bis b, zu welcher dieser Maximalwerth gehört, so müsste

$$\chi(x+\Delta x) - \chi(x) < 0, \quad \chi(x-\Delta x) - \chi(x) \leqq 0$$

sein, also wäre wider die Voraussetzung

$$\chi(x+\Delta x) - 2\chi(x) + \chi(x-\Delta x) < 0.$$

Mithin ist $\chi(x)$ durchweg negativ, und folglich

$$\text{abs}\,\psi(x) < \frac{\delta}{2}(x-a)(b-x) < \frac{\delta}{2}(b-a)^2.$$

Da δ beliebig klein ist, so muss

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\}$$

sein.

Besteht die Bedingung dieses Satzes nicht mehr in allen Punkten, sondern sind Punkte einer discreten Menge davon ausgenommen, so gilt der

Lehrsatz 12. *Wenn bei einer stetigen Function $f(x)$ an jeder Stelle eines Intervalles, mit Ausnahme einer discreten Menge, eine obere Grenze für Δx vorhanden ist, so dass*

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] < \delta$$

wird, so lässt sich in beliebiger Nähe einer jeden Stelle ein Intervall von endlicher Länge angeben, in welchem $f(x)$ eine bestimmte lineare Function ist.

Die stetige Function $f(x)$ ist also geometrisch als eine Zickzacklinie mit beliebig auch unendlich vielen Ecken zu denken. Es soll nun weiter festgestellt werden, welche Bedingung noch erfüllt sein muss, damit $f(x)$ durch eine einzige lineare Function ausdrückbar sei. Für die späteren Anwendungen kommt es darauf an, nachzuweisen, dass die folgende Bedingung ausreicht: An allen Stellen ohne Ausnahme muss

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]<\delta$$

werden. — Die stetige Function $f(x)$, welche eine Zickzacklinie bildet, ist ein Integral, d. h. sie besitzt eine integrirbare Ableitung. Denn nach Ausschluss der discreten Punkte ist in allen Intervallen eine Ableitung vorhanden, die in jedem Intervalle constant, also integrirbar ist. Mithin kann man, selbst wenn die Ableitung bei Annäherung an die discreten Punkte unendlich werden sollte,

$$f(x)=\int^{x} f'(x)\,dx$$

setzen. Das Wesen der zweiten Bedingung besteht nun darin, dass sie sprungweise Werthänderungen von $f'(x)$ an jeder Stelle ausschliesst. Denn es ist

$$\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x}^{x+\Delta x} f'(x)\,dx+\int_{x}^{x-\Delta x} f'(x)\,dx\right].$$

Haben also $\text{Lim}\, f'(x+\Delta x)$ und $\text{Lim}\, f'(x-\Delta x)$ für $\Delta x=0$ bestimmte endliche Werthe, so können dieselben nicht von einander verschieden sein. Für die Function $f'(x)$ ist aber ebenfalls überall mit Ausnahme der discreten Punkte der Werth der Ableitung bekannt, und zwar ist $f''(x)$ gleich 0. Demnach ist nach Lehrsatz 11. $f'(x)$ eine stetige Function, für welche die Gleichung besteht

$$f'(x)-f'(a)=\int_{a}^{x} f''(x)\,dx=0,$$

und also ist, was zu beweisen war, $f'(x)$ in dem ganzen Intervalle constant. Sonach lautet das Resultat:

Lehrsatz 13. *Wenn sich für eine stetige Function nicht nur an jeder Stelle eines Intervalles von a bis b mit Ausnahme einer discreten Menge eine obere Grenze für Δx bestimmen lässt, so dass*

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right]<\delta$$

wird, sondern wenn auch allenthalben

$$\text{abs}\left[\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right] < \delta$$

gemacht werden kann, so ist

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{b-a}\{f(b)-f(a)\}.$$

Es ist mir nicht gelungen, diesen Satz ohne Benutzung der wesentlichen Integraleigenschaft discreter Punkte, also in Analogie mit dem Lehrsatze 5., lediglich auf Grund der Eigenschaft, dass die Ausnahmepunkte nicht überall-dicht sind, zu beweisen.

Im Zusammenhange mit diesem Satze steht der folgende:

Lehrsatz 14. *Lässt sich bei einer stetigen Function $F(x)$ an jeder Stelle mit Ausnahme einer discreten Menge eine obere Grenze für Δx angeben, so dass*

$$\frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\overline{\Delta x}^2}$$

von der überall endlichen integrirbaren Function $f(x)$ um weniger als die beliebig kleine Zahl δ differirt, und setzt man

$$F_1(x)=\int_\beta^x dy\int_\alpha^y f(y)\,dy,$$

(α und β bezeichnen beliebige Werthe im Intervalle), so ist die Differenz

$$F(x)-F_1(x)=\varphi(x)$$

eine lineare Function von x.

Die Function $F_1(x)$ besitzt die durchweg stetige erste Ableitung $F_1'(x)=\int_\alpha^x f(y)\,dy$. Daraus folgt nach einem bekannten Satze über die zweifache Definition der zweiten Ableitung einer Function, dass

$$\text{Lim}\,\frac{F_1(x+\Delta x)-2F_1(x)+F_1(x-\Delta x)}{\overline{\Delta x}^2}=f(x)$$

wird überall, wo $\text{Lim}\, f(x\pm\Delta x)$ für $\Delta x=0$ einen bestimmten stetigen Werth ergiebt. Man kann diesen Satz auch direct aus der Gleichung beweisen:

$$F_1(x)=\int_\beta^x f(y)\,(x-y)\,dy+\text{Const.},$$

also:

$$\begin{aligned}&F_1(x+\Delta x)-2F_1(x)+F_1(x-\Delta x)\\&=\int_0^{\Delta x}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]\,(\Delta x-\alpha)\,d\alpha\\&=[f(x+\Theta\Delta x)+f(x-\Theta\Delta x)]\,\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}.\end{aligned}$$

Schliesst man nun zunächst alle Stellen aus, an denen entweder die Unbestimmtheitsgrenzen der Function

$$f(x) = \mathrm{Lim}\,\frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2},$$

oder, falls $f(x)$ einen bestimmten Werth hat, die Schwankungen der Function $f(x-\Delta x)$ bis $f(x+\Delta x)$ grösser sind als δ — und alle diese Stellen bilden zufolge der Integrirbarkeit von $f(x)$ nur eine discrete Menge, — so sieht man, dass $F(x)$ den Bedingungen von Satz 12. genügt, also in jedem kleinsten Intervalle linear sein muss.

Es genügt aber auch den Bedingungen des Satzes 13. Weil nämlich zufolge der Endlichkeit von $f(x)$, resp. seinen Unbestimmtheitsgrenzen

$$\Delta x\left[\frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2}\right] \quad \text{und} \quad \int\limits_{x-\Theta\Delta x}^{x+\Theta\Delta x} f(x)\,dx$$

an allen Stellen nach 0 convergiren, so wird allenthalben

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

gleich 0.

Zusatz. Wird die Bedingung aufgehoben, dass $f(x)$ überall endlich bleibt, so gilt der Satz nichtsdestoweniger, falls man nachweisen kann, dass allenthalben

$$\frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

kleiner als δ wird; denn $\int\limits_{x-\Theta\Delta x}^{x+\Theta\Delta x} f(x)\,dx$ wird zufolge der Integrirbarkeit von $f(x)$ für $\Delta x = 0$ immer nach 0 convergiren.

II.

Die Divergenzstellen einer unendlichen Reihe sind von zweierlei Art: Entweder es wächst der Summenwerth der Glieder bei fortgesetzter Summation seinem Betrage nach über jede Grenze; die Reihe wird alsdann an dieser Stelle in bestimmter oder unbestimmter Weise unendlich; oder die fortgesetzte Summation liefert Werthe, die zwischen endlichen Grenzen oscilliren. Während im ersten Falle die Divergenz eine unendliche genannt werden kann, lässt sich im zweiten ein endliches Mass für dieselbe fixiren. Bezeichnet man mit S_{n-1} die Summe der Glieder mit dem Index 0 1 $\cdots$ bis $n-1$, mit R_n die Summe aller übrigen, also den Rest der Reihe, und bildet die Folge: S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, $\cdots$, so existirt eine obere (endliche) Grenze G_n und eine untere g_n, die von den Gliedern der unendlichen Folge nicht überschritten wird. Wächst der Stellenzeiger n beliebig, so wird G_n bei fortwährender Abnahme oder Constanz einen Werth G', ebenso g_n bei fortwährender Zunahme oder Constanz einen Werth g' erhalten. Diese Werthe G' und g' bilden die schliesslichen Grenzen für die Oscillation der Reihe, ihre Differenz soll das Divergenzmass genannt werden. Ist das Divergenzmass gleich 0, so convergirt die Reihe an dieser Stelle. Wird die Differenz $S_{n+k} - S_{n-1}$ mit $R_{n,k}$ bezeichnet, so hat die Folge der Reste $R_{n,0}$, $R_{n,1}$, $R_{n,2}$, $R_{n,3} \cdots$ die Eigenschaft, dass der Betrag der einzelnen Glieder höchstens gleich ist der Differenz $G_n - g_n$. Wenn also das Mass der Divergenz kleiner ist als eine Zahl d, so lässt sich eine Stelle n finden, von der ab die Beträge aller Reste $R_{n,k}$ kleiner bleiben als d.

Die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

soll in einem Intervalle von a bis b „im allgemeinen“ convergent heissen, wenn die Stellen x, an denen das Divergenzmass unendlich oder überhaupt grösser bleibt als eine beliebig kleine Zahl δ, stets nur eine discrete Menge bilden. Auch hier ist nicht gesagt, dass die Stellen, an denen die Reihe divergirt, insgesammt eine discrete Menge bestimmen, vielmehr können in jedem noch so kleinen Intervalle Divergenzstellen enthalten sein. Es bilden nur die Divergenzstellen mit unendlichen Werthen, oder mit Unbestimmtheitsgrenzen, deren Differenz grösser ist als δ, eine discrete Menge.

Bei einer in einem beliebigen Intervalle „im allgemeinen“ convergenten trigonometrischen Reihe ist $\lim a_k = 0$ *und* $\lim b_k = 0$ *für* $k = \infty$.

Für jede Stelle x, an welcher das Divergenzmass kleiner als δ gemacht werden kann, lässt sich auch eine untere Grenze für n angeben, so dass die Reihenglieder, deren Index gleich oder grösser ist als n, ihrem Betrage nach kleiner bleiben als δ. Da nun aber die Stellen, an denen das Divergenzmass grösser ist als δ, nur in discreter Menge vorhanden sind, so ist in beliebiger Nähe einer jeden Stelle des Intervalles ein Theilintervall von $x - \varepsilon$ bis $x + \varepsilon$ bestimmbar, in welchem kein Punkt gelegen ist, wo das Divergenzmass grösser bleibt als δ. Es lässt sich also ein Werth n finden, so dass für $k \geqq n$ die Glieder

$$\begin{aligned} a_k \sin k(x+\varepsilon) + b_k \cos k(x+\varepsilon) &= (a_k \sin kx + b_k \cos kx) \cos k\varepsilon \\ &\quad + (a_k \cos kx - b_k \sin kx) \sin k\varepsilon, \\ a_k \sin k(x-\varepsilon) + b_k \cos k(x-\varepsilon) &= (a_k \sin kx + b_k \cos kx) \cos k\varepsilon \\ &\quad - (a_k \cos kx - b_k \sin kx) \sin k\varepsilon \end{aligned}$$

ihrem Betrage nach kleiner werden als δ, wobei x einen Werth in beliebiger Nähe einer jeden Stelle, ε irgend einen Werth innerhalb der construirten Umgebung bezeichnet. Zu jedem Werthe von ε wird aber eine andere Grenze für n zu fixiren sein; es ist noch nicht gesagt, dass dieselbe Grenze n bei allen Werthen von ε ausreicht, um die Forderung zu erfüllen. Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erkennt man, dass auch die Beträge von

$$(a_k \sin kx + b_k \cos kx)\cos k\varepsilon \quad \text{und} \quad (a_k \cos kx - b_k \sin kx)\sin k\varepsilon$$

jedenfalls kleiner sein müssen als der Werth δ. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin kx \sin k\varepsilon$, die zweite mit $\cos kx \cos k\varepsilon$, so findet man durch Addition, dass

$$a_k \sin 2k\varepsilon \quad \text{und analog, dass auch} \quad b_k \sin 2k\varepsilon$$

jedenfalls kleiner sein müssen als 4δ, oder kurz gesagt, kleiner gemacht werden können als eine beliebig vorgegebene Zahl. Diese Forderung ist bei den verschiedenen Werthen, die ε annimmt, nicht erfüllbar, wenn die Coefficienten a_k und b_k stets grösser bleiben als diese vorgeschriebene Zahl. Denn unter den Werthen, welche $\sin 2k\varepsilon$ bei beliebig wachsenden Werthen von k erhält, kommen, da ε eine beliebig kleine aber von 0 verschiedene Grösse bezeichnet, immer solche vor, deren Betrag von der Einheit beliebig wenig unterschieden ist. Soll nämlich der Werth von $2k\varepsilon$ in beliebige Nähe eines ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ fallen, so muss

$$(2m+1)\frac{\pi}{2} - \delta' < 2k\varepsilon < (2m+1)\frac{\pi}{2} + \delta'$$

sein, d. h. es muss

$$(2m+1)\frac{\pi}{4\varepsilon} - \frac{\delta'}{2\varepsilon} < k < (2m+1)\frac{\pi}{4\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\varepsilon}$$

sein. Dieses Intervall enthält aber immer, wie gross auch m wird, eine ganze Zahl, falls $\frac{\delta'}{\varepsilon} > 1$, d. h. δ' grösser als die beliebig kleine Zahl ε gemacht wird. Für ein ε, welches beliebig klein ist, giebt es also in der Aufeinanderfolge der Werthe von $a_k \sin 2k\varepsilon$ und $b_k \sin 2k\varepsilon$ immer wieder Glieder, deren Betrag von dem der Grössen a_k und b_k beliebig wenig unterschieden ist. Mithin müssen bei einer „im allgemeinen“ convergenten trigonometrischen Reihe (auch wenn sie in jedem noch sô kleinen Intervalle Divergenzstellen enthält) die Coefficienten a_k und b_k mit wachsenden Werthen von k kleiner werden, als jede angebbare Zahl, d. h. $\operatorname{Lim} a_k = 0$ und $\operatorname{Lim} b_k = 0$ für $k = \infty$.

Wenn zwei in dem Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ „im allgemeinen“ convergente trigonometrische Reihen bis auf discrete Punkte übereinstimmen, d. h. wenn ihre Differenz eine trigonometrische Reihe bildet, welche im allgemeinen 0 ist und nur in discreten Punkten um mehr *als δ von Null abweichen könnte, oder falls sie divergirt nur in discreten Punkten Unbestimmtheitsgrenzen besitzen würde, deren Betrag grösser ist als δ, so sind die beiden Reihen auch der Form nach identisch, d. h. die entsprechenden Coefficienten sind einander gleich, und ihre Differenz ist durchweg* 0.

Die Differenz der beiden Reihen liefert eine Reihe mit schliesslich verschwindenden Coefficienten

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} c_k \sin kx + d_k \cos kx,$$

welche eine Function $f(x)$ definirt, die nur in discreten Punkten um eine angebbare Zahl von 0 verschieden sein, oder Unbestimmtheitsgrenzen besitzen könnte, deren Abweichung von 0 grösser ist als δ. Die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} d_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}$$

definirt eine stetige Function $F(x)$, welche, wie **Riemann** gezeigt hat, die Eigenschaft hat, dass erstlich

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = f(x)$$

an allen Stellen, wo $f(x)$ convergirt, und dass zweitens ohne Ausnahme

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta x=0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

wird. Mithin genügt die Function $F(x)$ den Bedingungen des Lehrsatzes 13. und ist eine lineare Function:

$$Cx + C' + \frac{1}{2} d_0 x^2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{c_k \sin kx + d_k \cos kx}{k^2}.$$

Da diese Gleichung bei allen Werthen von x bestehen muss, die rechte Seite aber eine periodische Function ist, so kann nur $C = d_0 = 0$ sein. Die unendliche Reihe rechts ist aber eine gleichmässig convergente, weil die Reihe

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k^2}$$

convergirt. Mithin kann man durch Integration zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, wobei die rechte Seite gliedweise integrirt werden darf, nachdem man beide Seiten zuvor mit $\sin lx$ und $\cos lx$ multiplicirt hat, leicht nachweisen, dass

$$C' = 0 \quad \text{und} \quad c_k = d_k = 0$$

werden, für alle Werthe von k, weil

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin \overline{kx}^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \overline{kx}^2 dx = \pi,$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos kx \, dx = 0,$$

(k und l ganze Zahlen). Diese letzten Gleichungen seien die Integraleigenschaften der trigonometrischen Functionen genannt.

Der bewiesene Lehrsatz macht auf ein besonderes Verhalten der trigonometrischen Reihen aufmerksam. Ist nämlich eine Function $f(x)$ im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ durch eine trigonometrische Reihe definirt, und wird dieselbe in discreten Punkten abgeändert, so existirt für diese neu gebildete Function keine andere trigonometrische Reihe als die ursprüngliche. Vielmehr muss diese als die einzig mögliche Darstellung der neuen Function durch eine trigonometrische Reihe betrachtet werden, obwohl die Function und die Reihe sich in unendlich vielen Punkten, allerdings nur in discreten, unterscheiden. Die trigonometrische Reihe ist in diesem Sinne Repräsentant einer ganzen Functionsclasse.

III.

Eine trigonometrische Reihe heisst eine Fourier'sche, wenn ihre Coefficienten von der Form sind:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx.$$

Dabei bedeutet $f(x)$ eine beliebige Function, die nur im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirbar sein muss. Damit aber eine mit diesen Coefficienten zusammengesetzte unendliche Reihe eine „im allgemeinen" convergente sein könne, muss nach dem ersten Satze des vorigen Artikels $\operatorname{Lim} a_k = 0$ und $\operatorname{Lim} b_k = 0$ werden, für $k = \infty$. Dieser Bedingung muss die Function $f(x)$ ebenfalls genügen.

Ich ersetze dieselbe zunächst durch die, wie sich zeigen wird, weniger umfassende Forderung: Es soll nicht nur $f(x)$, sondern auch $[f(x)]^2$ im nämlichen Intervalle integrirbar sein. Diese Bedingung ist von selber erfüllt, wenn $f(x)$ eine überall endliche Function ist; sie kann aber auch bestehen bleiben, wenn $f(x)$ unendlich wird; nur ist die Art des unendlich Werdens beschränkter.

Ist $f(x)$ eine nebst ihrem Quadrate integrirbare Function, so convergirt die Fourier'sche Reihe, deren Coefficienten die obige Form haben, nicht nur im allgemeinen, so dass $\operatorname{Lim} a_k$ *und* $\operatorname{Lim} b_k$ *gleich* 0 *sind, sondern sie convergirt auch im allgemeinen gleichmässig, so dass durch dieselbe eine integrirbare Function definirt ist.*

Diese zweite Behauptung wird durch den Beweis zugleich erläutert werden. Bezeichnet n eine beliebig grosse Zahl, so ist zufolge der Integraleigenschaften von sin und cos

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{f(x)-b_0-\sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx\right\}^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx - 2\pi b_0^2 - \pi\sum_{k=1}^{k=n} a_k^2 + b_k^2.$$

Die linke Seite ist, wie gross auch immer n gewählt wird, positiv, also kann auch die rechte Seite für noch so grosse Werthe von n nicht negativ werden. Es wird

$$2\pi b_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{k=n} a_k^2 + b_k^2$$

bei beliebig wachsenden Werthen von n nicht über den Werth $\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx$ hinausgehen. Stets kann man also n so bestimmen, dass

$$\sum_{k=n}^{k=n+m} a_k^2 + b_k^2$$

bei allen Werthen von m kleiner bleibt als eine beliebig kleine Grösse. Mithin ist auch $\operatorname{Lim} a_n$ und $\operatorname{Lim} b_n$ gleich 0. Zugleich ist der Satz bewiesen:

Die Coefficienten einer Fourier'schen Reihe, in welcher $f(x)$ eine nebst ihrem Quadrate integrirbare Function ist, convergiren derart nach 0, *dass*

$$\operatorname{Lim} a_n\sqrt{n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Lim} b_n\sqrt{n}$$

jedenfalls gleich 0 *werden.*

Das Resultat besagt aber noch mehr. Denn wird das Restglied der Fourier'schen Reihe von dem Gliede mit dem Index n bis zu dem Index $n+m$ durch $R_{n,m}$ bezeichnet, so ist

$$R_{n,m}=\sum_{k=n}^{k=n+m} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} R_{n,m}^2\,dx = \pi \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k^2 + b_k^2.$$

Das Restglied $R_{n,m}$ hat folglich die Eigenschaft, dass lediglich durch Wahl von n das Integral von $R_{n,m}^2$ kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine Zahl δ, und da dieses Integral nur positive Glieder enthält, so können die Stellen, an denen der Betrag von $R_{n,m}$ grösser als δ, etwa gleich oder grösser als eine endliche Zahl g bleibt, insgesammt nur ein Intervall h erfüllen, welches durch die Forderung

$$g^2 h < \delta \quad \text{also} \quad h < \frac{\delta}{g^2}$$

beschränkt ist. Convergirt δ mit n nach 0, so convergirt auch $h = 0$. Die Fourier'sche Reihe kann also nur in discreten Punkten ein endliches oder unendliches Divergenzmass besitzen; d. h. sie convergirt „im allgemeinen."

Sie convergirt aber auch „im allgemeinen gleichmässig." Die Convergenz einer Reihe in einem Intervalle heisst eine durchweg gleichmässige, wenn unabhängig von dem Werthe x zu jeder noch so kleinen vorgeschriebenen Zahl δ eine Stelle n bestimmt werden kann, so dass die Beträge aller Reste

$$R_{n,0},\ R_{n,1},\ R_{n,2},\ \cdots,\ R_{n,m},\ \cdots,\ R_{n,m+k}\ \cdots,$$

durch welche der Rest der Reihe von der n^{ten} Stelle ab: $R_{n,\infty}$ definirt ist, kleiner bleiben als δ. Gleichmässig convergente Reihen besitzen die wichtige Eigenschaft, dass sie (falls ihre Glieder integrirbar sind) gliedweise integrirt werden dürfen. Denn es ist auch zwischen beliebigen in das Intervall fallenden Grenzen x_0 und x_1 der Betrag von:

$$\int_{x_0}^{x_1} R_{n,0}\,dx,\ \int_{x_0}^{x_1} R_{n,1}\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} R_{n,2}\,dx,\ \cdots,\ \int_{x_0}^{x_1} R_{n,m}\,dx,\ \cdots,\ \int_{x_0}^{x_1} R_{n,m+k}\,dx,\ \cdots$$

kleiner als $\delta(x_1 - x_0)$, und folglich bildet das Integral der Summen bis zu den Gliedern mit dem Index $n-1,\ n,\ n+1\ \cdots$

$$\int_{x_0}^{x_1} S_{n-1}\,dx,\ \int_{x_0}^{x_1} S_n\,dx,$$

$$\int_{0}^{x_1} S_{n+1}\,dx,\ \cdots,\ \int_{x_0}^{x_1} S_{n+m}\,dx,\ \cdots,\ \int_{x_0}^{x_1} S_{n+m+k}\,dx\ \cdots$$

eine Aufeinanderfolge mit bestimmtem Grenzwerth, durch welche auch

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \lim_{n=\infty} S_n\, dx$$

definirt ist. Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn zwar $R_{n,m}$ nicht durchweg kleiner ist als δ für alle Werthe von x lediglich durch Wahl von n, wohl aber das zwischen beliebigen Grenzen genommene Integral. In diesem Falle sind die Stellen x, an denen der Betrag von $R_{n,m}$ grösser bleibt als eine bestimmte Zahl g, auf Intervalle beschränkt, deren Grösse determinirt ist, und welche für $n = \infty$ in eine discrete Punktmenge sich auflösen. Dass die Fourier'sche Reihe diese Integraleigenschaft besitzt, ist durch die obige Untersuchung aufgedeckt. Denn wenn $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} R_{n,m}^2\, dx < \delta$ wird, durch Wahl von n unabhängig von m, so wird auch $\int\limits_{x_0}^{x_1} R_{n,m}^2\, dx < \delta$, was nicht möglich wäre, falls nicht auch $\int\limits_{x_0}^{x_1} R_{n,m}\, dx$ unterhalb einer bestimmten durch δ bedingten Grenze läge. Denn es ist

$$\text{abs} \int\limits_{x_0}^{x_1} R_{n,m}\, dx \leqq \int\limits_{x_0}^{x_1} \text{abs}\,[R_{n,m}]\, dx.^{*)}$$

---

*) Es bietet sich hier Gelegenheit zu einer allgemeinen Bemerkung: Aus der Integrirbarkeit der absoluten Werthe einer Function in einem Intervalle folgt noch nicht die Integrirbarkeit der Function selbst. Denn hat man z. B. eine Function, welche in einem Intervalle $+1$ sein soll, an unendlich vielen Punkten dagegen, die so vertheilt sind, dass in jedem kleinsten Intervalle ein Punkt gelegen ist, den Werth -1 besitzt, so ist die Function nicht integrirbar, während die aus den absoluten Werthen gebildete integrirt werden kann. Umgekehrt aber ist der Satz richtig: Wenn eine überall endliche Function integrirbar ist, so ist dieses auch für die absoluten Werthe der Fall. Es besteht also hierin ein sehr wesentlicher Unterschied zwischen einem einfachen Integral und einer unendlichen Reihe, bei welcher gerade das Gegentheil gilt. Solche Unterschiede hängen immer damit zusammen, dass man ein Integral nicht als unendliche Summe von Gliedern $f(x)\Delta x$ definiren kann. Erst wenn die Existenz eines Integrales (als Grenzwerth einer Summe mit endlicher Gliederzahl) feststeht, treten gewisse Analogien mit der unendlichen Reihe auf.

Der besprochene Fall erscheint mir noch bemerkenswerther als der Unterschied zwischen successiven zweifachen Integralen und Doppelreihen, auf welchen Herr Thomae (Zeitsch. f. Math., Bd. 23, p. 67 und Elementare Theorie der analyt. Funct., p. 43) aufmerksam gemacht hat. Denn zwischen einer Doppelreihe und einem zweifachen Integrale, das nicht zugleich Doppelintegral ist, besteht überhaupt keinerlei Analogie.

Alle Stellen, an denen der Betrag von $R_{n,m}$ gleich oder grösser ist als eine endliche Zahl g, liefern im zweiten Integrale einen Beitrag, der kleiner ist als $\frac{\delta}{g}$; der Werth dieses Integrales ist also kleiner als $\frac{\delta}{g} + g(x_1 - x_0)$ und setzt man $g = \sqrt{\frac{\delta}{x_1 - x_0}}$, so erkennt man, dass dieser Werth kleiner ist als $2\sqrt{\delta(x_1 - x_0)}$.

Nachdem festgestellt ist, dass die Fourier'sche Reihe eine integrirbare Function definirt, handelt es sich darum den Werth $\varphi(x)$ derselben an jeder Stelle zu ermitteln. Der Weg dazu ist von Dirichlet vorgezeichnet.

Die Summe der Glieder bis zum Index n ist:

$$S_n = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\, d\alpha$$

und wird nach Summation der Cosinusreihe gleich:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\, d\alpha,$$

Dieses Integral zerlegt sich in zwei Theile:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\, d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\, d\alpha.$$

Der Grenzwerth der rechten Seite für $n = \infty$ ist zu ermitteln. Ist, wie ich zunächst immer voraussetze, $f(x)$ eine nebst ihrem Quadrate integrirbare Function, so wird das zweite Integral durch Wahl von n beliebig klein, und zwar unabhängig von dem Werthe x; es convergirt gleichmässig nach 0.

Im ersten Integrale hebe man ein beliebig kleines Intervall heraus von $\alpha = x - \delta$ bis $\alpha = x + \delta$; ausserhalb dieses Intervalles ist die Function

$$f(\alpha)\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}$$

nebst ihrem Quadrate integrirbar, und sonach convergirt auch

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{x-\delta}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,dx$$

bei festgehaltenem Werthe von δ gleichmässig nach 0.

Mithin bleibt nur noch das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-x)\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,dx$$

zu betrachten, und es ist der Satz bewiesen:

Der Werth der Fourier'schen Reihe an einer Stelle x hängt nur ab von dem Verhalten der Function f(x) in beliebig kleiner Umgebung dieser Stelle.

Das Integral geht durch die Substitution $\alpha - x = \beta$ über in die Form

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+\beta)\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

Der Grenzwerth dieses Integrales entscheidet unter allen Umständen über den Summenwerth $\varphi(x)$ der Reihe; und zwar wird die Fourier'sche Reihe gleichmässig nach diesem Werthe convergiren, wenn das Integral bei festgehaltenem Werthe von δ unabhängig von x lediglich durch Wahl von n seinem Grenzwerthe beliebig nahe gebracht werden kann.

Da die Function $f(x)$ integrirbar ist, so bilden alle Stellen, an denen die Function bestimmt unendlich oder unbestimmt wird zwischen Grenzen, deren Differenz grösser ist, als eine beliebig kleine Zahl, nur eine discrete Menge. (Punktuelle Unstetigkeiten der Function $f(x)$ braucht man überhaupt nicht zu berücksichtigen, weil dieselben auf die Coefficienten der Fourier'schen Reihe ohne Einfluss sind.)

Man schliesse nun alle Stellen vorerst von der Betrachtung aus, an denen die Grenzen von $\lim\limits_{\beta=0} f(x+\beta)$ unendlich werden, oder um mehr als die beliebig kleine Grösse δ von einander differiren, ebenso die Stellen, an denen dasselbe für $\lim\limits_{\beta=0} f(x-\beta)$ der Fall ist. Dagegen können die zu $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gehörigen Grenzen in discreten Punkten noch von einander abweichen.

Setzt man nun

$$f(x+\beta)\cos\tfrac{1}{2}\beta = [f(x+0)-\lambda(\beta)]\,2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\beta},$$

$$f(x-\beta)\cos\tfrac{1}{2}\beta = [f(x-0)-\mu(\beta)]\,2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\beta}$$

so sind $\lambda(\beta)$ und $\mu(\beta)$ stetige Functionen, deren Unbestimmtheitsgrenzen für $\beta=0$ kleiner werden als δ. Man hat demnach

$$\frac{1}{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta - \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\lambda(\beta)+\mu(\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

zu untersuchen. Es ist

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lim_{n=\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}$$

also wird:

$$\varphi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} - \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

$$-\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \mu(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Es lässt sich nun leicht vermittelst des zweiten Mittelwerthsatzes der einfachste Fall erledigen, wenn nämlich die Function an der Stelle x der sogenannten Dirichlet'schen Bedingung genügt. Dieselbe besagt, dass in der Umgebung der Stelle x beiderseits nicht unendlich viele Maxima und Minima gelegen sind. Alsdann sind $f(x+0)$ und $f(x-0)$ bestimmte (von einander möglicherweise auch verschiedene) Werthe, und das Integrationsintervall von 0 bis δ kann so klein gewählt werden, dass die Functionen $\lambda(\beta)$ und $\mu(\beta)$ über einen bestimmten Betrag nicht herausgehen und stetig fortwährend entweder ab- oder zunehmend nach Null convergiren.

Den zweiten Mittelwerthsatz benutze ich in seiner einfachsten von Bonnet ausgesprochenen Form: Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ integrirbar, ist ferner die Function $f(x)$ im Integrationsintervalle von a bis b eine stetige (entweder positive oder negative) Grösse, deren Beträge nur abnehmen, so besteht die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\Theta(b-a)} \varphi(x)\,dx, \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

Durch Umkehrung der Grenzen erhält man, wenn die Beträge wachsen, während x das Intervall von a bis b durchläuft, die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(b)\int_{a+\Theta(b-a)}^b \varphi(x)\,dx.$$

Demnach ist unter der obigen Annahme:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{\Theta\delta}^{\delta} \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{n\Theta\delta}^{n\delta} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta,$$

$$\int_0^\delta \mu(\beta)\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \mu(\delta)\int_{\Theta\delta}^{\delta} \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \mu(\delta)\int_{n\Theta\delta}^{n\delta} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Diese letzten Integrale bleiben, wie gross auch n werden mag, unabhängig von Θ immer endlich, während $\lambda(\delta)$ und $\mu(\delta)$ beliebig klein werden. *Es ist sonach bewiesen, dass, nachdem man über δ in passender Weise verfügt hat, der Werth von $\varphi(x)$ beliebig wenig von $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ unterschieden ist; d. h.*

$$\varphi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Zugleich ersieht man, dass die Fourier'sche Reihe durchweg gleichmässig convergirt, wenn die Function $f(x)$ durchweg stetig ist, und dabei nirgends unendlich viele Maxima und Minima hat.

Denn in diesem Falle lässt sich der Werth von δ so wählen, dass bei allen Werthen von x die Beträge von $\lambda(\delta)$ und $\mu(\delta)$ kleiner sind als eine bestimmt gewählte, beliebig kleine Grösse.

Wenn aber die Function $f(x)$ nur sprungweise Unstetigkeiten erleidet in discreten Punkten, so umschliesse man dieselben mit beliebig kleinen Intervallen. Nach Ausschluss dieser Stellen convergirt die Reihe gleichmässig.

In diesen Untersuchungen ist der Beweis des Satzes enthalten:

$$\lim_{n=\infty}\int_0^h f(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0),$$

wenn $f(x)$ in der Umgebung der 0 Stelle stetig ist und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt; ausserdem aber im ganzen Intervalle nebst seinem Quadrate integrirbar bleibt. Denn es ist

$$\int_0^h \{f(x)-f(0)\}\frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^\varepsilon \{f(x)-f(0)\}\frac{\sin nx}{x}\,dx + \int_\varepsilon^h \{f(x)-f(0)\}\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Man kann nun erst ε so klein wählen, dass das erste Integral, wie gross auch immer n wird, beliebig klein bleibt, und alsdann verschwindet der Limes des zweiten Integrales, weil $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ nebst seinem Quadrate integrirbar ist.

Die Grenzstellen des Intervalles, $x=+\pi$ und $x=-\pi$, bedürfen noch einer kurzen Bemerkung. An der Stelle $x=+\pi$ wird

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha-\pi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\pi)}\,d\alpha$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}$$

oder, wenn im ersten Integrale $\alpha+\pi=\beta$, im zweiten $\alpha-\pi=\beta$ gesetzt wird,

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(-\pi+\beta)\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^0 f(\pi+\beta)\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

Falls nun $\lim\limits_{\delta=0} f(-\pi+\delta)$ und $\lim\limits_{\delta=0} f(\pi-\delta)$ bestimmte Grenzwerthe besitzen, ohne dass in die Umgebungen dieser Stellen unendlich viele Maxima und Minima fallen, so ist das erste Integral gleich $\frac{1}{2}f(-\pi)$, das zweite $\frac{1}{2}f(+\pi)$. Also wird

$$\varphi(+\pi) = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{f(-\pi)+f(+\pi)}{2} = \varphi(-\pi).$$

Die gleichmässige Convergenz besteht auch in der Umgebung der Endpunkte, wenn noch $f(+\pi)=f(-\pi)$ wird.

Es bleibt das Problem übrig, das Verhalten der Fourier'schen Reihe an den Stellen zu untersuchen, an welchen die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen oder verschwindenden Schwankungen besitzt, sowie überhaupt integrirbare Functionen, die in beliebiger Weise unendlich werden. Beide Fragen, die, wie sich zeigen wird, aufs engste zusammengehören, sollen erst später erörtert werden, nachdem ein allgemeiner Satz für die durch die Fourier'sche Reihe definirte Function $\varphi(x)$ unter der bisherigen Einschränkung auf die Integrirbarkeit von $[f(x)]^2$ festgestellt ist.

IV.

Wird die nebst ihrem Quadrate integrirbare Function an einer discreten Menge von Stellen beliebig abgeändert, so ändern sich die Coefficienten der Fourier'schen Reihe gar nicht. Demnach wird man von vornherein nicht verlangen können, dass der Werth $\varphi(x)$ der Reihe ausnahmslos mit dem Werthe $f(x)$ übereinstimmt, weil in dem Werthe von $f(x)$ eine gewisse Willkürlichkeit steckt, die ohne Einfluss ist auf die Reihe. Dadurch wird, wie schon am Schlusse des zweiten Artikels für trigonometrische Reihen überhaupt hervorgehoben wurde, die folgende Definition begründet:

Eine Fourier'sche Reihe stellt eine Function $f(x)$ „im allgemeinen“ dar, wenn die Stellen, an denen der Werth der Reihe (resp. die Unbestimmtheitsgrenzen dieses Werthes) von den Werthen der Function $f(x)$ (resp. den Unbestimmtheitsgrenzen dieses Werthes) um mehr als eine beliebig kleine Grösse δ abweichen, stets nur eine discrete Menge bilden.

Auf Grund dieser Definition lässt sich nun der Satz aufstellen: *Die Fourier'sche Reihe, deren Coefficienten gebildet sind als Integrale einer nebst ihrem Quadrate integrirbaren Function $f(x)$, stellt auch diese Function im allgemeinen dar.*

Es wurde festgestellt, dass an den Stellen, an welchen $\operatorname{Lim} f(x+0)$ und $\operatorname{Lim} f(x-0)$ bestimmte von einander verschiedene Werthe besitzen, ohne unendlich viele Oscillationen, die Reihe den Werth $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ annimmt. Da aber $f(x)$ integrirbar ist, so bilden diese Stellen, wenn der Unterschied der beiden Werthe grösser sein soll als δ, nur eine discrete Menge; sie hindern also nicht „die Darstellung im allgemeinen.“ Ferner sind auch die Stellen, an denen $f(x \pm h)$ in bestimmter oder unbestimmter Weise unendlich wird, oder unendlich viele Maxima und Minima mit endlichen Schwankungen erhält, nur in discreter Menge vorhanden; es wird also auch dann noch nicht die Darstellung im allgemeinen aufgehoben, wenn an allen diesen Stellen die Fourier'sche

Reihe ein beliebiges endliches, unenendlich grosses oder verschwindendes Divergenzmass erhält.

Aber die Oscillationen mit verschwindenden Differenzwerthen können, ohne dass die Integrirbarkeit von $f(x)$ aufhört, in jedem kleinsten Intervalle vorhanden sein. Wenn nun die Fourier'sche Reihe an allen diesen Stellen von dem Werthe $f(x)$ sich um eine angebbare Grösse unterschiede, würde die Darstellung im allgemeinen nicht bestehen. Dass aber dieses nicht der Fall ist, kann man in indirecter Weise einsehen, indem man die Gültigkeit der obigen Behauptung folgendermassen beweist. Aus der Gleichung:

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

wobei $\varphi(x)$, wie bewiesen wurde, eine integrirbare Function ist, und die Reihe rechts gliedweise integrirt werden darf, folgt, wenn die die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ durch $g(x)$ bezeichnet wird

$$f(x) - \varphi(x) = g(x) = f(x) - b_0 - \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\}\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} \sin kx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos kx\, dx = 0.$$

Die Differenz $f(x) - \varphi(x) = g(x)$ ist also so beschaffen, dass alle diese Integrale, welchen Werth auch k hat, verschwinden. Daraus folgt, dass $g(x)$ „im allgemeinen" Null ist, d. h. dass die Stellen, an denen der Werth von $g(x)$ (resp. seinen Unbestimmtheitsgrenzen) dem Betrage nach grösser ist als δ, stets nur eine discrete Menge bilden.

Man betrachte nämlich innerhalb des Intervalles von $-\pi$ bis $+\pi$ ein beliebig kleines Intervall von x_0 bis x_1, und construire eine Function $\psi(x)$, die in diesem Intervalle den Werth 1, ausserhalb desselben den Werth 0 hat. Diese Function ist nach dem Dirichlet'schen Satze des vorigen Artikels durch eine Fourier'sche Reihe ausdrückbar, welche im allgemeinen gleichmässig convergirt, und überall bis auf die Sprungstellen mit dem Werthe $\varphi(x)$ übereinstimmt. An den Sprungstellen hat die Reihe den Werth $\frac{1}{2}$.

$$\psi(x) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \sin kx + \beta_k \cos dx$$

$$\left(\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1} \sin kx\, dx \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_1} \cos kx\, dx\right).$$

Es ist demnach

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(x)\, g(x)\, dx = \beta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\, dx + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx\, dx$$
$$+ \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos kx\, dx = 0,$$

also auch

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx = 0.$$

Wenn nun das Integral von $g(x)$ zwischen beliebigen noch so nahen Grenzen 0 ist, so muss auch $g(x)$ im allgemeinen 0 sein. Denn zufolge der Integrirbarkeit von $g(x)$ lässt sich in beliebiger Nähe einer jeden Stelle x ein Intervall von $x + \varepsilon$ bis $x + \varepsilon'$ angeben, in welchem die Werthe der Function $g(x)$ um weniger als eine beliebige Zahl δ differiren. Es ist nun

$$\int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon'} g(x)\, dx = \{g(x + \varepsilon) \pm (< \delta)\}\, (\varepsilon' - \varepsilon) = 0,$$

d. h. der Betrag von $g(x + \varepsilon)$ ist kleiner als δ. Damit ist bewiesen, dass in beliebiger Nähe einer jeden Stelle ein Intervall angebbar ist, in welchem der Betrag der integrirbaren Differenz $f(x) - \varphi(x)$ kleiner bleibt als eine beliebig kleine Grösse, so dass sämmtliche Stellen, an denen dieser Betrag grösser wird als δ, nur eine discrete Punktmenge bilden.

Aus diesem Satze lassen sich zwei wichtige Folgerungen ziehen:

1. *Jede trigonometrische Reihe, durch welche eine nebst ihrem Quadrate integrirbare Function definirt ist, ist eine Fourier'sche Reihe.*

Denn ist $f(x)$ der Summenwerth der trigonometrischen Reihe, so würde die Fourier'sche Reihe, gebildet durch die Integrale von $f(x)$, eine Function $\varphi(x)$ bestimmen, die nur in discreten Punkten von $f(x)$ um eine angebbare Grösse sich unterscheiden könnte. Die Differenz der beiden Reihen ist eine trigonometrische Reihe, die „im allgemeinen“ den Werth 0 hat, und welche nach dem zweiten Satze des Artikels II. verschwindende Coefficienten haben muss.

2. Eine durchweg stetige Function ist bekanntlich (Lehrsatz 1.

Artikel I.) vollkommen bestimmt, wenn ihre Werthe bis auf discrete Punkte gegeben sind. Ist nun $f(x)$ eine durchweg stetige Function (was nicht ausschliesst, dass sie an unendlich vielen Stellen in jedem kleinsten Intervalle unendlich viele Maxima und Minima besitzt), so braucht die Fourier'sche Reihe nicht eine durchweg stetige Function $\varphi(x)$ zu liefern, aber sie liefert eine im allgemeinen stetige, d. h. nach Ausschluss der discreten Punkte, an welchen die Werthe von $\varphi(x)$ um mehr als eine beliebig kleine Grösse δ von $f(x)$ differiren. Ist x solch eine Ausnahmestelle, so stimmt der Werth von $\varphi(x)$ dann mit $f(x)$ überein, wenn man ihn als $\lim\limits_{\varepsilon=0} \varphi(x \pm \varepsilon)$ definirt. Es wird später festgestellt werden, dass der Werth von $\varphi(x)$ von dem Werthe der stetigen Function $f(x)$ um eine angebbare Grösse nur dann differirt, wenn die Fourier'sche Reihe an dieser Stelle divergirt; überall, wo sie convergirt, ist ihr Werth gleich $f(x)$.

Die Aufeinanderfolge der Werthe von $\varphi(x \pm \varepsilon)$ ist also, während ε nach 0 convergirt, so geartet, dass an discreten Punkten sprungweise Unbestimmtheiten eintreten können. Nach Auslassung dieser Werthe ist $\lim \varphi(x \pm \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ in der That eine bestimmte Grösse. Sonach wird der Satz bewiesen sein:

Ist $f(x)$ eine durchweg stetige Function, so liefert die mit den Integralen von $f(x)$ gebildete Fourier'sche Reihe allenthalben den Werth $f(x)$, wenn man an den Stellen x, an welchen die Reihe divergirt, und diese Stellen können nur in discreter Menge vorhanden sein, den Werth der Reihe als

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{n=\infty} \left[b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin k(x \pm \varepsilon) + b_k \cos k(x \pm \varepsilon) \right]$$

definirt.

Damit ist eine bestimmte Festsetzung gegeben, bei welcher die Fourier'sche Reihe doch schliesslich zur ausnahmslosen Darstellung einer stetigen Function ausreichend ist.

V.

In den Untersuchungen der beiden vorigen Artikel erschien die zur Convergenz „im allgemeinen" nothwendige Eigenschaft des Verschwindens von $\lim a_n$ und $\lim b_n$ für $n = \infty$ als eine Folgerung aus der Integrirbarkeit von $[f(x)]^2$. Lassen wir aber diese Voraussetzung fallen, betrachten also eine Function, die in discreten Punkten derart unendlich wird, dass ihr Quadrat nicht mehr integrirbar ist, so muss die bisherige Annahme direct durch die umfassendere ersetzt werden: die integrirbare Function $f(x)$ muss so beschaffen sein, dass

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0.$$

Man kann diese Forderung auf die Intervalle reduciren, welche Unendlichkeitspunkte (auch unendlich viele) enthalten, da sie ausserhalb dieser Intervalle von selber erfüllt ist. Bezeichnet $c - \delta$ bis $c + \delta$ ein solches Intervall (und es kann, wenn δ beliebig klein gewählt wird, auch beliebig viele derselben geben), so muss nicht nur

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \, dx$$

durch Wahl von δ beliebig klein werden, sondern es muss auch

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \sin nx \, dx \quad \text{und} \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \cos nx dx,$$

welchen Werth auch δ haben mag, verschwinden.

Diese zur Convergenz nothwendigen Voraussetzungen sind auch hinreichend. Nachdem man alle Unendlichkeitsstellen in Intervalle von beliebiger Kleinheit eingeschlossen hat, construire man eine Function $\varphi(x)$, welche ausserhalb dieser Intervalle den Werth $f(x)$, in denselben aber den Werth 0 hat. Solch eine Function $\varphi(x)$ ist „im allgemeinen“ durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar; dieselbe werde durch

$$\varphi(x) = b_0' + \sum_{k=1}^{k=n} a_k' \sin kx + b_k' \cos kx + R_n'(x)$$

bezeichnet, wobei R_n' das Restglied bedeutet. Nun bilde man mit der Function $f(x)$ die ersten Glieder einer Fourier'schen Reihe und setze:

$$\psi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

so soll bewiesen werden, dass mit wachsenden Werthen von n $\psi(x)$ im allgemeinen nach dem Werthe $\varphi(x)$ convergirt, für diejenigen Werthe von x nämlich, welche ausserhalb der construirten Intervalle $c - \delta$ bis $c + \delta$ sich befinden. Es wird

$$\varphi(x) - \psi(x) = (b_0' - b_0) + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k' - a_k) \sin kx + (b_k' - b_k) \cos kx + R_n'(x)$$

und es sind die Differenzen $a_k' - a_k$ und $b_k' - b_k$ gleich den negativen Werthen der Integrale erstreckt über die Unendlichkeitsintervalle. Ich schreibe das kurz

$$\varphi(x)-\psi(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(\alpha)dx-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(\alpha)\cos k(\alpha-x)\,d\alpha+R_n'(x)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,d\alpha+R_n'(x),$$

wobei nur in Erinnerung zu behalten ist, dass auf der rechten Seite eigentlich eine Summe von Integralen steht, entsprechend den verschiedenen Unendlichkeitsintervallen. Aus der Voraussetzung geht hervor, dass, wenn x eine Grösse ist, die nicht im Unendlichkeitsintervalle liegt, auch

$$\mathrm{Lim}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(\alpha)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\sin n(\alpha-x)\,d\alpha \quad\text{und}\quad \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha$$

für $n=\infty$ verschwinden. Es convergirt also die rechte Seite für jedes x ausserhalb der beliebig kleinen Unendlichkeitsintervalle nach 0, d. h.

Die Fourier'sche Reihe stellt den Werth von $f(x)$ im allgemeinen dar, sobald die Integrale

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad\text{und}\quad \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

für $n=\infty$ verschwinden.

Das Verschwinden der Integrale a_n und b_n folgt aus der Integrirbarkeit von $f(x)$, sobald das Integral

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

ein absolut convergentes ist, d. h. falls es auch convergirt, wenn man für $f(x)$ seine absoluten Werthe setzt. Denn alsdann kann das Verschwinden so nachgewiesen werden, dass man die Zerlegung vollzieht:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{c-\delta}+\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta}+\int\limits_{c+\delta}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Das mittlere Integral ist, wie gross auch n wird, seinem absoluten Werthe nach kleiner als

$$\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \mathrm{abs}\,[f(x)]\,dx$$

und kann durch Wahl von δ beliebig verkleinert werden; die beiden anderen verschwinden für $n = \infty$.

Ist also $f(x)$ eine absolut integrirbare Function, so ist $f(x)$ durch eine Fourier'sche Reihe im allgemeinen darstellbar.

Die Forderung der absoluten Convergenz ist von selbst erfüllt, sobald $f(x)$ in bestimmter Weise unendlich wird. Denn das Unendlichwerden in bestimmter Weise an einer Stelle c erfordert, dass sich in der Umgebung dieser Stelle ein Intervall angeben lässt, in welchem die Function nicht mehr ihr Zeichen wechselt. Daher kann man den specielleren Satz formuliren:

Wird die integrirbare Function in discreten Punkten nur in bestimmter Weise unendlich, so ist sie durch eine Fourier'sche Reihe im allgemeinen darstellbar.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass nach Ausschluss der Unendlichkeitspunkte durch beliebig kleine Intervalle die Convergenz der Fourier'schen Reihe eine im allgemeinen gleichmässige bleibt. Zwischen zwei Grenzen, die keinen Unendlichkeitspunkt einschliessen, kann die Reihe gliedweise integrirt werden. Eine allgemeinere Regel für die Integration wird im Artikel VIII. gegeben werden.

VI.

Die zur Convergenz einer Fourier'schen Reihe als nothwendig und hinreichend erkannte Eigenschaft

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

ist aber auch als Folgerung aus der Integrirbarkeit von $f(x)$ abzuleiten, wenn die Function $f(x)$ von vornherein durch eine trigonometrische Reihe überhaupt definirt ist, von der noch nicht bekannt ist, ob sie eine Fourier'sche ist. Auf Grund der Riemann'schen Untersuchungen lässt sich diese Behauptung leicht nachweisen.

Denn lautet die Definitionsgleichung

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

wobei die Coefficienten nicht als Integrale gegeben sind, und ist $f(x)$ eine integrirbare Function, so ist erstlich auch $\operatorname{Lim} a_n = 0$ und $\operatorname{Lim} b_n = 0$; denn die Reihe muss „im allgemeinen" convergiren. Bildet man nun weiter:

$$F\,(x) = \frac{1}{2}\,b_0\,x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2}$$

und
$$F_1(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} d\alpha \int\limits_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\,d\beta = \int\limits_{-\pi}^{x} f(\beta)\,(x-\beta)\,d\beta,$$

so ist $F(x) - F_1(x)$ eine Function, von welcher Riemann gezeigt hat, dass sie den Bedingungen des Lehrsatzes 14. Zusatz im Artikel I. genügt; folglich eine lineare Function. Es besteht also die Gleichung

$$F_1(x) + C + C'x = \int\limits_{-\pi}^{x} f(\beta)\,(x-\beta)\,d\beta + C + C'$$
$$= \frac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2}.$$

Da das zweite Glied der rechten Seite eine periodische Function ist, so ist:

$$F_1(x+2\pi) + C + C'(x+2\pi) - \frac{1}{2} b_0 (x+2\pi)^2 = F_1(x) + C + C'x - \frac{1}{2} b_0 x^2$$

oder:

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) - 2C'\pi + b_0(2x\pi + 2\pi^2),$$

und für $x = -\pi$ folgt, weil $F_1(-\pi)$ gleich 0 ist, die Relation:

$$F_1(\pi) = -2C'\pi.$$

Aus derselben Gleichung findet man durch Differentiation nach x:

$$F_1(x+2\pi) = F_1'(x) + 2b_0\pi \text{ und für } x = -\pi : F_1'(\pi) = 2b_0\pi.$$

Durch Multiplication mit $\sin kx$ oder $\cos kx$ und durch gliedweise Integration der rechten Seite ergeben sich aus der obigen Gleichung die Relationen:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (F_1(x) + C + C'x) \sin kx\,dx = -\frac{1}{k^2} a_k \pi,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (F_1(x) + C + C'x) \cos kx\,dx = -\frac{1}{k^2} b_k \pi + (-1)^k \cdot \frac{2b_0}{k^2} \pi.$$

$F_1(x)$ ist differentiirbar, und demnach wird das erste Integral gleich:

$$\left[-\frac{\cos kx}{k}(F_1(x) + C + C'x)\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (F_1'(x) + C') \cos kx\,dx$$

$$= \left[-\frac{\cos kx}{k}(F_1(x) + C + C'x)\right]_{-\pi}^{+\pi} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}(F_1'(x) + C')\right]_{-\pi}^{+\pi}$$
$$- \frac{1}{k^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx.$$

Da die Werthe in den Klammern verschwinden, so ist

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx \quad \text{und ebenso} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx.$$

Sonach lautet der allgemeinste Satz: *Jede trigonometrische Reihe, welche eine integrirbare Function definirt, ist eine Fourier'sche Reihe;* oder auch: *Eine integrirbare Function kann, wenn sie überhaupt durch eine trigonometrische Reihe im allgemeinen darstellbar ist, nur durch eine Fourier'sche Reihe dargestellt werden.*

Es ist also das von Riemann (Art. 13.) angeführte Beispiel einer integrirbaren Function, welche keine Entwickelung in eine Fourier'sche Reihe zulässt, zugleich ein Beispiel für eine Function, welche nicht durch eine trigonometrische Reihe überhaupt dargestellt werden kann, es sei denn, dass man in einem beliebig kleinen aber doch endlichen Intervalle in der Umgebung der Unendlichkeitsstelle die Function abändert.

Durch die Riemann'sche Untersuchung ist aber ferner bewiesen: *Wenn die Fourier'sche Reihe an einer Stelle, an welcher* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *einen bestimmten Werth hat, überhaupt convergirt, so convergirt sie auch immer nach diesem Werthe.*

Denn es besitzt die Fourier'sche Reihe an jeder Stelle, wo sie convergirt, den Werth

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x)}{\Delta x^2},$$

und dieser Werth ist $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, zufolge der Gleichung:

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) - 2F(x) + F(x-\Delta x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(\beta)(x+\Delta x-\beta)\, d\beta \\ &\quad - \int_{x-\Delta x}^{x} f(\beta)(x-\Delta x-\beta)\, d\beta \\ &= \int_0^{\Delta x} [f(x+\alpha)+f(x-\alpha)](\Delta x-\alpha)\, d\alpha \\ &= [f(x+\Theta\alpha)+f(x-\Theta\alpha)]\frac{\Delta x^2}{2}, \end{aligned}$$

selbst wenn $f(x+0)$ und $f(x-0)$ einzeln betrachtet keinen bestimmten Werth repräsentiren.

Umgekehrt ist es wohl möglich, und solche Beispiele sind von Hrn. du Bois-Reymond gebildet worden, dass die Fourier'sche Reihe an einer Stelle x convergirt, während die erzeugende Function $f(x+\delta)+f(x-\delta)$ für $\delta=0$ unbestimmt wird. Es sind solche Fälle den in der Integralrechnung auftretenden analog, wo der Differentialquotient des Integrales einen bestimmten Werth hat, während die zu integrirende Function an derselben Stelle unbestimmt wird.

Endlich ist noch zu bemerken, dass man die vorstehenden Sätze dieses und des vorigen Artikels auch ausdehnen kann auf Functionen, die nicht schlechthin integrirbar sind, falls nur singuläre Werthe der Integrale existiren. Der einfachste Fall dieser Art ist der folgende zuerst von Riemann angeführte. Das sogenannte Hauptintegral

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx = \int_0^\delta [f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha$$

kann einen bestimmten endlichen Werth ergeben, der für $\delta=0$ nach 0 convergirt, während $f(x)$ an der Stelle c ohne unendlich viele Maxima und Minima so unendlich wird, dass die Function $f(x)$ nicht integrirbar ist. Jedenfalls muss aber dann $[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,\alpha$ gleich 0 sein.

Wenn dieses der Fall ist, und es verschwinden ausserdem auch:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\sin n(x-c)\,dx$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_0^\delta [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\cos n(x-c)\,dx$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\int_0^\delta [f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha,$$

so gelten alle früheren Sätze für die Function $f(x)$, wenn man bei der Berechnung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe die Werthe der Hauptintegrale benutzt. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn die Producte $\alpha f(c+\alpha)$ und $\alpha f(c-\alpha)$ einzeln nach 0 convergiren; und diese Forderung ist auch nothwendig. Denn weil die Function $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ absolut integrabel ist, so ist auch

$$\operatorname{abs}\int_0^\delta [f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha < \int_0^\delta \operatorname{abs}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha$$

wie gross auch immer n wird. Also kann das zweite der obigen

Integrale bei allen Werthen von n lediglich durch Wahl von δ beliebig klein werden. Und da nun auch

$$\int_0 [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)] \sin n\alpha \, dx = \int_0^{\delta} [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)] \, \alpha \, \frac{\sin n\alpha}{\alpha} \, dx$$

beliebig klein werden soll, so sagt das nach Artikel III. aus, dass die Function $[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\,\alpha$, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig verschwinden muss. Es ist also Lim

$$[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,\alpha \quad \text{und} \quad [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\,\alpha$$

gleich 0, woraus die Behauptung hervorgeht.

Wird also die Function in einzelnen oder auch unendlich vielen discreten Punkten ohne Oscillationen so unendlich, dass ihre Integrirbarkeit beeinträchtigt ist, so ist diese Function doch noch durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar, falls in der Umgebung solcher Unendlichkeitspunkte $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ *auch für* $\alpha = 0$ *integrirbar bleibt, und ausserdem* $\alpha f(c+\alpha)$ *und* $\alpha f(c-\alpha)$ *verschwinden. Die Coefficienten der Reihe sind aus der Formel zu berechnen:*

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{c-\delta} f(x) \sin nx \, dx + \sin nc \int_0^{\delta} [f(c+\alpha)+f(c-\alpha)] \cos n\alpha \, d\alpha$$

$$+ \cos nc \int_0^{\delta} [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)] \sin n\alpha \, d\alpha + \int_{c+\delta}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

und analog für b_k.*)

VII.

Für das Verhalten der Reihe an einer einzelnen Stelle ist, wie im Artikel III. gezeigt wurde, nur das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x+\beta) \sin n\beta \, \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} \, d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+\beta)+f(x-\beta)] \sin n\beta \, \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{2 \sin \frac{1}{2}\beta} \, d\beta$$

massgebend. Nun ist aber $\cos \frac{1}{2}\beta \, \frac{\beta}{2 \sin \frac{1}{2}\beta}$ eine stetige Function von β, die für $\beta = 0$ eins ist, und in dem beliebig kleinen Intervalle von 0 bis δ positive und abnehmende Werthe hat. Man kann daher direct nach dem Bonnet'schen Satze das einfachere Integral

---

*) Dieser Satz ist meines Erachtens eine der weitesten Bedingungen, die man aufstellen kann für Functionen, die ohne Maximis und Minimis unendlich werden. Vergleiche eine gegentheilige Bemerkung v. Hrn. du Bois-Reymond: Journal f. Math. Bd. 79, pag. 45. Auf einem völligen Missverständniss beruht die Be-

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

substituiren. Setzt man also, unter der Voraussetzung, dass

$$f(x+0)+f(x-0)$$

einen bestimmten Werth hat, die Differenz

$$[f(x+\beta)+f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)] = \lambda(\beta),$$

so convergirt die Fourier'sche Reihe nur dann nach dem Werthe

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = 0$$

wird.

Die werthvollen und umfassenden Untersuchungen, welche Herr du Bois-Reymond über die Bedingungen für die Convergenz dieses Integrales und deren Nothwendigkeit angestellt hat, sollen hier nicht discutirt werden, und lassen sich wohl auch schwerlich durch einfachere Betrachtungen ersetzen. Nur auf einige Sätze, die unmittelbar aus dem gebildeten Ausdrucke hervorgehen, und für die Frage nach der Differentiation und Integration der Fourier'schen Reihe unerlässlich sind, will ich hier eingehen.

Ist der Quotient $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ integrirbar, so sagt diese Bedingung zugleich aus, dass für die Function $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ in der Umgebung der 0 Stelle eine Fourier'sche Reihenentwicklung existirt, die aber nicht für $\lambda = 0$ zu convergiren braucht. Es lassen sich dann ohne Weiteres die im Artikel V. gefundenen Sätze anwenden:

Die Fourier'sche Reihe convergirt an einer Stelle, an welcher $\lambda(\beta)$, *auch wenn es unendlich viele Maxima und Minima enthält, so beschaffen ist, dass der Quotient* $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ *in der Umgebung der Nullstelle absolut integrirbar ist.*

Diese Bedingung enthält die von Hrn. Lipschitz aufgestellte:

---

merkung des Hrn. Sachse: „Versuch einer Geschichte der Darstellung etc. Zeitschrift f. Math. Jahrgang 25. Suppl. pag. 253; denn es handelt sich hier gar nicht um bedingte oder unbedingte Convergenz. Wiewohl diese Abhandlung überhaupt von principiellen Irrthümern nicht frei ist, so ist sie doch zu einer Orientirung über die Probleme in der Theorie der trigonometrischen Reihen brauchbar.

Die Fourier'sche Reihe convergirt, wenn der Betrag von $\lambda(\beta)$ stets kleiner bleibt als das Product $C\beta^\alpha$, wobei C eine Constante, α eine beliebige noch so kleine Potenz bedeutet.

Insbesondere ist die Bedingung erfüllt, wenn

$$\frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} - \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{\beta}$$

für $\beta = 0$ endlich bleibt; also auch *wenn die Function $f(x)$ an der Stelle x endliche Werthe des vorwärts und des rückwärts genommenen Differentialquotienten besitzt.*

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern: Besitzt die Function $\lambda(\beta)$ im Intervalle von 0 bis δ eine integrirbare Ableitung $\lambda'(\beta)$, so ist nach der Regel der theilweisen Integration:

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Ist nun $\lambda'(\alpha)$ absolut integrirbar, so ist, weil der Betrag von $\int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy$ stets kleiner bleibt als $\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy$,

$$\operatorname{abs}\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy < \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy \int_0^\delta \operatorname{abs}\,[\lambda'(y)]\,dy.$$

Die rechte Seite kann durch Wahl von δ beliebig klein gemacht werden, und folglich ist auch, weil

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_\delta^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

sicherlich gleich Null wird, wie klein auch immer δ gewählt ist, falls in dem Intervalle von δ bis h keine Unendlichkeitsstellen der Function $\lambda(\beta)$ gelegen sind,

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_0^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

beliebig klein, d. h. gleich Null. Damit ist bewiesen:

Ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ für jeden Werth von x eine stetige Function von β ist, die eine absolut integrirbare Ableitung nach β besitzt, so convergirt die Fourier'sche Reihe allenthalben ausnahmslos nach dem Werthe

$$\tfrac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

VIII.

Die letzten Sätze dieses und des vorigen Artikels setzen uns in den Stand Regeln für die Differentiation und Integration trigonometrischer Reihen aufzustellen. Ich werde dieselben indessen nicht in der Allgemeinheit aussprechen, die man denselben auf Grund der vorangehenden Resultate geben kann, da die Formulirung sonst allzu complicirt wird.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ durchweg stetige Function, welche durch eine im allgemeinen convergente trigonometrische Reihe

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

dargestellt ist. Von dieser Function sei bekannt, dass sie einen integrirbaren (vor- oder rückwärts genommenen) Differentialquotienten besitzt. Derselbe sei absolut integrirbar. (Insbesondere also durchweg endlich, oder in discreten Punkten bestimmt unendlich.) Dann folgt aus den früheren Sätzen zweierlei. Erstlich nämlich, dass die Reihe für $f(x)$ allenthalben ohne Ausnahme den Werth

$$\int^{x} f'(x)\,dx$$

liefert, zweitens dass auch die Function $f'(x)$ durch eine Fourier'sche Reihe im allgemeinen darstellbar ist. Diese Reihe heisse:

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \sin kx + \beta_k \cos kx.$$

Nun entsteht die Frage, in welcher Beziehung stehen die Coefficienten dieser zu denen der früheren Reihe? Sie wird durch die Gleichungen beantwortet:

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[f(+\pi) - f(-\pi)],$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\sin kx\Big]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = -k a_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi}[f(+\pi) - f(-\pi)] + k b_k.$$

Demnach wird durch die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2\pi}[f(+\pi)-f(-\pi)] = \sum_{k=1}^{k=\infty} - kb_k \sin kx$$

$$+ \left\{\frac{(-1)^k}{\pi}(f(+\pi)-f(-\pi)) + ka_k\right\} \cos kx$$

der Werth von $\frac{1}{2}\{f'(x+0)+f'(x-0)\}$ im allgemeinen, d. h. discrete Punkte können eine Ausnahme bilden, dargestellt.

Für den Fall, dass $f(+\pi)=f(-\pi)$ ist, geht diese Reihe in die einfachere Form über

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} - kb_k \sin kx + ka_k \cos kx,$$

welche durch directe gliedweise Integration der ursprünglichen Reihe erhalten wird. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so convergirt diese Reihe für sich gesondert betrachtet überhaupt nicht.

Die Regel für die Integration gestaltet sich folgendermassen: Ist $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

im allgemeinen dargestellt, und weiss man, dass $f(x)$ integrabel ist, so ist diese Reihe eine Fourier'sche. Soll nun das Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

gebildet werden, wobei die Grenzen a und x in das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ fallen mögen, so existirt auch für diese Function, da sie überall stetig ist, eine Fourier'sche Reihe. Setzt man

$$F(x) - F(a) = B_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin kx + B_k \cos kx,$$

so wird:

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx - F(a),$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{k\pi}\Big[F(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\Big[F(+\pi) - F(-\pi)\Big] + \frac{1}{k} b_k,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k\pi}\Big[F(x)\sin kx\Big]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{k\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx$$
$$= -\frac{1}{k}a_k.$$

Also ist $F(x)$ im allgemeinen dargestellt durch die Reihe:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,(F(+\pi)-F(-\pi)) + \frac{1}{k}\,b_k\right\}\sin kx$$
$$-\frac{1}{k}\,a_k\cos kx.$$

Diese Reihe zerfällt in zwei Theile; denn der Werth von

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)]\sin kx$$

ist convergent und gleich

$$\frac{x}{2\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)] = b_0 x,$$

da

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)].$$

Nur an den Endpunkten des Intervalles ist

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} = 0.$$

Demnach hat man das Resultat: Die Function $F(x)$ ist im allgemeinen gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0 x + \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\,b_k\sin kx - \frac{1}{k}\,a_k\cos kx.$$

An discreten Punkten kann aber der Werth der Reihe von diesem Werthe unterschieden sein.

Wenn jedoch die Function $f(x)$ eine absolut integrirbare ist, muss auch der Werth dieser Reihe ausnahmslos mit dem Werthe von $F(x)$ übereinstimmen; und zwar ist in dieser nicht rein trigonometrischen Form auch:

$$F(+\pi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

$$F(-\pi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\,dx-b_0\pi+\sum_{k=1}^{k=\infty}-\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

weil

$$\frac{F(+\pi)+F(-\pi)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\,dx+\sum_{k=1}^{k=\infty}-\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k$$

und

$$\frac{F(+\pi)-F(-\pi)}{2}=b_0\pi \quad \text{ist.}$$

Bildet man die Differenz $F(x)-F(a)$, so wird dieselbe gleich:

$$b_0(x-a)+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}b_k(\sin kx-\sin ka)-\frac{1}{k}a_k(\cos kx-\cos ka)$$

also direct gleich der Reihe, welche aus der ursprünglichen durch gliedweise Integration zwischen den Grenzen a und x hervorgeht. Der Uebersichtlichkeit wegen sollen die beiden Regeln kurz formulirt werden:

1. *Weiss man von einer trigonometrischen Reihe, dass durch dieselbe im allgemeinen eine stetige Function definirt ist, welche eine absolut integrirbare Ableitung besitzt, so ist die Reihe eine durchweg stetige Function, deren Ableitung durch eine trigonometrische Reihe „im allgemeinen“ dargestellt wird. Dieselbe wird aus der ursprünglichen durch gliedweise Differentiation gewonnen, indem man ausserdem noch jedem Gliede der zu bildenden Reihe das Glied*

$$(-1)^k\,[f(+\pi)-f(-\pi)]\cos kx$$

hinzufügt.

2. *Das Integral jeder trigonometrischen Reihe zwischen beliebigen in das Intervall $-\pi$ und $+\pi$ fallenden Grenzen wird, falls die Reihe überhaupt eine integrirbare Function definirt, durch gliedweise Integration „im allgemeinen“ dargestellt. Definirt die gegebene Reihe eine absolut integrirbare Function, so ist die durch Integration gebildete Reihe ausnahmslos gleich dem Integrale.*

Diese Sätze sowohl, wie die im Artikel IV. für die ausnahmslose Darstellung stetiger Functionen gegebene Definition sichern der Fourier'schen Reihe eine weit grössere Anwendbarkeit bei der Theorie partieller Differentialgleichungen, als ihr schliesslich zugestanden wurde.

Der Gang aber, den ich zur Entwickelung der Theorie hier eingeschlagen habe, führt ohne Weiteres auch in das ganze Gebiet von darstellenden Functionen mit den analogen Integraleigenschaften ein, von denen die trigonometrischen nur einen besonderen Theil bilden.

Dresden, im September 1881.

Bemerkungen zur Invariantentheorie.

Von

E. B. Christoffel in Strassburg.

Ich erlaube mir im Folgenden einen Beitrag zu derjenigen Begründung der Invariantentheorie vorzulegen, welche von der Transformation homogener Formen ausgeht. Die Frage ist seit der grundlegenden Abhandlung des Herrn **Aronhold***) bekannt und bedarf keiner Erläuterung. Auch auf Vergleiche mit früheren Darstellungen bin ich nicht eingetreten, da sie durch die Uebereinstimmung der Bezeichnungen nahe genug liegen. Dagegen darf ich nicht unerwähnt lassen, dass dasjenige Princip, welches sich als das entscheidende erweist — die Aequivalenz zweier Formen $f(ax)$ und $f(by)$ von der Aequivalenz beider mit einer dritten abhängig zu machen, schon in der interessanten Abhandlung des Herrn **Gram****) auftritt. Meine eigenen Untersuchungen in dieser Richtung reichen bis zum Ende der 60$^{\text{er}}$ Jahre zurück; die ursprünglich beabsichtigte Veröffentlichung derselben ist unterblieben, nicht dass ich auf fremde Arbeiten gewartet hätte, um aus ihnen die den meinigen beizulegende Tragweite zu entnehmen, sondern weil meine Beschäftigung mich immer mehr zu Fragen führte, bei denen das Interesse ausschliesslich in der Anwendung der Formenbildung liegt. Wenn ich mich nach so langer Zeit gleichwohl zur folgenden kurzen Veröffentlichung entschlossen habe, so habe ich den Anlass dazu in einigen Publicationen der letzten Jahre gefunden, welche mir zeigten, dass eine unten folgende Berichtigung (§ 1. 2.) noch heute nöthig ist, nachdem ich sie seit langer Zeit als augenfällig für überflüssig gehalten hatte.

Die vollständige Durchführung des Princips, auf welches nach Herrn **Aronhold** die Invariantentheorie zu gründen ist, führt zur Einsicht, dass die Erscheinung der „Invarianz" mehr auf den Eigenschaften der Substitutionen, als auf Eigenschaften der zu transformirenden Formen beruht, und dies führt dann zum Begriffe der „invariantiven" Substitutionen und derjenigen Formen, welche einer solchen, wenn auch nicht jeder Substitution gegenüber „vollständige" sind. —

---

*) Borchardt's Journal LXII.

**) Diese Annalen VII, 230.

1.

Ich bezeichne durch f eine Form p^{ter} Ordnung mit n Variabeln, ihre Gliederzahl durch t; $f(ax)$ bedeute dann eine Form f mit den Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_n$ und den Coefficienten $a_1 a_2 \ldots a_t$ in einer beliebig festzusetzenden Reihenfolge.

Die Formen $f(ax)$ und $f(by)$ heissen äquivalent, wenn jede von ihnen in die andere durch eine lineare und umkehrbare Substitution transformirt werden kann. Dafür ist es ebenfalls nothwendig und ausreichend, dass beide zur nämlichen dritten Form $f(cz)$ äquivalent sind. Diese Festsetzungen hat Gauss zu arithmetischen Zwecken gegeben, wenigstens nur diese betont: seine Untersuchungen über die Compositionstheorie, die ternären Formen, sein zweiter Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra und seine Theorie des Linienelementes liefern den Beweis, dass Gauss auch, und zwar in den mannigfaltigsten Richtungen, auf dem Gebiete der Formenbildung thätig gewesen ist.

Geht durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s$ heissen, während s ihre Anzahl nn bedeutet, $f(ax)$ in $f(a'y)$ über, so lauten die Bedingungen, damit dies $= f(by)$ wird:

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \cdots, \quad b_t = a_t'.$$

Die eigentlichen Aequivalenzbedingungen ergeben sich hieraus durch eine Operation, welche ich als die systematische Elimination von $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s$ bezeichnen möchte.

Die systematische Elimination von x zwischen m algebraischen Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \varphi_3(x) = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_m(x) = 0$$

setzt voraus, dass man 1. die Resultante der beiden ersten Gleichungen, $R(\varphi_1 \varphi_2) = 0$ setzt, 2. den nunmehr existirenden grössten gemeinsamen Theiler φ_2' von φ_1 und φ_2 aufsucht, und nun zunächst zum Gleichungssystem

$$\varphi_2' = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_m = 0$$

übergeht. Mit diesem wird das nämliche Verfahren wiederholt, indem man $R(\varphi_2' \varphi_3) = 0$ setzt und, wenn φ_3' den nun vorhandenen grössten gemeinsamen Theiler von φ_2' und φ_3 bedeutet, das Gleichungssystem

$$\varphi_3' = 0, \quad \varphi_4 = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_m = 0$$

bildet. Fährt man so fort, so erhält man, bei hinreichend erläuterter Bezeichnung, die Resultanten

$$\text{(b)} \qquad R(\varphi_1 \varphi_2) = 0, \quad R(\varphi_2' \varphi_3) = 0, \quad \cdots, \quad R(\varphi_{m-1}' \varphi_m) = 0$$

und die Schlussgleichung

$$\text{(c)} \qquad \varphi_m'(x) = 0;$$

und es ist klar, dass diese $m - 1$ Gleichungen (b) die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen ausdrücken, damit wenigstens ein

Werth von x existirt, welcher allen Gleichungen (a) genügt, während (c) alle diese Werthe von x und nur sie liefert.

In den Gleichungen (I) ist die systematische Elimination der Substitutionscoefficienten in irgend einer Reihenfolge zu leisten, etwa wie folgt. Angenommen die systematische Elimination von α_1 lasse noch α_2 übrig; die hierauf folgende systematische Elimination von α_2 lasse noch α_3 übrig u. s. w., aber mit der systematischen Elimination von α_σ gehen auch alle folgenden $\alpha_{\sigma+1}, \alpha_{\sigma+2}, \cdots, \alpha_s$ heraus, so weit sie nicht schon früher ausgefallen sind. Dann erhält man aus (I) offenbar $t-\sigma$ Aequivalenzbedingungen von der Form

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} F_{\sigma+1}(a|b_1 b_2 \cdots b_{\sigma+1}) &= 0, \\ F_{\sigma+2}(a|b_1 b_2 \cdots b_{\sigma+2}) &= 0, \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \\ F_t\;\;(a|b_1 b_2 \cdots b_t)\;\; &= 0, \end{aligned}$$

und σ Schlussgleichungen

$$F_1'(a|b|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s)=0,\; F_2'(a|b|\alpha_2 a_3\cdots\alpha_s)=0,\; F_\sigma'(a|b|\alpha_\sigma\alpha_{\sigma+1}\cdots\alpha_s)=0,$$

mit folgenden Zusätzen:

1) Ich betrachte die Werthe $a_1 a_2 \cdots a_t$ als zu gebende, $b_1 b_2 \cdots b_t$ als gesucht, so dass zu einer gegebenen Form $f(ax)$ alle äquivalenten Formen $f(by)$ gesucht sind.

2) Es ist leicht zu beweisen, dass die Zahl σ von der Reihenfolge unabhängig ist, in welcher die Substitutionscoefficienten eliminirt wurden, weshalb ich σ als die *Ordnung der systematischen Elimination* bezeichne. Ebenso leicht ist es aber auch einzusehen, dass diese Ordnung σ von den Werthen der zu gebenden Zahlen $a_1 a_2 \cdots a_t$ abhängt, und zwar in der Weise, dass, wenn durch numerische Specialisirung einiger von diesen Zahlen $\sigma = \sigma_1$ geworden ist, durch weitere, zu dieser kommende Specialisirungen nicht mehr $\sigma > \sigma_1$ werden kann.

Es giebt also einen höchsten Werth von σ, und derselbe ist $= s = nn$. Derselbe tritt, wie Herr Aronhold bewiesen hat*), in allen denjenigen Fällen $p > 2$ ein, wo die ersten Derivirten von $f(ax)$ nicht zugleich verschwinden können, so lange nicht alle Variabeln $= 0$ werden. Ein Beweis, den ich selbst von dem Satze zu geben versucht hatte, dass bei unabhängig variabeln Werthen $a_1 a_2 \cdots a_t$ die Zahl $\mu = s - \sigma = 0$ ist, $p > 2$ vorausgesetzt, scheitert an dem Umstande, dass ein von mir durch $f(\pi_1', \ldots)$ bezeichneter Ausdruck (Borchardt's Journal 68, pag. 250) noch andere Argumente als die angezeigten $(\pi_1', \ldots)$ enthalten kann, was ich hiermit ein für allemal berichtigt haben will, da auf diese Arbeit neuerdings mehrere Mal Bezug genommen worden ist.

---

*) Borchardt's Journal, LXIX. 187.

3) Die Schlussgleichung $F_k' = 0$ enthält α_k, aber nicht $\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \dots \alpha_1$: durch die Schlussgleichungen sind also $\alpha_\sigma, \alpha_{\sigma-1} \dots \alpha_1$ bestimmt, die übrigen Substitutionscoefficienten $\alpha_{\sigma+1}, \dots \alpha_s$, deren Anzahl $\mu = s - \sigma$ ist, bleiben willkürlich.

4) Die Aequivalenzbedingung $F_i = 0$ enthält b_i, aber nicht $b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_t$; durch die Aequivalenzbedingungen sind also $b_{\sigma+1}, b_{\sigma+2}, \dots, b_t$ bestimmt, während $b_1 b_2 \dots b_\sigma$ willkürlich bleiben.

5) Werden nun $b_1 b_2 \dots b_\sigma$ willkürlich, aber $b_{\sigma+1}, \dots, b_t$ den Gleichungen (II) gemäss angenommen, so ist $f(by)$ stets zu $f(ax)$ äquivalent, und es ergeben sich auf diesem Wege auch alle zu $f(ax)$ äquivalenten Formen $f(by)$.

6) In jedem solchen Falle ergeben sich die Substitutionen, welche $f(ax)$ in $f(by)$ transformiren, wenn man $\alpha_{\sigma+1}, \alpha_{\sigma+2}, \dots, \alpha_s$ willkürlich, aber $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\sigma$ den Schlussgleichungen gemäss annimmt, und dann ist identisch

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \cdots, \quad b_t = a_t'.$$

7) Wenn es sich daher nur um das Aequivalenzproblem handelt, so sind demnach nur die Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad F_i(a \,|\, b_1 b_2 \cdots b_i) = 0, \quad (i = \sigma + 1, \sigma + 2, \cdots, t)$$

zu berücksichtigen.

2.

Diese Bedingungen (II) werden nun vollständig vertreten durch die Forderung, dass $f(ax)$ und $f(by)$ beide zu $f(cz)$ äquivalent sein sollen. Die Bedingungen für das erstere lauten

$$\text{(IIa)} \qquad F_i(a \,|\, c_1 c_2 \cdots c_i) = 0, \quad (i = \sigma + 1, \cdots, t)$$

und, *unter einer sofort nachzuweisenden Voraussetzung*, für die zweite Aequivalenz:

$$\text{(IIb)} \qquad F_i(b \,|\, c_1 c_2 \cdots c_i) = 0, \quad (i = \sigma + 1, \cdots, t).$$

Wir betrachten, wie oben festgestellt wurde, die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_t$ als zu gebende, $b_1 b_2 \dots b_t$ dagegen als gesuchte, ebenso $c_1 c_2 \dots c_t$. Während also der Fall vorzusehen ist, dass die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_t$ bereits numerisch specialisirt vorliegen, sind für die Zahlen b ebenso wie für die Zahlen c alle Beschränkungen vorbehalten.

Geht man nun auf die ursprünglichen Transformationsbedingungen zurück, welche den drei vorstehenden Fällen entsprechend lauten:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \cdots, \quad b_t = a_t', \\
\text{(Ia)} & c_1 = a_1'', \quad c_2 = a_2'', \quad \cdots, \quad c_t = a_t'', \\
\text{(Ib)} & c_1 = b_1''', \quad c_2 = b_2''', \quad \cdots, \quad c_t = b_t''',
\end{array}$$

so springt in die Augen, dass die Ordnung der systematischen Elimination für die Gleichungen (Ib) ihren höchsten Werth hat: hat sie in den Gleichungen (I) einen kleinern Werth, und sind dann 1. in (II) die dazu gehörigen Aequivalenzbedingungen vereinigt, so bilden allerdings die Gleichungen (IIa) auch die richtigen Aequivalenzbedingungen zu (Ia), *aber die Gleichungen* (IIb) *sind nicht mehr das Resultat der systematischen Elimination von* $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$ *aus* (Ib), weil ihre Anzahl zu gross ist; und wenn umgekehrt 2. in diesem Falle die Gleichungen (IIb) richtig aus (Ib) hergeleitet sind, *also* σ *seinen höchsten Werth bedeutet*, so stehen in (II) resp. (IIa) *nicht mehr die richtigen Bedingungen zu* (I) *resp.* (Ia), da ihre Anzahl zu klein ist.

> *In allen denjenigen Fällen, wo, vermöge der Specialisirung von* $f(ax)$, *die Ordnung* σ *der systematischen Elimination von* $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$ *aus dem Gleichungssystem*
>
> (I) $\qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \quad \cdots, \quad b_t = a_t'$
>
> *kleiner ist als bei unabhängig veränderlichen Werthen von* $a_1 a_2 \cdots a_t$, *können die Gleichungen* (II) *niemals ersetzt werden durch zwei, der Anzahl und Form nach übereinstimmende Gleichungssysteme* (IIa) *und* (IIb).

3.

Ich setze von hier ab voraus, dass auch die Coefficienten von $f(ax)$ willkürlich sind, und benutze neben (II) und (IIa) auch die Gleichungen (IIb).

Dann sind in den Resultaten alle, aber auch nur diejenigen Specialisirungen von $a_1 a_2 \ldots a_t$ statthaft, bei denen die Ordnung der Elimination auch für die Gleichungen (I) ihren höchsten Werth behält (z. B. bei der ternären cubischen Form nicht die Specialisirung $f(ax) = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$).

Um nun die Folgerungen zu entwickeln, welche sich aus der *Forderung* ergeben, dass *jede* Lösung $c_1 c_2 \ldots c_t$ eines der beiden Gleichungssysteme (IIb) und (IIa) stets auch dem andern genüge, bedarf es vor allem einer Discussion dieser Gleichungssysteme.

A) Man ordne jede Gleichung (IIb) nach ihrer letzten Unbekannten, was

(IIb) $\qquad F_i(b \mid c_1 \cdots c_i) = \mathsf{A}_i c_i^{\mu} + \mathsf{B}_i c_i^{\mu-1} + \cdots = 0, \quad (i = \sigma + 1, \cdots, t)$

gebe. Alle Coefficienten sind frei von $c_i, c_{i+1}, \ldots, c_t$, und rationale ganze Functionen von $b_1 b_2 \ldots b_t$ und $c_1 \ldots c_{i-1}$, ausserdem frei von einem ihnen allen gemeinsamen Factor. Angenommen, der leitende Coefficient A_i bleibe von Null verschieden für alle Lösungen $c_{i-1}, c_{i-2}, \ldots, c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen $F_\varkappa = 0 (\varkappa = i - 1,\ i - 2, \ldots \sigma + 1)$.

Dann giebt es — wenn $M_\varkappa$ eine ganze Function von $c_\varkappa, c_{\varkappa-1}, \ldots c_{\sigma+1}$ bedeutet, die in $b_1 \ldots b_t$ und $c_1 \ldots c_\sigma$ wenigstens rational ist — einen

Factor M_{i-1}, so dass $M_{i-1}\mathsf{A}_i$ mittelst der Gleichung $F_{i-1}=0$ von c_{i-1} unabhängig wird*), hierauf einen Factor M_{i-2} so dass das Product $M_{i-2}M_{i-1}\mathsf{A}_i$ mittelst der Gleichung $F_{i-2}=0$ auch von c_{i-2} unabhängig wird, u. s. w. D. h. dann giebt es einen Factor P_i, welcher ganze Function derselben Argumente wie A_i selbst ist, von der Beschaffenheit, dass das $\cdot$ Product $P_i\mathsf{A}_i$ mittelt der Gleichungen $F_\varkappa=0$ $(\varkappa<i)$ von $c_{i-1}, c_{i-2}, \ldots, c_{\sigma+1}$ frei wird. Dann werden die Producte $P_i\mathsf{B}_i, \ldots$ ganze Functionen von $c_{\sigma+1}, \ldots, c_{i-1}$, welche man mittelst der vorangehenden Gleichungen auf möglichst kleine Grade bringen kann. Hebt man hierauf mit dem vereinfachten leitenden Coefficienten weg, so wird die Gleichung $F_i=0$ ersetzt durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{F}_i(b\,|\,c_1\ldots c_i)=c_i^{\mu}+\mathfrak{B}_i c_i^{\mu-1}+\mathfrak{C}_i c_i^{\mu-2}+\cdots=0,$$

wo nun 1. jeder Coefficient, für $k=i-1,\ i-2,\ldots,\sigma+1$, ganze Function von c_k und von kleinerem Grade wie $\mathfrak{F}_\varkappa$ ist, und 2. alle Coefficienten rationale Functionen von $b_1\ldots b_i$, $c_1\ldots c_\sigma$ sind.

B) Angenommen ferner, im System (IIb) habe *jeder* leitende Coefficient A_i die Eigenschaft, für keine Lösung $c_{i-1},\ldots,c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen zu verschwinden.

Dann findet die vorstehende Umformung für alle Gleichungen des Systemes (IIb) statt, und nun ergeben sich die folgenden Schlüsse.

1) Unsere Aufgabe fordert zunächst, dass jede Lösung $c_{\sigma+1}$ einer der beiden Gleichungen

$$(\sigma+1),\quad \mathfrak{F}_{\sigma+1}(b\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+1})=0,\quad \mathfrak{F}_{\sigma+1}(a\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+1})=0$$

auch der andern genüge. Dies findet stets und nur dann statt, wenn beide Gleichungen in den Coefficienten übereinstimmen, und dies führt zu einer Anzahl Gleichungen von der Form

$$\text{(III)}\qquad R(b\,|\,c_1c_2\ldots c_\sigma)=R(a\,|\,c_1c_2\ldots c_\sigma),$$

wo jedes R rationale Function und beiderseits die nämliche Function seiner Argumente ist.

2) So oft $c_{\sigma+1}$ Lösung der nunmehr übereinstimmenden Gleichungen $(\sigma+1)$ ist, sollen auch die beiden Gleichungen

$$(\sigma+2)\quad \mathfrak{F}_{\sigma+2}(b\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+2})=0,\quad \mathfrak{F}_{\sigma+2}(a\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+2})=0$$

in den Wurzeln, also den Coefficienten übereinstimmen. Das giebt Relationen von der Form $S(b\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+1})-S(a\,|\,c_1\ldots c_{\sigma+1})=0$, wo S ganze Function von $c_{\sigma+1}$ aber von kleinerem Grade als $F_{\sigma+1}$ ist. Diese Gleichung muss also in $c_{\sigma+1}$ identisch sein, d. h. die Polynome $(\sigma+2)$ müssen, nach $c_{\sigma+2}$ *und* $c_{\sigma+1}$ geordnet, in den Coefficienten übereinstimmen, was wieder zu Relationen der Form (III) führt.

---

*) Gauss, Dem. nova altera, 2. IV.

3) Setzt man diese Schlüsse fort, so folgt:

Wenn in den Gleichungen (II b) kein leitender Coefficient A_i durch eine Lösung $c_{i-1}, c_{i-2}, \ldots, c_{\sigma+1}$ der vorangehenden Gleichungen $F_\varkappa = 0$ $(\varkappa = i-1,\ i-2, \ldots, \sigma+1)$ zum Verschwinden gebracht wird, lassen sich alle Bedingungen, damit die Gleichungssysteme (II a), (II b) in ihren Lösungen $c_{\sigma+1}$, $c_{\sigma+2}, \ldots, c_t$ ganz und gar übereinstimmen, *vollständig* ausdrücken durch eine Anzahl Relationen von der Form

$$\text{(III)}\qquad R(b_1 b_2 \ldots b_t | c_1 c_2 \ldots c_\sigma) = R(a_1 a_2 \ldots a_t | c_1 c_2 \ldots c_\sigma),$$

wo jedes R rational und beiderseits die nämliche Function der angezeigten Argumente ist.

C) Der Nachweis, dass die Bedingungen dieses Satzes sich stets erfüllen lassen, ist leicht zu führen.

a) Wir sind befugt, vorauszusetzen, dass im System (II b) jede Gleichung $F_i = 0$ mittelst der ihr vorangehenden auf ihren niedrigsten Grad in c_i gebracht ist, und ausserdem die Coefficienten $\mathsf{A}_i, \mathsf{B}_i, \ldots$ keinen ihnen allen gemeinsamen Factor haben.

b) Ich behaupte, dass dieses Gleichungssystem irreductibel ist, dass also kein Polynom F_i desselben mittelst der vorangehenden Gleichungen rational zerfällbar wird.

Zum Beweise ist zu beachten, dass $c_1 \ldots c_\sigma$ willkürlich bleiben, mithin als unabhängige Variabeln auftreten, von denen $c_{\sigma+1} \ldots c_t$ algebraische Functionen sind. Es ist also nach bekannten Principien nur zu beweisen, dass durch geeignete Wege der unabhängigen Variabeln $c_1 \ldots c_\sigma$ jedes Lösungssystem $c'_{\sigma+1} \ldots c'_t$ in jedes andere $c''_{\sigma+1} \ldots c''_t$ übergeführt werden kann.

Aber dieses ist sicher; denn jedes Werthsystem $c_1 c_2 \ldots c_t$, welches den Gleichungen (II b) genügt, macht $f(cz)$ äquivalent zu $f(by)$, also giebt es zu jedem solchen Werthsystem eine Substitution, so dass (I b) $c_1 = b_1'''$, $c_2 = b_2'''$, $\ldots$, $c_t = b_t'''$ wird. Dies umfasst, wenn alle Substitutionscoefficienten unabhängig variabel sind, alle Lösungen $c_1 c_2 \ldots c_t$ von (II b), also auch $c_1 = b_1', \ldots, c_\sigma = b\,'$ $c'_{\sigma+1} = b_{\sigma+1} \ldots c'_t = b'_t$ und $c_1 = b_1'', \ldots, c_\sigma = b_\sigma''$, $c''_{\sigma+1} = b''_{\sigma+1}, \ldots, c_t'' = b_t''$; also kann jede von diesen beiden in die andere durch geeignete Aenderungen der Substitutionscoefficienten, also auf den dadurch bestimmten Wegen von $c_1 = b_1''', \ldots, c_t = b_t'''$ übergeführt werden, ohne dass dies aufhört, Lösung von (II b) zu sein.

c) Ich behaupte endlich, dass unter der Voraussetzung a) kein leitender Coefficient A_i durch Lösungen der vorangehenden Gleichungen zum Verschwinden kommt.

Seien $c_\varkappa, c_{\varkappa+1}, \ldots$ die Variabeln, von denen A_i wirklich abhängt, so dass, wenn $\varkappa < i - 1$ ist, A_i von $c_{i-1}, \ldots, c_{\varkappa+1}$ frei ist. Sodann seien $c_{\varkappa-1}, \ldots, c_{\sigma+1}$ an die Gleichungen $F_{\varkappa-1} = 0, \ldots, F_{\sigma+1} = 0$ gebunden, $c_\varkappa$ dagegen sei unabhängig variabel, also $F_\varkappa$ nicht $= 0$. Würde nun $\mathsf{A}_i = 0$ für alle Lösungen der vorangehenden Gleichungen, so wäre A_i durch $F_\varkappa$ theilbar und F_i mit zu hohem Grade angesetzt. Würde $\mathsf{A}_i = 0$ zwar nicht für alle, aber für einige Lösungen der vorangehenden Gleichungen, so hätte A_i mit $F_\varkappa$ einen gemeinsamen Factor, ohne durch $F_\varkappa$ selbst theilbar zu sein, aber dann wäre $F_\varkappa$ rational zerfällbar.

Also wird A_i für keine Lösung der vorangehenden Gleichungen Null, w. z. b. w.

d) Daraus folgt, dass, wofern nur jede Gleichung $F_i = 0$ in c_i auf ihren niedrigsten Grad gebracht ist, die Bedingungen des Satzes B) erfüllt sind, d. h. wir haben den Satz:

> Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit die Gleichungen (IIa) und (IIb) in ihren sämmtlichen Lösungen $c_{\sigma+1}, \ldots, c_t$ übereinstimmen, lassen sich durch eine geeignete Anzahl Gleichungen von der Form

$$(\mathrm{III}) \qquad R(b_1 b_2 \ldots b_t | c_1 \ldots c_\sigma) = R(a_1 a_2 \ldots a_t | c_1 \ldots c_\sigma)$$

> ausdrücken, wo jedes R rational und beiderseits die nämliche Function der angezeigten Argumente ist.

D) Aber das Aequivalenzproblem fordert ausserdem noch, dass diese Uebereinstimmung der Lösungen $c_{\sigma+1}, \ldots, c_t$, also das Gleichungssystem (III), ohne irgend eine Beschränkung der Argumente $c_1 \ldots c_\sigma$ stattfindet.

Aus (III) erhält man also die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Aequivalenz von $f(by)$ und $f(ax)$, wenn man noch bewirkt, dass jede Gleichung (III) in $c_1 \ldots c_\sigma$ identisch wird. Ist R ganze Function dieser Argumente, so kommt man zum Schlusse durch Vergleichung der Coefficienten; ist die rationale Function R eine gebrochene, so bedarf es nur der Wiederholung des elementaren Satzes, dass zwei rationale Ausdrücke mit dem Argumente c in den Coefficienten übereinstimmen, wenn sie 1. für jedes c gleiche Werthe annehmen, 2. in beiden der Zähler zum Nenner relativ prim ist und 3. etwa in beiden Nennern der leitende Coefficient $= 1$ ist. Dies letztere hat zur Folge, dass entsprechende Coefficienten in $R(b_1 \ldots | c_1 \ldots)$ und $R(a_1 \ldots | c_1 \ldots)$ der eine aus $b_1 \ldots b_t$, der andere aus $a_1 \ldots a_t$ in der gleichen Weise zusammengesetzt sind. Bezeichnen wir solche Coefficienten durch B und A, so haben wir den Satz:

> *Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit $f(by)$ zu $f(ax)$ äquivalent wird, lassen sich vollständig ausdrücken durch eine Anzahl Gleichungen von der Form*

$$(\mathrm{IV}) \qquad \mathsf{B}_1 = \mathsf{A}_1, \quad \mathsf{B}_2 = \mathsf{A}_2, \ldots$$

wo jedesmal B_μ *eine rationale Function von* $b_1 \dots b_t$ *und* A_μ *die nämliche Function von* $a_1 \dots a_t$ *ist.*

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Ordnung der systematischen Elimination für das Gleichungssystem

$$\text{(I)} \qquad b_1 = a_1', \quad b_2 = a_2', \dots, b_t = a_t'$$

ihren höchsten Werth hat; in jedem andern Falle ist der vorstehende Satz unrichtig,
wie aus dem Schlusse des § 2. folgt.

Ersetzt man jedes b durch seinen Werth a', so muss jede Gleichung (IV) identisch werden; also sind $\mathsf{B}_1\, \mathsf{B}_2 \dots$ (rationale) absolute Invarianten von $f(by)$.

4.

Wir halten an der Bedingung fest, dass die Ordnung σ der systematischen Elimination für das Gleichungssystem (I) ihren höchsten Werth hat. Dann geschieht den Gleichungen (IV) nicht blos Genüge durch *jede* Lösung $b_1 \dots b_t$ des Aequivalenzproblems, sondern es ist auch umgekehrt *dieses* Gleichungssystem frei von allen fremden Lösungen, d. h. solchen, für welche $f(by)$ nicht zu $f(ax)$ äquivalent ist.

Aber die Gleichungen (II) zeigen, dass $b_1 \dots b_\sigma$ willkürlich bleiben, während $b_{\sigma+1} \dots b_t$ durch sie und $a_1 a_1 \dots a_t$ bestimmt sind.

Welches nun auch die *Anzahl* der Gleichungen (IV) sein mag, so müssen sich hiernach aus ihnen $t - \sigma$ Gleichungen

$$\text{(IVa)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \; \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}$$

ausheben lassen, welche jene Bestimmung von $b_{\sigma+1} \dots b_t$ leisten, so dass $b_1, b_2, \dots, b_{t-\sigma}$ in Bezug auf diese Variabeln von einander unabhängig sind.

Sei $J(b)$ irgend eine andere absolute Invariante (es ist *nur* von rationalen die Rede).

Nun genügen den Gleichungen (IVa) auf alle Fälle 1. sämmtliche Lösungen $b_{\sigma+1}, \dots, b_t$ des Aequivalenzproblems, aber möglicherweise ausserdem noch 2. fremde Lösungen, aber beide zusammen genommen nur in endlicher Anzahl, wenn wir, um abzuzählen, $b_1 \dots b_\sigma$ als feste Werthe betrachten.

Jede Lösung der ersten Art giebt $J(b) = J(c)$; diese Gleichung hat also mit (IVa) Lösungen gemein, in denen $b_1 \dots b_\sigma$ willkürlich bleiben; eliminirt man $b_{\sigma+1}, \dots, b_t$, so müssen also $b_1 \dots b_\sigma$ von selbst ausfallen. Zwischen $J(b)$ und $\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ besteht also eine algebraische Gleichung; jede andere (rationale) absolute Invariante $J(b)$ ist also algebraische Function von $\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$.

Angenommen, $J(b)$ sei keine rationale Function von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$

Das heisst dann, dass 1. ein jedes Werthesystem $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{t-\sigma}$, dessen $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ überhaupt fähig sind, hervorgeht aus verschiedenen Werthesystemen $b_1\, b_2 \dots b_t$, aber 2. diese letztern nicht alle *denselben* Werth des rationalen Ausdruckes $J(b)$ liefern. Aber alle Werthsysteme $\beta_1 \dots \beta_{t-\sigma}$ der verlangten Art ergeben sich aus (IVa), wenn man $a_1\, a_2 \dots a_t$ unabhängig von einander variiren lässt. Die zugehörigen Werthegruppen $b_1 \dots b_t$ zerfallen also 1. in Lösungen des Aequivalenzproblems, und diese geben alle $J(b) = J(a)$, 2. in die hinzukommenden fremden Lösungen, und nur solche können es sein, für welche $J(b)$ nicht ebenfalls $= J(a)$ wird.

Ist also $J(b)$ nicht rationale Function von $\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$, so enthält das System (IVa) nothwendig fremde Lösungen $b_1\, b_2 \dots b_t$, und unter diesen nothwendig solche, welche durch Hinzufügung der Gleichung $J(b) = J(a)$ ausgeschlossen werden.

Sei $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ eine solche rationale absolute Invariante. Dann haben die Gleichungen

$$\text{(IVb)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}, \mathfrak{B}_{t-\sigma+1} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+1}$$

noch alle Aequivalenzlösungen, aber die Anzahl der fremden Lösungen ist kleiner als in (IVa).

Sei $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2}$ eine neue rationale absolute Invariante. Sie ist algebraische Function von $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$, und ihr Ausdruck lässt sich durch Einführung von $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ auf mannigfaltige Art abändern. Angenommen, $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2}$ sei durch $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_{t-\sigma}$ und $\mathfrak{B}_{t-\sigma+1}$ auf keine Weise rational darstellbar. Dann folgt wie vorhin, dass das System (IVb) nothwendig noch fremde Lösungen hat, und darunter nothwendig solche, welche durch die Bedingung $\mathfrak{B}_{t-\sigma+2} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+2}$ ausgeschlossen werden. Um diese ist also die Anzahl aller Lösungen des Systems

$$\text{(IVc)} \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma} = \mathfrak{A}_{t-\sigma}, \mathfrak{B}_{t-\sigma+1} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+1}, \mathfrak{B}_{t-\sigma+2} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+2}$$

kleiner wie in (IVb), während die Aequivalenzlösungen unverkürzt bestehen bleiben.

Da aber die Anzahl aller Lösungen in (IVa) eine endliche ist, so muss dieser Process einmal abschliessen mit einem Gleichungssystem

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma+\varrho} = \mathfrak{A}_{t-\sigma+\varrho},$$

wo $\varrho \gtreqless 0$ ist, in der Weise, dass

1) keine von den Invarianten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{t-\sigma+\varrho}$ durch *die vorangehenden* rational darstellbar ist, aber

2) jede andere rationale absolute Invariante $J(b)$ die rationale Darstellung durch jene gestattet, und

3) falls das System (V) auch noch fremde Lösungen enthalten sollte, sie durch Invariantengleichungen $J(b) = J(a)$ nicht mehr ausgeschlossen werden können.

Ist nun eine der vorstehenden Invarianten, etwa $\mathfrak{B}_\mu$, zwar nicht durch die vorangehenden, aber durch diese und die folgenden rational darstellbar, so ist 1. $\mathfrak{B}_\mu$ entbehrlich für die Darstellung von $J(b)$, und 2. die Gleichung $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A}_\mu$ aus (V) zu entfernen, weil sie keine fremden Lösungen ausschliesst und durch die übrigen identisch erfüllt wird. Also haben wir das Theorem:

> *Es giebt eine endliche Anzahl rationaler absoluter Invarianten*
>
> $$\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{\iota-\sigma+\varrho},$$
>
> *durch welche jede andere rational darstellbar ist, während keine von ihnen rationale Function der übrigen ist.*

Durch diese stelle man nun jede Invariante $B_1, B_2, \ldots$ des Gleichungssystems (IV) dar. Dann folgt, dass *jede* Lösung des Systems

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{A}_\mu \; (\mu = 1\; 2 \ldots \tau - \sigma + \varrho)$$

auch Lösung von (IV), also Lösung des Aequivalenzproblems ist. Das ist der Satz:

> *Die im vorigen Satze nachgewiesenen Invarianten* $\mathfrak{B}$ *reichen aus, um in den Gleichungen* (V) *die Bedingungen für die Aequivalenz von* $f(by)$ *mit* $f(ax)$ *vollständig und frei von fremden Lösungen auszudrücken, so oft in* (I) *die Ordnung der Elimination ihren höchsten Werth hat, aber auch nur in diesem Falle.*

Ich breche hiermit ab, indem ich auch die Uebertragung des Vorstehenden auf gewöhnliche Invarianten und auf Formensysteme unterlasse. Der unzweifelhaft richtige Satz, dass es für jedes Formensystem eine endliche Anzahl von Invarianten giebt, durch welche alle übrigen als *ganze* Functionen derselben ausgedrückt werden können, scheint der eigentlichen Formenbildung anzugehören, zu deren grossen Zielen er namentlich seit den Entdeckungen des Herrn Gordan gehört. Wenigstens habe ich selbst in den *ausschliesslich* auf Transformationstheorie fussenden Untersuchungen keinen rechten Anhaltspunkt für den Beweis dieses Theorems gefunden.

Strassburg, 18. October 1881.

Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt.

Von

Tötössy Béla in Zürich.

I.

Erzeugungen und Gleichungsformen der Fläche.

Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die Gleichungen beliebiger Flächen zweiten Grades, $p = 0$ die Gleichung einer Ebene, so lässt sich die Gleichung einer Fläche vierter Ordnung, welche die Schnittlinie der Ebene p mit der Fläche φ zum Doppelkegelschnitt hat, in der Form

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$$

schreiben*). Die vier Schnittpunkte des Doppelkegelschnittes mit der Fläche ψ sind Cuspidalpunkte der Fläche vierter Ordnung.

Der Kegelschnitt $(\varphi\, p)$ wird zur Cuspidalcurve, wenn er seiner ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche ψ liegt, letztere also mit $r = 0$ als Gleichung einer beliebigen Ebene dem Büschel

$$\varphi + \mu p r = 0$$

angehört. Die Gleichung der Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt kann also in der Form

$$F \equiv \varphi^2 - 4p^2\varphi - 4\mu p^3 r = 0$$

geschrieben werden. Indem man dafür

$$(\varphi - 2p^2)^2 - 4(\mu r + p)p^3 = 0$$

schreibt und dann $\varphi - 2p^2$ und $-4(\mu r + p)$ durch U respective q ersetzt, wird sie auf die von Herrn Zeuthen**) mitgetheilte Form

$$F \equiv U^2 + p^3 q = 0 \tag{1}$$

gebracht. Dafür kann man auch

---

*) Kummer: „Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.“ Borchardt's Journal Bd. 64, pag. 66.

**) H. G. Zeuthen: „Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques.“ Math. Annalen Bd. X, pag. 542.

$$(U + \lambda p^2)^2 = p^2(\lambda^2 p^2 + 2\lambda U - pq)$$

schreiben, wo λ eine beliebige Constante bedeutet.

Das Flächenbüschel

$$U_\lambda \equiv U + \lambda p^2 = 0$$

enthält alle Flächen zweiten Grades, welche sich längs dem Kegelschnitt (Up) berühren.

$$B_\lambda \equiv \lambda^2 p^2 + 2\lambda U - pq = 0$$

stellt ein System von einfach unendlich vielen Flächen zweiten Grades dar, von denen jede durch den Cuspidalkegelschnitt hindurchgeht und die Flächen U_λ in den Punkten (Upq) berührt.

Die Raumcurve $(U_\lambda B_\lambda)$ zerfällt in den Cuspidalkegelschnitt und in den Kegelschnitt K_λ, welchen die beiden Flächen U_λ und B_λ noch gemein haben. Sie ist als vollständiger Schnitt der Flächen B_λ und F doppelt zu zählen, d. h. B_λ und F berühren sich längs ihr, letztere Fläche erscheint also als Enveloppe des Systems B_λ.

Um die Ebene q_λ des Kegelschnittes K_λ zu finden, beachte man, dass das Ebenenpaar pq_λ als Fläche zweiten Grades dem Büschel

$$B_\lambda + \mu U_\lambda \equiv p^2(\lambda^2 + \mu\lambda) + U(2\lambda + \mu) - pq = 0$$

angehören muss. Für $\mu = -2\lambda$ erhält man:

$$B_\lambda + \mu U_\lambda \equiv p(\lambda^2 p + q) = 0,$$

damit

$$q_\lambda \equiv \lambda^2 p + q = 0$$

als Gleichung der Ebene q_λ.

Für $q = -\lambda^2 p$ geht Gleichung (1) über in

$$(U + \lambda p^2)(U - \lambda p^2) = 0.$$

Das heisst:

Jede Ebene des Büschels (pq) *schneidet aus der Fläche* F *zwei Kegelschnitte* K_λ, $K_{-\lambda}$ *heraus, welche sich in den Punkten* (Upq) *berühren.*

Für $\lambda = 0$, also $q_\lambda = q$ fallen diese beiden Kegelschnitte zusammen, d. h.

Die Ebene q *berührt die Fläche* F *längs dem Kegelschnitt* (Uq). Jeder ebene Querschnitt dieser Fläche hat also die Schnittlinie seiner Ebene mit der Ebene q zur Doppeltangente.

Gleichung (1) kann auch in der Form

$$(U + \varrho q^2)^2 = q(\varrho^2 q^3 + 2\varrho Uq - p^3)$$

geschrieben werden. Die Flächen des Büschels

$$U_\varrho \equiv U + \varrho q^2 = 0$$

berühren sich gegenseitig längs dem Kegelschnitt (Uq).

(2) $$C_\varrho \equiv \varrho^2 q^3 + 2\varrho Uq - p^3 = 0$$

stellt ein System von einfach unendlich vielen Flächen dritter Ordnung dar. Bezeichnet man — wie es im Folgenden immer geschehen soll — mit A_1 und A_3 die Punkte (Upq), ferner mit A_3 und A_1 die respectiven Tangentialebenen in ihnen an die Fläche U, so hat jede Fläche C_ϱ die Punkte A_1 und A_3 zu biplanaren Doppelpunkten mit den Ebenenpaaren $\mathsf{A}_3 q$ und $\mathsf{A}_1 q$ als respectiven zerfallenden Tangentenkegeln in ihnen. Sie enthält also auch die Verbindungslinie $A_1 A_3$ und zwar als *osculare Gerade* nach der Ebene q (Bezeichnung von Cayley), das heisst die Gerade $A_1 A_3$ bildet den vollständigen Schnitt der Ebene q mit der Fläche C_ϱ, repräsentirt also drei gerade Linien der letzteren.

Die Raumcurve sechster Ordnung $(U_\varrho C_\varrho)$ ist als vollständiger Schnitt der Flächen C_ϱ und F doppelt zu zählen, d. h. C_ϱ und F berühren sich längs ihr, die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt erscheint also auch als Enveloppe des Systemes C_ϱ aus Flächen dritter Ordnung. Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (1) und (2) führt auf die Bedingung

$$(p^3 + \varrho^2 q^3)^2 = 0.$$

Die Raumcurve $(C_\varrho F)$ zerfällt also in drei je zweimal zu zählende Kegelschnitte, welche durch die Punkte A_1 und A_3 hindurchgehen und von denen nur ein einziger reell ist.

Schreibt man Gleichung (1) in der Form:

$$q(p + \mu q)^3 = q^2(3\mu p^2 + 3\mu^2 pq + \mu^3 q^2) - U^2,$$

also:

$$q \cdot q_\mu{}^3 = D_\mu,$$

so sieht man, dass die Fläche F von jeder Fläche D_μ längs ihrem Querschnitt mit der Ebene q_μ *osculirt* wird. Die erstere erscheint also auch als *stationäre Enveloppe* eines Systems D_μ von Flächen vierter Ordnung.

Jede Fläche des Systems D_μ hat die Linie (Uq) zum Doppelkegelschnitt und von den vier Cuspidalpunkten desselben fallen je zwei in den Punkten A_1 und A_3 zusammen. Eine beliebige Ebene des Büschels pq schneidet aus D_μ zwei Kegelschnitte heraus, von denen jeder die Ebenen A_1 und A_3 in den Punkten A_3 und A_1 respective berührt.

Die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt kann ausser den bisher erwähnten Erzeugungsarten als Enveloppe des Systems B_λ aus Flächen zweiten Grades oder des Systems C_ϱ aus Flächen dritter Ordnung oder als stationäre Enveloppe des Systems D_μ aus Flächen vierter Ordnung mit gemeinsamem Doppelkegelschnitt, — noch in mannigfaltiger Weise als Erzeugniss projectivischer Flächensysteme dargestellt werden.

Bezieht man die Flächenbüschel zweiten Grades:

$$U + \lambda p^2 = 0 \quad \text{und} \quad pq - \lambda U = 0$$

projectivisch so aufeinander, dass die demselben Werthe des Parameters λ entsprechenden Flächen der beiden Büschel correspondirende Elemente bilden, so erhält man als Ort der Schnittlinien entsprechender Flächenpaare:

$$U^2 + p^3 q = 0,$$

also unsere Fläche F.

$U^2 - \mu p^4 = 0$ ist die Gleichung eines involutorischen Flächenbüschels zweiten Grades, $q + \mu p = 0$ die Gleichung eines zu ihm projectivischen Ebenenbüschels, und als Gleichung des Ortes der Schnittcurven entsprechender Elemente (Ebenen hier, Flächenpaare dort) findet man

$$p(U^2 + p^3 q) = 0,$$

das heisst:

Man erhält die Fläche F auch als Theil des Erzeugnisses eines Ebenenbüschels und einer zu ihm projectivischen Involution aus Flächen zweiten Grades. Die Doppelelemente dieser Involution, entsprechend den Parameterwerthen $\mu = 0$ und $\mu = \infty$, sind die Flächen U und p^2, ihre Entsprechenden im Ebenenbüschel sind die singuläre Tangentialebene q und die Ebene p des Cuspidalkegelschnittes respective. Diese beiden Ebenen theilen den ganzen Raum in vier Flächenwinkelräume, von denen nur zwei und zwar Scheitelwinkelräume reelle Punkte der Fläche F enthalten.

In gleicher Weise erhält man durch projectivische Zuordnung aus dem Büschel U_λ und dem Flächensystem B_λ das Erzeugniss:

$$p^2(U^2 + p^3 q) = 0,$$

aus den Systemen B_λ und q_λ das Erzeugniss:

$$pq(U^2 + p^3 q) = 0,$$

aus den Systemen U_ϱ und C_ϱ das Erzeugniss:

$$q^3(U^2 + p^3 q) = 0,$$

aus dem System D_μ und dem Ebenenbüschel q_μ das Erzeugniss:

$$q^3(U^2 + p^3 q) = 0,$$

also jedesmal die Fläche F mit noch einem Nebenerzeugniss.

Ausser der auf Seite 293 eingeführten Bezeichnung A_1 und A_3 für die Punkte (Upq) und A_3 respective A_1 für die Tangentialebenen der Fläche U in ihnen, soll im Folgenden immer der Pol der Ebene p in Bezug auf die Fläche U mit A_4, der Pol der Geraden A_1A_3 in Bezug auf den Cuspidalkegelschnitt mit A_2, zwei beliebige Punkte des Cuspidalkegelschnittes mit $A_1{}^*$ und $A_3{}^*$, der Pol ihrer Verbindungslinie in Bezug auf den Cuspidalkegelschnitt mit $A_2{}^*$ und die Tangentialebenen in den ersteren an die Fläche U mit $\mathsf{A}_3{}^*$ respective $\mathsf{A}_1{}^*$ bezeichnet werden. Wählt man dann die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 als Ecken eines Coordinatentetraeders und den Einheitspunkt E mit den Coordinaten $x_i = 1$ auf der Schnittlinie des Berührungskegels K von U aus A_4 mit der Ebene q, dann ist:

$$U \equiv x_2^2 - x_1 x_3 + m x_4^2, \quad p \equiv x_4, \quad q \equiv x_2 - x_4,$$

also die Gleichung der Fläche F:

$$F \equiv (x_2^2 - x_1 x_3 + m x_4^2)^2 + x_4^3 (x_2 - x_4) = 0,$$

oder entwickelt:

$$(3) \quad F \equiv x_2^4 - 2 x_1 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + 2 m x_2^2 x_4^2 - 2 m x_1 x_3 x_4^2 + x_2 x_4^3 + (m^2 - 1) x_4^4 = 0.$$

Im Folgenden wird es oft vortheilhaft sein, vier Punkte A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4 als Ecken eines Coordinatentetraeders zu benutzen und den Einheitspunkt E^* ganz unbestimmt zu lassen. Die Gleichung der untersuchten Fläche in diesem allgemeineren Coordinatensystem heisst:

$$(4) \quad F^* \equiv x_2^4 - 2 x_1 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + 2 m x_2^2 x_4^2 - 2 m x_1 x_3 x_4^2 + a_1 x_1 x_4^3 + a_2 x_2 x_4^3 + a_3 x_3 x_4^3 + (m^2 + a_4) x_4^4 = 0$$

mit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

als Gleichung der Ebene q. Der Punkt A_2 hat dann die Coordinatenverhältnisse

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 a_3 : -a_2 : 2 a_1 : 0$$

und die Gerade $A_1 A_3$ in der Ebene $\mathrm{A}_4(p)$ die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Manchmal wird es auch wünschenswerth erscheinen, die Coefficienten a_i der Ebene q mit einem willkürlichen constanten Factor n zu versehen, also die Gleichung der Fläche F in der Form

$$U^2 + n p^3 q = 0,$$

respective

$$(K + m p^2)^2 + n p^3 q = 0$$

vorauszusetzen. In dieser letzten Form stellt die Gleichung zweifach unendlich viele Flächen $F_{m,n}$ vierter Ordnung mit demselben Cuspidalkegelschnitt, demselben Berührungskegel K und derselben Ebene q dar. Mit constantem m und variablem n ist sie die Gleichung eines Flächenbüschels F_m, mit constantem n und variablem m dagegen die Gleichung eines einfach unendlichen Systems F_n von Flächen F, mit quadratischem Parameter.

Eine andere, ebenfalls einfache Gleichungsform für die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt wird erhalten, wenn man ein Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen in Bezug auf die Fläche U als Coordinatentetraeder wählt und zwar so, dass die Ebene p mit einer Quadrupelebene A_4 und die Schnittlinie (pq) mit einer Quadrupelkante A_1A_3 zusammenfällt. Wählt man noch den Einheitspunkt E so, dass seine Projectionen E_{14}, E_{24}, E_{34} aus den drei in A_4 gelegenen Kanten auf die respective gegenüberliegenden Kanten des Coordinatentetraeders der Fläche U angehören, so werden

$$U \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, \quad p \equiv x_4, \quad q \equiv x_2 + (c-1)\,x_4,$$

demnach die Gleichung der Fläche F

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)^2 + x_4^3(x_2 + (c-1)\,x_4) = 0,$$

oder entwickelt

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + cx_4^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2 - 2x_1^2x_4^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2 + x_2x_4^3 = 0.$$

Diese Gleichungsform wird mit Vortheil besonders dann angewendet werden können, wenn der Cuspidalkegelschnitt der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis ist. Das Coordinatensystem ist dann ein Cartesisches mit A_4 als Coordinatenanfangspunkt und A_1, A_2, A_3 als Axenrichtungen. Die Fläche F wird eine Rotationsfläche.

Ordnet man Gleichung (4) nach Potenzen von x_1, so geht sie über in

$$x_1^2 \cdot x_3^2 + x_1 \cdot u^{(3)} + u^{(4)} = 0,$$

wo $u^{(3)}$ und $u^{(4)}$ homogene ganze Functionen dritten respective vierten Grades in den Veränderlichen x_2, x_3 und x_4 bedeuten. Der Punkt A_1^*, ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes (Up) ist ein Doppelpunkt der Fläche F, der Tangentenkegel zweiten Grades in ihm hat die Gleichung

$$x_3^2 = 0,$$

ist also die doppelt gelegte Ebene, welche die Tangente des Kegelschnittes (Up) in A_1^* mit der Ecke A_4 verbindet, man kann daher sagen:

Der Kegelschnitt (Up) *ist Cuspidalkegelschnitt der Fläche vierter Ordnung* F. *Die Tangentialebenen von* F *längs* (Up) *gehen alle durch einen festen Punkt, den Pol der Ebene* p *in Bezug auf die Fläche* U *und bilden einen Kegel zweiten Grades, den gemeinsamen Berührungskegel* K *der Fläche* F *und der Flächen des Büschels zweiten Grades* U_λ *längs dem Kegelschnitt* (Up).

II.

Ebene Querschnitte.

1. *Den allgemeinsten Schnitt* liefert eine Ebene $A_1^*A_3^*E^*$. Man erhält die Gleichung seiner Projection aus A_4 auf A_4 — seiner vierten Projection — durch Combination der Gleichungen $x_4 - x_2 = 0$ und $F^* = 0$ in der Form:

$$x_1^2 x_3^2 - 2(1+m)\, x_1 x_2^2 x_3 + a_1 x_1 x_2^3 + a_3 x_2^3 x_3$$
$$+ (1 + 2m + m^2 + a_2 + a_4)\, x_2^4 = 0,$$

für $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$ hat man die Reihenentwicklung

$$y = \sqrt{-a_1}\, x^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

das heisst der Punkt A_1^* (ebenso auch A_3^*) ist ein *Rückkehrpunkt* der Schnittcurve. Bezeichnet μ die Ordnung, ν die Classe, δ, $\varkappa$, τ, ι respective die Anzahl der Doppelpunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten und Inflexionstangenten des ebenen Querschnittes, so hat man $\mu = 4$, $\delta = 0$, $\varkappa = 2$, $\nu = 6$, $\tau = 1$, $\iota = 8$ und für das Geschlecht $D = 1$.

2. *Geht die schneidende Ebene E durch eine beliebige Tangente des Cuspidalkegelschnittes*, ist sie also eine Ebene $A_1^* A_2^* E^*$, so findet man als Gleichung der vierten Projection ihres Querschnittes mit F

$$x_2^4 - 2x_1 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + 2m x_2^2 x_3^2 + (a_1 - 2m)\, x_1 x_3^3 + a_2 x_2 x_3^3$$
$$+ (a_3 + a_4 + m^2)\, x_3^4 = 0.$$

Setzt man $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$, so kann y in die Reihe

$$y = x^2 \pm \sqrt{-a_1}\, x^3 + \cdots$$

entwickelt werden, die Schnittcurve hat in A_1^* einen *Osculationsknoten* (zwei Aeste der Curve osculiren sich in A_1^*), ihre Plücker'schen Charaktere sind folglich:

$$\mu = 4, \quad \delta = 3, \quad \varkappa = 0, \quad \nu = 6, \quad \tau = 4, \quad \iota = 6$$

und das Geschlecht der Curve wird auf $D = 0$ reducirt. Die Tangente der Schnittcurve im Osculationsknoten ist die Gerade $A_1^* A_2^*$, sie zählt für drei von den vier Doppeltangenten, die letzte ist die Gerade Eq.

3. *Geht die Ebene E durch eine beliebige Tangente des Kegelschnittes Uq*, so wird die Doppeltangente Eq des Querschnittes zur Undulationstangente, sie enthält vier unendlich benachbarte Punkte der Schnittcurve. Die Plücker'schen Charaktere sind im Uebrigen diejenigen des allgemeinsten Schnittes.

4. *Eine beliebige Tangentialebene des Kegels K* schneidet aus der Fläche F eine Curve vierter Ordnung heraus, deren Gleichung

$$x_2^4 + 2m x_2^2 x_4^2 + a_1 x_1 x_4^3 + a_2 x_2 x_4^3 + (m^2 + a_4)\, x_4^4 = 0$$

aus $F^* = 0$ durch Nullsetzen von x_3 erhalten wird. Mit $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_4}{x_1} = y$ hat man:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{a_1}}\, x^{\frac{4}{3}}.$$

Die Schnittcurve besitzt in A_1^* einen *dreifachen Punkt* besonderer Art, der aus der Vereinigung eines Knotenpunktes mit zwei Spitzen entstanden ist. Die Plücker'schen Charaktere dieses Querschnittes sind $\mu = 4$, $\delta = 1$, $\varkappa = 2$, $\nu = 4$, $\tau = 1$, $\iota = 2$ und das Geschlecht $D = 0$. Die Tangenten in dem dreifachen Punkte sind alle drei reell und fallen mit der Tangente des Cuspidalkegelschnittes in A_1^* zusammen.

5. $F^* = 0$ mit $a_1 = 0$ giebt für $x_4 = x_2$ die Gleichung der vierten Projection *eines beliebig durch den Punkt A_1 gehenden ebenen Querschnittes* der Fläche F. Man erhält:

$$x_1^2 x_3^2 - 2(1+m)\, x_1 x_2^2 x_3 + a_3 x_2^3 x_3 + (1+2m+m^2+a_2+a_4)\, x_2^4 = 0,$$

oder

$$y^2 - 2(1+m)\, x^2 y + a_3 x^3 y + (1+2m+m^2+a_2+a_4)\, x^4 = 0$$

mit $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$. Die Reihenentwicklung für y ergiebt:

$$y = [1 + m \pm \sqrt{-(a_2 + a_4)}]\, x^2 + \cdots$$

und zeigt, dass ein beliebiger Querschnitt durch den Punkt A_1 in ihm einen Berührungsknoten hat, dass also A_1 (ebenso auch A_3) ein *Clospunkt*[*]) unserer Fläche ist.

Für $a_2 + a_4 = 0$ lautet die Entwicklung von y

$$y = (1 + m)\, x^2 \pm \sqrt{- a_3(1 + m)}\, x^{\frac{5}{2}}$$

und zeigt, dass von dem Punkte A_1 aus (auch von A_3) nach jedem Punkte A_3^* (A_1^*) des Cuspidalkegelschnittes eine einzige Ebene hingeht, welche aus der Fläche F eine Curve mit *Schnabelspitze* in A_1 (respective A_3) herausschneidet. Alle diese Ebenen bilden ein Büschel mit der Geraden $q A_3$ (respective $q A_1$) als Scheitelkante. Diese Scheitelkante ist die *„singuläre Tangente"* der Fläche F im Clospunkte A_1 (A_3), jede durch sie hindurchgehende Ebene muss als Tangentialebene der Fläche F betrachtet werden.

6. Die Gleichung der vierten Projection eines beliebigen ebenen Schnittes durch die Tangente $A_1 A_2$ des Cuspidalkegelschnittes im Clospunkt A_1 erhält man aus $F^* = 0$ mit $a_1 = a_3 = 0$ durch die Combination mit der Gleichung $x_4 - x_3 = 0$ in der Form:

$$x_2^4 - 2x_1 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + 2m x_2^2 x_3^2 - 2m x_1 x_3^3 + a_2 x_2 x_3^3 (m^2 + a_4) x_3^4 = 0$$

und für $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$ wird der Verlauf dieser Curve in der Nähe des Punktes A_1 durch die Gleichung

$$y = x^2 \pm \sqrt{- a_2}\, x^{\frac{7}{2}}$$

---

*) Vergl. Zeuthen's oben citirte Abhandlung pag. 479 f.

dargestellt. Die Curve hat in A_1 eine *Berührungsknotenspitze* (Vereinigung vôn zwei Knotenpunkten und einer Spitze), ihre Plücker'schen Charaktere sind $\mu = 4$, $\delta = 2$, $\varkappa = 1$, $\nu = 5$, $\tau = 2$, $\iota = 4$ und das Geschlecht $D = 0$.

7. Setzt man in $F = 0$ x_3 oder x_1 gleich Null, so erhält man in beiden Fällen:

$$x_2^4 + 2mx_2^2x_4^2 + x_2x_4^3 + (m^2 - 1)\,x_4^4 = 0,$$

das heisst:

Jede der Ebenen A_3 *und* A_1 *schneidet aus der Fläche* F *vier durch die Clospunkte* A_1 *respective* A_3 *gehende gerade Linien heraus*, so dass jede Gerade der einen Ebene eine einzige Gerade der andern Ebene trifft, natürlich in der Schnittlinie $(\mathsf{A}_3\mathsf{A}_1)$. Die Ebenen A_3 und A_1 sind die *„singulären Tangentialebenen“* der Fläche F in den Clospunkten, ihre Schnittcurven mit der Fläche haben in den respectiven Berührungspunkten A_1 und A_3 die Natur eines vierfachen Punktes.

III.

Umgeschriebene Kegelflächen.

1. *Tangentenkegel der Fläche* F *aus einem beliebigen Punkte* S *des Raumes.*

Ich kehre zur allgemeinen Gleichungsform $F \equiv U^2 + p^3q = 0$ unserer Fläche zurück, wo q und p die linearen Functionen $\Sigma a_i x_i$ respective $\Sigma b_i x_i$, U dagegen eine homogene quadratische Function der vier Veränderlichen x_i bedeuten.

Die erste Polarfläche P_1 eines beliebigen Punktes S mit den Coordinaten y_i in Bezug auf die Fläche F hat die Gleichung

$$P_1 \equiv 2Ur + p^2(Ap + 3Bq) = 0$$

mit den Abkürzungen $A = \Sigma a_i y_i$, $B = \Sigma b_i y_i$, $r = \Sigma U_i y_i$ und der bekannten Bezeichnung $U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$.

Die Form

$$P_1 \equiv Ur + p^2 s = 0$$

dieser Gleichung erlaubt folgende Schlüsse zu ziehen:

Die Fläche P_1 ist von der dritten Ordnung und hat je einen conischen Doppelpunkt in den beiden Punkten (Urp). Sie enthält die Gerade (rp) als *torsale Gerade* nach der Ebene r (Bezeichnung von Cayley), das heisst, die Gerade (rp) ist als Theil des Schnittes (rP_1) doppelt zu zählen, der Rest dieses Querschnittes ist die Gerade (rs). Ausser in der Geraden (rp) schneidet die Fläche P_1 die Ebene p noch in dem Cuspidalkegelschnitt (Up), längs welchem sie die Fläche U, also auch F berührt. Der Cuspidalkegelschnitt erscheint daher in der

Durchdringung (FP_1) dreifach, somit ist auch der Kegel (S, Up) als Theil des Tangentenkegels aus S an F dreimal zu zählen. Der Rest der Durchdringung (FP_1) ist eine Raumcurve R_6 sechster Ordnung, die Leitcurve des eigentlichen Tangentenkegels T von F aus S, und damit haben wir für diesen selbst die Ordnungszahl

$$a = 6$$

gefunden.

Die Raumcurve R_6 erscheint als theilweise Durchdringung der Fläche P_1 mit dem Kegel dritter Ordnung

$$K_3 \equiv ps^2 + qr^2 = 0.$$

Der Letztere hat die Schnittlinie der Ebenen r und s zur Doppelkante, berührt die Ebene p längs der Geraden (pr) und hat q zur stationären Tangentialebene längs der Geraden (ps); R_6 berührt also den Cuspidalkegelschnitt in den Punkten (Urp) und geht ausserdem noch durch die Clospunkte (Ups) der Fläche F hindurch.

Die zweite Polarfläche P_2 von S in Bezug auf F hat die Gleichung:

$$P_2 \equiv 2\,U_y U + r^2 + 3Bp(Ap + Bq) = 0$$

mit U_y als Substitutionsresultat der y_i für die x_i in U.

Man erkennt leicht aus der Form dieser Gleichung, dass die Fläche P_2 den Cuspidalkegelschnitt in den beiden Punkten (Urp) berührt. Jeder dieser Punkte zählt für acht Schnittpunkte der Flächen F, P_1 und P_2 und es bleiben noch acht Schnittpunkte übrig, welche mit S verbunden Inflexionstangenten der Fläche F, also

$$\varkappa = 8$$

Rückkehrkanten des Tangentenkegels T ergeben.

Eine einfache Betrachtung der ebenen Querschnitte unserer Fläche F zeigt, dass der Tangentenkegel T keine Doppelkante besitzen kann, denn eine solche wäre Doppeltangente eines jeden durch sie hindurchgehenden ebenen Querschnittes. Es ist somit

$$\delta = 0.$$

Der von einem beliebigen Punkte des Raumes an die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt gelegte Tangentenkegel ist von der sechsten Ordnung, hat acht Rückkehrkanten, aber keine Doppelkanten und die Plücker'schen Gleichungen ergeben für ihn die Classe sechs, acht stationäre aber keine Doppeltangentialebenen.

Die Betrachtung derjenigen ebenen Querschnitte von F, welche durch die Verbindungslinie des Scheitels S mit einem Clospunkte A_1 hindurchgehen, zeigt, dass SA_1 eine einfache Erzeugende des Kegels T und die Ebene von S nach der singulären Tangente $q\mathrm{A}_3$ die zugehörige Tangentialebene von T ist. Die vier übrigen noch durch

SA_1 gehenden Tangentialebenen von T gehen nach den vier auf A_3 gelegenen Geraden der Fläche F hin.

2. *Die Spitze S ist ein beliebiger Punkt der Fläche U.*

Wegen $U_y = 0$ reducirt sich $P_2 = 0$ auf

$$r^2 + 3Bp(Ap + Bq) = 0,$$

auf die Gleichung eines Kegels. Man schliesst daraus:

Die Hesse'sche Kernfläche von F zerfällt in die Fläche U und in eine Restfläche von der sechsten Ordnung.

3. *Liegt der Punkt S auf der Fläche F,* so berührt seine erste Polare die Fläche F in ihm, er ist also ein Doppelpunkt in der Leitcurve sechster Ordnung des Tangentenkegels T_F, dieser selbst also nur noch von der vierten Ordnung. Die Tangentialebene von F in S tritt als Doppeltangentialebene dieses Kegels auf, wie leicht einzusehen. *Für denselben finden wir noch die Classe sechs, keine Doppelkanten, zwei Rückkehrkanten und acht stationäre Berührungsebenen.*

4. *Die Spitze S ist ein beliebiger Punkt der Ebene q.*

In diesem Falle ist $A = 0$ und die Gleichung der ersten Polare von S in Bezug auf F

$$P_1 \equiv Ur + p^2q = 0,$$

wenn man $\frac{2}{3B}$ als Proportionalitätsfactor in die Coordinaten der Ebene r hineinnimmt. Von der Durchdringung (FP_1) sondert sich ausser dem dreimal zu zählenden Cuspidalkegelschnitt (Up) auch noch der Kegelschnitt (Uq) ab und es bleibt als Leitcurve des Tangentenkegels T_q unserer Fläche F aus S eine Raumcurve R_4 vierter Ordnung. Diese R_4 ist die Durchdringung der Fläche zweiten Grades

$$V \equiv U - rp = 0$$

und des Kegels

$$K_2 \equiv r^2 + pq = 0;$$

sie berührt den Kegelschnitt (Up) in den Punkten (Upr) und den Kegelschnitt (Uq) in den Punkten (Uqr). Die Tangenten von R_4 in den Punkten (Uqr) gehen durch den Scheitel S hindurch, sind also Rückkehrkanten des Kegels T_q.

Die Classe des Kegels T_q muss mit der Classe des allgemeinsten Tangentenkegels T übereinstimmen, denn für beide Kegel ist sie die Anzahl der Tangentialebenen von F, welche durch die Verbindungslinie ihrer Scheitel — also durch eine ganz beliebige Gerade des Raumes — hindurchgehen. Mit Hülfe der Plücker'schen Gleichungen finden wir für T_q noch *eine Doppel- und acht stationäre Tangentialebenen, aber keine Doppelkante.*

5. *Die Spitze S ist ein beliebiger Punkt der Ebene p.*

Wegen $B = 0$ ist

$$P_1 \equiv 2Ur + Ap^3 = 0, \qquad P_2 \equiv 2U_y U + r^2 = 0.$$

Der Tangentenkegel T_p zerfällt nicht. Seine Leitcurve R_6^* ist der vollständige Schnitt der Fläche

$$V^* \equiv AU - 2rq = 0$$

und des Kegels

$$K_3^* \equiv A^2p^3 + 4r^2q = 0.$$

K_3^* hat die Gerade (rp) zur Rückkehrkante mit r als Tangentialebene längs ihr, ferner die Ebene q als stationäre Tangentialebene längs der Geraden (pq), die Punkte (Upr) sind also Spitzen der R_6^*.

Die Rückkehrkanten des Kegels T_p erhält man als die Verbindungslinien des Scheitels S mit den Schnittpunkten von R_6^* und P_2. Von diesen Punkten fallen je drei in die Punkte (Upr) hinein, die sechs andern liegen auf dem Kegelschnitt, welchen die Ebene

$$Ar + 4U_yq = 0$$

aus P_2 herausschneidet. Der Tangentenkegel von F aus einem beliebigen Punkte S der Ebene p hat also *acht Rückkehrkanten*, zwei von ihnen sind die von S an den Cuspidalkegelschnitt gehenden Tangenten, die sechs andern liegen auf einem Kegel zweiten Grades.

Da der Kegel T_p auch von der *sechsten Classe* sein muss, so ergeben die Plücker'schen Gleichungen für ihn noch *acht stationäre Tangentialebenen*, *keine Doppelkante und keine Doppeltangentialebene.*

6. *Die Spitze S ist ein willkürlicher Punkt des Kegelschnittes* (Uq).

Die Ebene r berührt den Kegelschnitt Uq im Punkte S und q ist stationäre Schmiegungsebene für die Leitcurve R_4 vierter Ordnung des Tangentenkegels T_{Uq} mit S als Anschmiegungspunkt. T_{Uq} ist also ein Kegel *dritter Ordnung sechster Classe*, für welchen q eine *stationäre Tangentialebene* ist. *Er besitzt keine Doppel- und keine Rückkehrkante und hat ausser q noch acht stationäre Tangentialebenen.*

7. *Die Spitze S ist ein beliebiger Punkt des Cuspidalkegelschnittes.*

Wegen $B = 0$ ist die Gleichung der ersten Polarfläche von S in Bezug auf F wie im Falle 5.

$$P_1 \equiv 2Ur + Ap^3 = 0,$$

folglich ist auch hier die Leitcurve R_6^* des Tangentenkegels T_{Up} die vollständige Durchdringung der Fläche V^* und des Kegels K_3^*. Das Besondere des jetzt betrachteten Falles besteht in dem Umstande, dass r, U und V^* sich gegenseitig im Punkte S berühren. Die beiden Spitzen (Urp) der R_6^* fallen daher in S zusammen und wegen der Berührung der Flächen V^* und K_3^* tritt noch ein Knotenpunkt der Durchdringungscurve $(V^*K_3^*)$ in diesem Punkte hinzu. Diese drei singulären Punkte vereinigen sich zu einem besonderen dreifachen

Punkte der Raumcurve R_6^*, der projicirende Kegel derselben aus diesem Punkte — der Tangentenkegel T_{U_p} — ist also von der *dritten Ordnung* und die nämliche Ueberlegung wie in Nr. 4. ergiebt für ihn die *Classe sechs. Ausser neun stationären Tangentialebenen hat er keine weiteren Singularitäten.*

8. *Die Spitze S ist ein beliebiger Punkt in der singulären Tangentialebene* (A_3) *eines Clospunktes* (A_1) *der Fläche F.*

Die erste Polarfläche P_1 von S hat in A_1 statt einem conischen, einen biplanaren Doppelpunkt mit den Ebenen A_3 und r als Tangentialebenen in ihm. Der Punkt A_1 ist der Scheitel des Kegels $K_3 \equiv ps^2 + qr^2 = 0$ (Seite 300), die Raumcurve R_6 hat also in A_1 einen dreifachen Punkt so, dass die drei durch A_1 hindurchgehenden Aeste derselben die Ebene A_3 berühren. Der von S an F gehende Tangentenkegel hat folglich die Gerade SA_1 zur *dreifachen Berührungskante*, das heisst drei Flächenmäntel des Kegels berühren sich gegenseitig längs ihr, er ist von der *sechsten Classe* und besitzt ausser den in der dreifachen Berührungskante SA_1 vereinigten Singularitäten noch *vier Rückkehrkanten und vier stationäre Tangentialebenen.*

9. *Die Spitze S ist ein Punkt auf der Schnittlinie der Ebenen* A_1 *und* A_3.

Die Ebenen p, q, r und s gehen durch eine und dieselbe Gerade, Kegel K_3 (Seite 300) degenerirt also in drei Ebenen eines Büschels und die Raumcurve R_6 zerfällt in drei Kegelschnitte, welche die Ebenen A_3 und A_1 in den respectiven Punkten A_1 und A_3 berühren. *Der von einem beliebigen Punkte S der Geraden* ($\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3$) *an F gehende Tangentenkegel zerfällt in drei Kegel zweiten Grades, welche sich gegenseitig längs den Kanten SA_1 und SA_3 berühren mit* A_3 *und* A_1 *als bezüglichen Tangentialebenen.*

Jeder von diesen Kegeln zweiten Grades durchdringt die Fläche F ausser in dem Berührungskegelschnitt noch in zwei anderen Kegelschnitten, welche durch die Clospunkte A_1 und A_3 hindurchgehen.

Ist S die Spitze desjenigen Kegels K zweiten Grades, welcher F längs dem Cuspidalkegelschnitt berührt, so fällt einer der drei von S an F gehenden Tangentenkegel zweiten Grades mit K zusammen; ist S ein Schnittpunkt der Geraden ($\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3$) mit F, so degenerirt einer derselben in die doppelt gelegte Tangentialebene SA_1A_3 der Fläche F im Punkte S; ist endlich S der Schnittpunkt der Geraden ($\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3$) mit der Ebene q, so vertritt die doppelt gezählte Ebene q einen von diesen drei Kegeln.

10. *Die Spitze S ist ein Punkt auf der Schnittlinie der Ebenen p und q.*

Wegen $A = B = 0$ zerfällt die erste Polarfläche P_1 in die Fläche U und in die Ebene r, die Leitcurve des Tangentenkegels ist der

Querschnitt der Fläche F mit der Ebene r, der Kegel selbst daher von der *vierten Ordnung* und von der *sechsten Classe*, er hat zwei *Rückkehrkanten, keine Doppelkante, acht stationäre Tangentialebenen und die Ebene q als Doppeltangentialebene.*

11. *Die Spitze S ist ein Clospunkt A_1 der Fläche F.*

Betrachtet man den Tangentenkegel als Ort der durch seinen Scheitel A_1 hindurchgehenden Tangenten der Fläche F, so zerfällt er zunächst in zwei Theile. Der erste Theil besteht aus denjenigen Tangenten, welche ihre Berührungspunkte in A_1 selbst haben, der zweite Theil besteht aus denjenigen, welche ihre Berührungspunkte nicht in A_1 haben und dieser zweite Theil wird als eigentlicher Tangentenkegel aus A_1 an die Fläche F zu betrachten sein.

Eine beliebige Ebene E durch A_1 schneidet F in einer Curve vierter Ordnung fünfter Classe mit Berührungsknoten in A_1. Die Tangente im Berührungsknoten zählt für vier von A_1 an diese Curve gehende Tangenten, es bleibt noch eine einzige übrig, die ihren Berührungspunkt nicht in A_1 hat, die Schnittlinie von E mit der Ebene q. Die Gesammtheit dieser Tangenten erfüllt die Ebene q, *als Ort betrachtet ist unser Tangentenkegel daher von der ersten Ordnung.**)

Betrachtet man dagegen den Tangentenkegel als Enveloppe der durch seinen Scheitel A_1 hindurchgehenden Tangentialebenen der Fläche F, so hat man Tangentialebenen, welche ihre Berührungspunkte in A_1 selbst haben, von solchen zu unterscheiden, deren Berührungspunkte nicht in A_1 liegen und man wird die Enveloppe der Letzteren als eigentlichen Tangentenkegel der Fläche F aus dem Clospunkte A_1 zu betrachten haben.

Eine beliebige Gerade g durch A_1 liegt in sechs Tangentialebenen der Fläche F, zwei davon fallen mit der Verbindungsebene der Geraden g und der singulären Tangente $(\mathsf{A}_3 q)$ im Clospunkte A_1 zusammen, die vier anderen gehen durch die vier auf A_3 gelegenen Geraden der Fläche F hindurch. Nur diese letzteren vier Ebenen gehören dem eigentlichen Tangentialkegel an, ihre Gesammtheit erfüllt vier Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten eben die vier in A_3 gelegenen Geraden der Fläche F sind. *Als Enveloppe betrachtet ist also unser Tangentenkegel von der vierten Classe***), *und die Ebene A_3 ist als vierfache Tangentialebene dieses Kegels anzusehen.* Der Tangentenkegel zweiten Grades der Fläche F im Clospunkte A_1 degenerirt in das zweimal gezählte Ebenenbüschel, welches die singuläre Tangente $(\mathsf{A}_3 q)$ zur Scheiteltangente hat.

---

*) Zu dem Orte der Tangenten von F aus A_1 gehören noch unendlich oft gezählt die vier Geraden a_i.

**) Zur Enveloppe der Tangentialebenen F aus A_1 ist auch die unendlich oft gelegte Ebene q zu zählen.

IV.

Ebene Curven.

1. *Gerade Linien.*

Die Coordinatenverhältnisse eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie eines Punktes A_1^* des Cuspidalkegelschnittes mit einem Punkte $Y(y_i)$ der Fläche F sind gegeben durch

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda y_1 + \mu : \lambda y_2 : \lambda y_3 : \lambda y_4.$$

Zur Bestimmung des Parameterverhältnisses $\frac{\lambda}{\mu}$ für den vierten Schnittpunkt der Geraden $A_1^* Y$ mit F erhält man durch Substitution dieser Werthe in $F^* = 0$ (Seite 295) die Gleichung:

$$\lambda(2y_1y_3^2 - 2y_2^2y_3 - 2my_3y_4^2 + a_1y_4^3) + \mu y_3^2 = 0.$$

Soll nun die Gerade $A_1^* Y$ ganz der Fläche F angehören, so muss das aus dieser Gleichung resultirende Parameterverhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ unbestimmt werden, was dann geschieht, wenn die beiden Bedingungen:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_3 = 0$$

erfüllt sind, das heisst wenn A_1^* einer der Clospunkte ist, Y dagegen in der zugehörigen singulären Tangentialebene liegt. Wir bekommen die auf Seite 299 schon gefundenen acht Geraden wieder und keine anderen.

Die Configuration dieser Geraden ist eine möglichst einfache. Vier von ihnen a_1, a_2, a_3, a_4 gehen durch den Clospunkt A_1 und liegen in der Ebene A_3, die vier andern b_1, b_2, b_3, b_4 gehen durch A_3 und liegen in A_1, so jedoch, dass a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3, a_4 und b_4 sich in der Geraden $(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3)$ schneiden. Irgend zwei Gerade a_i, a_k oder b_i, b_k oder a_i, b_i schneiden sich, irgend zwei Gerade a_i, b_k sind windschief.

Die vier Ebenen a_ib_i sind als dreifach-, die Ebenen A_1 und A_3 dagegen als vierfach-berührende Ebenen unserer Fläche F zu betrachten.

In Bezug auf die Realität dieser Geraden sind drei Fälle zu unterscheiden; entweder sind alle acht Geraden reell, oder vier Gerade, welche ein windschiefes Viereck bilden, sind reell, die vier andern imaginär, oder endlich alle acht Geraden sind imaginär.

2. *Kegelschnitte.*

Um zu den auf der Fläche F liegenden Kegelschnitten zu gelangen, benutze ich den von Herrn Kummer in der Seite 291 citirten Abhandlung für die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt angegebenen Weg.

Ich denke mir die Gleichung der Fläche in der Form

$$U^2 + np^3q = 0$$

gegeben und schreibe dafür

$$(U + \lambda p^2)^2 = p^2\,[\lambda^2 p^2 + 2\lambda U - npq] = p^2 B_\lambda.$$

Jeder im Flächensystem B_λ enthaltene Kegel — ein Kummer'scher Kegel — berührt die Fläche F, wo er sie trifft; jede seiner Tangentialebenen schneidet aus F eine Curve vierter Ordnung mit Osculationsknoten im Cuspidalkegelschnitt und mit einem weiteren Doppelpunkte heraus, also ein Kegelschnittpaar.

Unter Zugrundelegung eines Coordinatensystemes (A_1, A_2, A_3, A_4, E) ist die Gleichung der Fläche F

$$x_2^4 - 2x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2 + 2mx_2^2x_4^2 - 2mx_1x_3x_4^2 + nx_2x_4^3 + (m^2 - n)x_4^4 = 0.$$

Die Gleichung von B_λ

$$2\lambda x_2^2 + (\lambda^2 + 2\lambda m + n)x_4^2 - 2\lambda x_1x_3 - nx_2x_4 = 0$$

und die Bedingung für λ, unter welcher $B_\lambda = 0$ eine Kegelfläche darstellt, ist

$$\lambda^2[8\lambda(\lambda^2 + 2\lambda m + n) - n^2] = 0.$$

Der Doppelwurzel $\lambda = 0$ entspricht die singuläre Tangentialebene q, zusammen mit der Ebene p des Cuspidalkegelschnittes als Kummer'scher Kegel. Die reducirte Gleichung

(5) $$f(\lambda) \equiv 8\lambda^3 + 16m\lambda^2 + 8n\lambda - n^2 = 0$$

hat drei verschiedene Wurzeln, denen wirkliche Kegel entsprechen.

Es giebt also sechs einfach unendliche Schaaren von Kegelschnitten auf der Fläche F, deren Ebenen die drei Kummer'schen Kegel umhüllen, und zwei einfach unendliche Schaaren, deren Ebenen das Büschel pq bilden. Letztere sind die aus dem Früheren schon bekannten Schaaren der Kegelschnitte K_λ und $K_{-\lambda}$.

Bezeichnet μ irgend eine von den drei Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$, so ist

$$B_\mu \equiv 16\mu^2x_2^2 + n^2x_4^2 - 8\mu n x_2x_4 - 16\mu^2x_1x_3 = 0$$

die Gleichung eines Kummer'schen Kegels, er berührt die Ebenen A_1 und A_3, sein Scheitel S_μ liegt also auf der Schnittlinie dieser Ebenen und die Coordinatenverhältnisse desselben sind gegeben durch

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : n : 0 : 4\mu.$$

Bezeichnet A die Ebene, welche die beiden Clospunkte A_1 und A_3 mit dem Scheitel S_μ verbindet, so ist

$$E_\varrho \equiv \mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}\varrho + \mathsf{A}_3\varrho^2 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Tangentialebene dieses Kegels und

$$A^2 - A_1 A_3 = 0$$

die Gleichung dieses Kegels selbst. Für den Schnitt der Ebene E_ϱ mit der Fläche E wird $B_\mu = (A + \varrho A_3)^2$ und unter Berücksichtigung des aus $B_\mu = \mu^2 p^2 + 2\mu U - npq$ gezogenen Werthes von $U_\mu = U + \mu p^2$ zerfällt die Gleichung

$$U_\mu{}^2 - p^2 B_\mu = 0$$

der Fläche F in die beiden Gleichungen

$$(A + \varrho A_3 + \mu p)^2 + npq = 0, \quad (A + \varrho A_3 - \mu p)^2 + npq = 0.$$

Die Verbindung einer jeden derselben mit der Gleichung $E_\varrho = 0$ repräsentirt eine Kegelschnittschaar K_ϱ der Fläche F.

Nennt man zwei Kegelschnitte conjugirt, wenn sie in derselben Ebene E_ϱ liegen, so werden conjugirte Kegelschnitte K_ϱ und $K_\varrho{}^*$ durch die Paare von Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 + 2A\varrho + A_3\varrho^2 &= 0, \quad (A + \varrho A_3 + \mu p)^2 + npq = 0, \\ A_1 + 2A\varrho + A_3\varrho^2 &= 0, \quad (A + \varrho A_3 - \mu p)^2 + npq = 0 \end{aligned}$$

dargestellt. Für $A_1 = 0$ gehen diese Gleichungen über in

$$\begin{aligned} 2A + \varrho A_3 &= 0, \quad (A - \mu p)^2 + npq = 0, \\ 2A + \varrho A_3 &= 0, \quad (A + \mu p)^2 + npq = 0; \end{aligned}$$

für $A_3 = 0$ gehen sie über in

$$\begin{aligned} A_1 + 2A\varrho &= 0, \quad (A + \mu p)^2 + npq = 0, \\ A_1 + 2A\varrho &= 0, \quad (A - \mu p)^2 + npq = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Ein Paar conjugirter Kegelschnitte schneidet alle acht Geraden der Fläche F *und zwar der Kegelschnitt* K_ϱ *die Geraden* a_i, a_k, b_l, b_m, $K_\varrho{}^*$ *dagegen die Geraden* b_i, b_k, a_l *und* a_m.

Nennt man zwei Kegelschnittschaaren, deren Ebenen denselben Kummer'schen Kegel der Fläche F umhüllen, conjugirt, so werden Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren durch das Gleichungensystem

$$\begin{aligned} A_1 + 2A\varrho + A_3\varrho^2 &= 0, \quad (A + \varrho A_3 + \mu p)^2 + pq = 0, \\ A_1 + 2A\sigma + A_3\sigma^2 &= 0, \quad (A + \sigma A_3 - \mu p)^2 + pq = 0 \end{aligned}$$

dargestellt. Ganz ähnliche Rechnungen und Ueberlegungen, wie sie Herr Korndörfer*) für die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt und einem Knotenpunkte angewendet hat, führen in Bezug auf das gegenseitige Verhalten der auf den Tangentialebenen der drei Kummer'schen Kegel gelegenen Kegelschnitte zu folgenden Resultaten:

---

*) G. Korndörfer: „Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten". Math. Annalen Bd. I, pag. 592.

Zwei Kegelschnitte derselben Schaar haben keinen Punkt gemein. Zwei Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren schneiden sich in zwei Punkten. Conjugirte Kegelschnitte osculiren sich im Berührungspunkte ihrer Ebene mit dem Cuspidalkegelschnitt und schneiden sich noch einmal in der durch den Osculationspunkt gehenden Erzeugenden des zugehörigen Kummer'schen Kegels. Der Ort dieser vierten Schnittpunkte ist der Kegelschnitt K_μ, längs welchem die Fläche F von dem Kegel B_μ berührt wird. Die Tangente im Osculationspunkt zählt für drei gemeinsame Tangenten der beiden conjugirten Kegelschnitte, die vierte ist die Schnittlinie ihrer Ebene mit der Ebene q. Die Gesammtheit dieser vierten Tangenten umhüllt einen Kegelschnitt, welcher den Kegelschnitt (Uq) doppelt berührt, die Spur des Kegels B_μ in der Ebene q.

Denkt man sich die beiden Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes K aus der Spitze des zugehörigen Kummer'schen Kegels, so sieht man, dass K in jedem dieser Punkte von einem Kegelschnitt der conjugirten Schaar berührt wird. Die Orte dieser Berührungspunkte sind die Berührungskegelschnitte der beiden Tangentenkegel zweiten Grades, welche von der Spitze des betrachteten Kummer'schen Kegels ausser diesem selbst noch an die Fläche F gehen.

Mit Bezug auf die Kegelschnitte K_λ, $K_{-\lambda}$ der beiden letzten Schaaren ist zu bemerken, *dass ein beliebiger von ihnen jeden Kegelschnitt derselben Schaar und auch jeden der conjugirten Schaar in zwei Punkten schneidet, seinen conjugirten aber zweimal berührt; ferner dass ein jeder dieser Kegelschnitte mit einem beliebigen Kegelschnitte der auf den Tangentialebenen der drei Kummer'schen Kegel gelegenen Schaaren je einen Punkt gemein hat.*

Es kommt in jedem der drei ersten Paare von conjugirten Schaaren zweimal vor, dass zwei conjugirte Kegelschnitte gleichzeitig in Linienpaare degeneriren (in den Ebenen A_1 und A_3), jedoch keinmal, dass von zwei conjugirten Kegelschnitten nur der eine zerfällt. In den Schaaren K_λ, $K_{-\lambda}$ kommt es viermal vor, dass von zwei conjugirten Kegelschnitten der eine in zwei gerade Linien zerfällt (in den Ebenen $a_i b_i$), ein gleichzeitiges Zerfallen von zwei conjugirten Kegelschnitten findet aber niemals statt. In den letzteren Schaaren fallen zweimal zwei conjugirte Kegelschnitte zusammen (in den Ebenen p und q), was bei den ersteren unmöglich ist.

Zu bemerken ist noch, dass die beiden Kegelschnittschaaren K_λ und $K_{-\lambda}$ nicht eigentlich verschieden sind, sondern dass bei Variation des Parameters λ von $-\infty$ bis $+\infty$ ein beliebiger Kegelschnitt K_λ sowohl der Schaar

$$U + \lambda p^2 = 0, \qquad \lambda^2 p + q = 0,$$

als auch der Schaar

$$U - \lambda p^2 = 0, \qquad \lambda^2 p + q = 0$$

angehört. Die Schaar K_λ ist sich selbst conjugirt und kann so doppelt gezählt als Vereinigung von zwei Kegelschnittschaaren der Fläche F angesehen werden. Das kennzeichnet sich auch in dem Umstande, dass von den acht Kegelschnitten, welche durch einen beliebigen Punkt P der Fläche F hindurchgehen, drei Paare, — entsprechend den Tangentialebenen von P an die drei Kummer'schen Kegel —, aus verschiedenen Kegelschnitten bestehen, während die beiden des letzten Paares, entsprechend den Ebenen $(P, pq)^2$ zusammenfallen.

3. *Curven dritter Ordnung.*

Jede ebene Curve dritter Ordnung, welche ganz auf der Fläche F liegt, wird durch eine gerade Linie a_i oder b_i zu einem vollständigen ebenen Querschnitt derselben ergänzt, *es gibt also acht einfach unendliche Schaaren von ebenen Curven* C_{a_i} $[C_{b_i}]$ *dritter Ordnung auf unserer Fläche*, ihre Ebenen vertheilen sich auf die acht Ebenenbüschel, deren Scheitelkanten die acht Geraden der Fläche F sind.

Jede Curve C_{a_i} berührt die Gerade a_i in A_1, schneidet sie noch in einem dritten Punkt und hat im zweiten Schnittpunkt ihrer Ebene mit dem Cuspidalkegelschnitt einen Rückkehrpunkt. Sie trifft die drei anderen Geraden a_k in A_1 und von den Geraden b jede — ausgenommen b_i, welche sie gar nicht schneidet — in je einem Punkte.

C_{a_i} trifft von den Kegelschnitten der sechs ersten Schaaren jeden, der von a_i geschnitten wird, in einem, jeden andern in zwei Punkten; von den Kegelschnitten K_λ jeden in zwei Punkten.

Zwei Curven, deren Ebenen demselben Büschel a_i angehören, berühren sich in A_1 und haben keinen weiteren Punkt gemein. Curven aus zwei Büscheln, deren Scheitelkanten ein Paar $a_i a_k$ bilden, schneiden sich in drei Punkten, von denen A_1 der eine ist. Bilden die Scheitelkanten ein Paar $a_i b_i$, so schneiden sich zwei Curven aus diesen beiden Büscheln in drei Punkten, von denen keiner in den Punkt $(a_i b_i)$ hineinfällt. Curven aus zwei Büscheln, deren Scheitelkanten windschief sind, schneiden sich in zwei Punkten.

Jede dieser acht Schaaren von Curven dritter Ordnung enthält einmal eine Gerade mit einem sie berührenden Kegelschnitte und einmal drei durch einen Punkt gehende Geraden als specielle Curven dritter Ordnung.

V.

Involutorische Eigenschaften und einige Specialfälle.

Einige involutorische Eigenschaften der Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt, ihrer ebenen Querschnitte und umgeschriebenen Kegelflächen, sowie einige Specialfälle der allgemeinen Fläche will ich hier anschliessen. Die involutorischen Eigenschaften finden ihre Begründung einerseits in der doppelten Berührung conjugirter Paare der beiden auf dem Ebenenbüschel pq gelegenen Kegelschnittschaaren K_λ, andererseits in der gegenseitigen doppelten Berührung der drei von einem beliebigen Punkte der Geraden A_2A_4 an die Fläche F gehenden Berührungskegel. Die speciellen Flächen erhalte ich, indem ich zuerst zwei, dann alle drei Kummer'schen Kegel zusammenfallen lasse.

Ist C ein beliebiger Punkt auf der Geraden (pq) und S seine Polarebene in Bezug auf die Fläche U, in diesem Falle gleichzeitig auch in Bezug auf die Fläche F, so schneidet ein beliebiger Strahl c durch C aus der Fläche F vier Punkte heraus, zwei Punktepaare einer Involution, deren stets reelle Doppelpunkte C und der Schnittpunkt von c mit S sind; andererseits gehen durch jede Gerade s der Ebene S sechs Tangentialebenen an die Fläche F, drei Ebenenpaare einer Involution, deren stets reelle Doppelebenen S und die Ebene (sC) sind. Ist c eine Tangente der Fläche F, so liegen die beiden zusammenfallenden Schnittpunkte von c mit F auf S, ist dagegen s eine Tangente der Fläche F, so gehen die beiden zusammenfallenden Tangentialebenen von s an F durch den Punkt C. Also:

Die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt ist in involutorischer Centralcollineation mit sich selbst in Bezug auf einen beliebigen Punkt C der Verbindungslinie ihrer Clospunkte als Collineationscentrum und seiner Polarebene S als Collineationsebene.

Für den unendlich fernen Punkt der Geraden A_1A_3 übergeht die involutorische Centralcollineation in Symmetrie in Bezug auf die Ebene M, welche die Mitte M der Strecke A_1A_3 mit der Schnittlinie der Ebenen A_1 und A_3 verbindet.

Eine beliebige Ebene E schneidet die Gerade A_1A_3 in einem Punkte C, die Polarebene von C in einer Geraden s, die Fläche F in einer Curve C_4 und aus dem Vorigen folgt:

C_4 ist in involutorischer Centralcollineation mit sich selbst in Bezug auf C als Collineationscentrum und s als Collineationsaxe.

Ein beliebiger Punkt P des Raumes bestimmt mit der Geraden $(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3)$ eine Ebene S, mit dem Pol von S einen Strahl c, mit der Fläche F einen Tangentenkegel T und man hat:

Der Tangentenkegel T ist in involutorischer Centralcollineation (im Bündel) mit sich selbst in Bezug auf S als Collineationsebene und c als Collineationsstrahl.

Geht die schneidende Ebene E durch den unendlich fernen Punkt der Geraden A_1A_3 hindurch, so wird die Gerade (EM) Symmetrieaxe der Schnittcurve C_4. Ist dagegen die Ebene E parallel zur zugehörigen Ebene S, so wird die Schnittcurve symmetrisch in Bezug auf den

Punkt C. Durch jeden Punkt der Geraden A_1A_3 geht eine einzige dieser Ebenen hindurch, ihre Gesammtheit umhüllt einen parabolischen Cylinder, der die unendlich ferne Gerade der Ebene M zur Erzeugenden hat, die Gerade A_1A_3 in M berührt und ausserdem noch die Ebenen A_1 und A_3 als Tangentialebenen besitzt.*) Zu den Tangentialebenen dieses Cylinders gehört auch die unendlich ferne Ebene, die Symmetrie ihres Querschnittes mit der Fläche F in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der Geraden A_1A_3 überträgt sich auf den projicirenden Kegel dieses Querschnittes.

Der Tangentenkegel aus einem Punkte P an die Fläche F wird symmetrisch in Bezug auf eine Axe, wenn die Ebene (PA_2A_4) also S auf dem zugehörigen Strahl c senkrecht steht. Der Ort aller Punkte, für welche diese Bedingung erfüllt ist, ist eine ebene circulare Curve dritter Ordnung, deren Ebene N durch die Gerade A_1A_3 hindurchgeht und auf der Geraden A_2A_4 senkrecht steht. Diese Curve hat den Schnittpunkt T der Ebene N mit der Geraden A_2A_4 zum Doppelpunkt mit den Halbirungslinien des Winkels $(\mathsf{NA}_1, \mathsf{NA}_3)$ als Doppelpunktstangenten und geht ausserdem noch durch die Punkte A_1, A_3, durch den Fusspunkt des Perpendikels von T auf A_1A_3, endlich noch durch den unendlich fernen Punkt der Geraden MN hindurch.

Eine beliebige Transversale der Geraden A_1A_3 und $\mathsf{A}_3\mathsf{A}_1$ schneidet aus der Fläche F vier Punkte heraus, zwei Punktepaare einer Involution, deren stets reelle Doppelpunkte die Schnittpunkte der Transversalen mit den genannten Geraden sind. Durch eine solche Transversale hindurch gehen an die Fläche F sechs Tangentialebenen, drei Ebenenpaare einer Involution, deren stets reelle Doppelebenen die Verbindungsebenen dieser Transversalen mit denselben vorhingenannten Geraden sind, das heisst:

Die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt ist in involutorischer geschaarter Collineation mit sich selbst in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden Clospunkte A_1, A_3 *und die Schnittlinie der singulären Tangentialebenen* A_3, A_1 *in ihnen als Axen.*

Sind die Ebenen A_1 und A_3 parallel, so wird unsere Fläche F symmetrisch in Bezug auf die Axe A_1A_3.

Die allgemeinste Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt ist also symmetrisch in Bezug auf eine Ebene M, die speciellere mit parallelen Ebenen A_1 und A_3 ist ausserdem auch noch symmetrisch in Bezug auf ein Centrum M und in Bezug auf eine Axe $A_1 A_3$.

---

*) Die Betrachtung der Spuren dieses Cylinders und der Fläche F in der Ebene des Cuspidalkegelschnittes ergiebt den Satz:

Die Gesammtheit aller Sehnen eines Kegelschnittes, welche durch eine feste Sehne desselben halbirt werden, umhüllt eine Parabel, welche die gegebene Sehne in ihrer Mitte berührt und mit dem gegebenen Kegelschnitt die Tangenten im Endpunkte dieser Sehne und endlich noch den dieser Sehne conjugirten Durchmesser gemein hat.

Soviel über Symmetrieeigenschaften, ich wende mich nun zur Betrachtung von Specialfällen unserer Fläche.

Im Allgemeinen wird die Gleichung $f(\lambda) = 0$ (Seite 306) drei verschiedene Wurzeln haben, also werden die drei Kummer'schen Kegel B_μ der Fläche F verschieden sein. Sollen nun zwei dieser Kegel zusammenfallen, so muss die Gleichung $f(\lambda) = 0$ zwei gleiche Wurzeln haben, also ihre Discriminante verschwinden. Die dadurch entstehende Gleichung ist:

$$(6)\quad f(m, n) \equiv 256m^3 + 256m^2 - 288mn - 256n - 27n^2 = 0,$$

sie ist identisch mit der Bedingung, unter welcher zwei Paare $a_i b_i$ von Geraden der Fläche F zusammenfallen. Setzt man nämlich in der Gleichung (3) der Fläche F, x_3 oder x_1 gleich Null, so erhält man

$$f(x_2, x_4) \equiv x_2^4 + 2mx_2^2x_4^2 + nx_2x_4^3 + (m^2 - n)x_4^4 = 0$$

das Product der Gleichungen der vier Ebenen durch $A_1 A_3$, welche aus F Geradenpaare herausschneiden. Die Bedingung, unter welcher $f(x_2, x_4)$ einen quadratischen Factor enthält, also zwei von den vier durch $f(x_2, x_4) = 0$ dargestellten Ebenen zusammenfallen, ist das Verschwinden der Discriminante dieser Function, und diese Discriminante ist abgesehen von einem Zahlenfactor *identisch* mit dem Ausdruck $f(m, n)$. Jedesmal wenn zwei Kummer'sche Kegel der Fläche F zusammenfallen, fallen also auch zwei Paare $a_i b_i$ von Geraden zusammen in den Verbindungslinien der Spitze D dieser Kegel mit den Punkten A_1 und A_3, ebenso umgekehrt. Der Punkt D wird ein Doppelpunkt der Fläche F und der Tangentenkegel zweiten Grades in ihm berührt die Ebenen A_3 und A_1 längs den Verbindungslinien von D mit A_1 und A_3 respective.

In dem zweifach unendlichen System $F_{m,n}$ giebt es also einfach unendlich viele Flächen F^D, welche ausser dem Cuspidalkegelschnitt einen Doppelpunkt auf der Geraden $A_2 A_4$ haben, Gleichung (6) zeigt ihre Vertheilung auf die Büschel und einfach unendlichen Systeme von $F_{m,n}$; jedes Büschel F_m enthält zwei, jedes einfach unendliche System F_n dagegen drei Flächen mit Doppelpunkt.

Ertheilt man dem Parameter n einen speciellen Werth n_1, so erhält man aus der Gleichung $f(m, n_1) = 0$ die drei Werthe von m, denen die drei Flächen $F_{n_1}^D$ des Systemes F_{n_1} entsprechen. Analog erhält man für einen speciellen Werth m_1 von m aus der in n quadratischen Gleichung $f(m_1, n) = 0$ diejenigen zwei Werthe von n, welche die beiden Flächen $F_{m_1}^D$ des Büschels F_{m_1} ergeben. Bezeichnet Δ_m die Discriminante der in m cubischen Gleichung $f(m, n_1) = 0$, so findet man:

$$\Delta_m = 256 \cdot 256\,(27 n_1 - 64)^3, \quad \text{daraus} \quad n_1 = \frac{64}{27}$$

als einzigen Werth von n, für welchen zwei Flächen F_n^D eines Systemes F_n zusammenfallen. Die Gleichung $f\left(m, \frac{64}{27}\right) = 0$ ergiebt dann als zugehörige Werthe von m

$$m = -\frac{4}{3}, \quad m = -\frac{4}{3}, \quad m = +\frac{5}{3}.$$

Die Substitution von $m = -\frac{4}{3}$, $n = \frac{64}{27}$ führt die Gleichung $f(\lambda) = 0$ in

$$(9\lambda - 8)^3 = 0$$

über, für diese Fläche fallen also alle drei Kummer'schen Kegel zusammen, sie ist die einzige Fläche des Systemes $F_{m,n}$, für welche dies stattfindet, und soll durch F^B bezeichnet werden.*)

Die Gleichung dieser Fläche ist

$$27 x_2^4 - 54 x_1 x_2^2 x_3 + 27 x_1^2 x_3^2 - 72 x_2^2 x_4^2 + 72 x_1 x_3 x_4^2 + 64 x_2 x_4^3 - 16 x_4^4 = 0$$

und der Scheitel B ihres für drei zählenden Kummer'schen Kegels ist durch die Coordinatenverhältnisse

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 2 : 0 : 3$$

gegeben, bezeichnet man also den Schnittpunkt der Ebene q und der Geraden $A_2 A_4$ mit Q, so ist das Doppelverhältniss

$$(A_2 A_4 Q B) = \frac{2}{3}.$$

Verlegt man die Fundamentalecke A_4 in den Punkt B, indem man alle anderen Fundamentalelemente des Coordinatensystemes ungeändert lässt, so geschieht diese Coordinatentransformation mittelst der linearen Substitution

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = \frac{1}{3} x_2' + \frac{2}{3} x_4' \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = x_4'$$

---

*) Die Discriminante der Gleichung $(f m_1, n) = 0$ hat den Werth

$$\Delta_n = 4 \cdot 256 \cdot (3 m_1 + 4)^3,$$

man findet

$$m_1 = -\frac{4}{3}$$

als einzigen Werth von m, für welchen beide Flächen eines Büschels F_m zusammenfallen, und erhält als entsprechende zusammenfallende Werthe von n aus der Gleichung $f\left(-\frac{4}{3}, n\right) = 0$

$$n = \frac{64}{27},$$

also dieselbe Fläche F^B.

und als transformirte Gleichung der Fläche F^B erhält man

$$x_2^4 - 18x_1x_2^2x_3 + 81x_1^2x_3^2 + 8x_2^3x_4 - 72x_1x_2x_3x_4 + 144x_1x_3x_4^2 = 0.$$

Die Fläche F^B hat im Punkte B einen biplanaren Doppelpunkt, der Tangentenkegel zweiten Grades in ihm zerfällt in das Ebenenpaar $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3$.

VI.

Hesse'sche Kernfläche.

Die Hesse'sche Kernfläche der Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt zerfällt, wie schon Seite 301 gezeigt wurde, in die Fläche U zweiten Grades und in eine Fläche H sechster Ordnung. Die Gleichung der Fläche H kann mit den Abkürzungen

$$\frac{3}{8m} = a, \quad \frac{3a_2^2 - 12a_1a_3}{16m} = b$$

und mit $\mathsf{A}_1 = 0$, $\mathsf{A}_3 = 0$ als Gleichungen der Ebenen A_1 und A_3 auf die Form

$$H \equiv U^3 + p[4an(a_4p+q)U^2 - np^2(bnp+2q)U + an^2p^3\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3] = 0$$

oder

$$H \equiv U^3 + p\mathsf{E} = 0$$

gebracht werden. Schreibt man dafür

$$(U + \lambda p^2)^3 = p[\lambda^3p^5 + 3\lambda^2Up^3 + 3\lambda U^2p - \mathsf{E}]$$

oder

$$U_\lambda^3 = p\mathsf{E}_\lambda$$

so erkennt man die Fläche H als *stationäre Enveloppe* eines einfach unendlichen Systemes von Flächen fünfter Ordnung. Jede Fläche E_λ dieses Systemes osculirt die Fläche H längs der Raumcurve, welche aus ihr durch die Fläche U_λ herausgeschnitten wird. Diese Raumcurve zerfällt in den dreimal zu zählenden Cuspidalkegelschnitt (Up) und in zwei andere Kegelschnitte, welche als Durchdringung der Flächen zweiten Grades $U_\lambda = 0$ und

$$(\lambda^3 - 4aa_4n\lambda^2 - bn^2\lambda)p^2 - 2n\lambda(1 + a\lambda)pq - an^2\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3 = 0$$

erscheinen. Die Bedingung dafür, dass diese beiden Kegelschnitte zusammenfallen, ergiebt für λ eine biquadratische Gleichung, woraus folgt, dass es vier Flächen des Systemes E_λ giebt, welche H längs je einem Kegelschnitt sechspunktig berühren.

Unter Zugrundelegung eines Coordinatensystemes (A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4, E^*) mit $n = 1$ lautet die entwickelte Gleichung der Fläche H

$$\begin{aligned}16mx_1^3x_3^3 - 24a_1x_1^3x_3^2x_4 - 24a_3x_1^2x_3^3x_4 - 48mx_1^2x_2^2x_3^2 \\ - 48(m^2 + a_4)x_1^2x_3^2x_4^2 - 24a_2x_1^2x_2x_3^2x_4 + 48a_1x_1^2x_2^2x_3x_4 \\ + 16a_1mx_1^2x_3x_4^3 + 48a_3x_1x_2^2x_3^2x_4 + 16a_3mx_1x_3^2x_4^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+48 m x_1 x_2^4 x_3 + 48 a_2 x_1 x_2^3 x_3 x_4 + 96 (m^2 + a_4) x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 \\
&+16 a_2 m x_1 x_2 x_3 x_4^3 + (24 a_1 a_3 - 9 a_2^2 + 48 m^3 + 64 a_4 m) x_1 x_3 x_4^4 \\
&-6 a_1^2 x_1^2 x_4^4 - 6 a_3^2 x_3^2 x_4^4 - 24 a_1 x_1 x_2^4 x_4 - 16 a_1 m x_1 x_2^2 x_4^3 \\
&-12 a_1 a_2 x_1 x_2 x_4^4 + 8 a_1 m^2 x_1 x_4^5 - 24 a_3 x_2^4 x_3 x_4 - 16 a_3 m x_2^2 x_3 x_4^3 \\
&-12 a_2 a_3 x_2 x_3 x_4^4 - 16 m x_2^6 - 24 a_2 x_2^5 x_4 - 48 (m^2 + a_4) x_2^4 x_4^2 \\
&-16 a_2 m x_2^3 x_4^3 + (3 a_2^2 - 36 a_1 a_3 - 64 a_4 m - 48 m^3) x_2^2 x_4^4 \\
&+8 a_2 m^2 x_2 x_4^5 + (3 a_2^2 m - 12 a_1 a_3 m - 16 a_4 m^2 - 16 m^4) x_4^6 = 0.
\end{aligned}
$$

Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von x_1 oder x_3, so erhält man

$$x_1^3 \cdot 8 x_3^2 (2 m x_3 - 3 a_1 x_4) + x_1^2 \cdot u^{(4)} + x_1 \cdot u^{(5)} + u^{(6)} = 0$$

beziehungsweise

$$x_3^3 \cdot 8 x_1^2 (2 m x_1 - 3 a_2 x_4) + x_3^2 \cdot v^{(4)} + x_3 \cdot v^{(5)} + v^{(6)} = 0,$$

wo die Grössen $u^{(i)}$ und $v^{(i)}$ homogene Functionen i^{ten} Grades in den Variablen x_2, x_3, x_4 respective x_1, x_2 und x_4 bedeuten.

Ein beliebiger Punkt A_1^* [A_3^*] des Cuspidalkegelschnittes der Fläche F ist ein dreifacher Punkt für die Fläche H. Von den drei Tangentialebenen der Letzteren in einem solchen Punkte fallen zwei mit der zugehörigen Tangentialebene A_3^* [A_1^*] des Kegels K zusammen, die dritte Ebene T_1 [T_3] ist von dieser verschieden und geht durch die zugehörige Tangente des Cuspidalkegelschnittes hindurch. Die Schnittlinie der Ebenen T_1 und T_3 in zwei beliebigen Punkten des Cuspidalkegelschnittes trifft die Gerade $A_2 A_4$ in einem Punkte T, dessen Coordinatenverhältnisse durch

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 a_3 : - a_2 : 2 a_1 : - \frac{4m}{3}$$

gegeben sind. *Wenn nun von beliebig vielen Ebenen* (T_i) *die Schnittlinie von je zweien* (T_1 und T_3) *derselben eine feste Gerade* ($A_2 A_4$) *schneidet, so gehen sie alle durch einen und denselben Punkt* (T) *dieser Geraden hindurch. Die Tangentialebenen der Fläche H in den Punkten des Cuspidalkegelschnittes umhüllen also zweimal den Kegel K und einmal einen andern Kegel zweiten Grades, dessen Scheitel T auf der Geraden $A_2 A_4$ liegt.*

Den allgemeinsten ebenen Querschnitt der Fläche H giebt eine Ebene $\mathsf{P} \equiv A_1^* A_3^* E^*$; der Verlauf seiner vierten Projection in der Nähe des Punktes A_1^* wird für $\frac{x_2}{x_1} = x$, $\frac{x_3}{x_1} = y$ durch die beiden Gleichungen

$$y = \frac{3 a_1}{2 m} x \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{- a_1}\, x^{\frac{3}{2}}$$

dargestellt, das heisst die Schnittcurve hat in A_1^* einen dreifachen Punkt, der durch einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt und einen einfach durch denselben hindurchgehenden Ast gebildet wird. Die Rückkehrtangente in diesem Punkte ist die Schnittlinie der Ebenen P und A_3^*, die Tangente an den einfachen Ast ist die Schnittlinie der Ebene P und der zugehörigen Ebene T_1. *Die Fläche. H hat also den Kegelschnitt (Up) zur Cuspidalcurve mit K als Rückkehrkegel und geht nochmals einfach durch ihn hindurch.*

Für $a_1 = 0$, also für einen ebenen Schnitt durch den Clospunkt A_1 haben wir zur Darstellung der vierten Projection der Schnittcurve in der Nähe des Punktes A_1 — für $\frac{x_2}{x_1} = x$ und $\frac{x_3}{x_1} = y$ — die Gleichungen:

$$y = \alpha_1 x^2, \quad y = \alpha_2 x^2, \quad y = \alpha_3 x^2$$

in welchen α_1, α_2 und α_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

sind, deren Coefficienten a, b, c nur die Grössen a_2, a_4 und m enthalten. Eine beliebige Ebene durch einen Clospunkt der Fläche F schneidet aus der Fläche H eine Curve sechster Ordnung heraus, welche in diesem Punkte einen *dreifachen Berührungsknoten* besitzt, das heisst drei Aeste der Curve berühren sich gegenseitig in ihm.

Setzt man auch $a_3 = 0$, betrachtet man also den Querschnitt einer Ebene durch beide Clospunkte der Fläche F, so ergiebt die Substitution von $x_4 = x_2$ in $H = 0$ — wenn A, B und C nur von a_2, a_4 und m abhängige Constanten bedeuten — die Gleichung

$$(x_1 x_3)^3 + A(x_1 x_3)^2 x_2^2 + B(x_1 x_3)(x_2^2)^2 + C(x_2^2)^3 = 0,$$

das heisst die Schnittcurve zerfällt in drei Kegelschnitte, welche sich gegenseitig und die Ebenen A_3 und A_1 in den respectiven Punkten A_1 und A_3 berühren.

Aus diesem letzten Ergebniss folgt ohne weiteres, dass jede Fläche zweiten Grades, welche die Ebenen A_3 und A_1 in den Punkten A_1 und A_3 berührt, aus der Fläche H sechs Kegelschnitte herausschneidet, die alle durch die Punkte A_1 und A_3 hindurchgehen und dort die Ebenen A_3 und A_1 berühren. Es folgt ferner daraus, dass auch die Durchdringungscurve der Flächen F und H in Kegelschnitte zerfällt, welche durch dieselben Punkte hindurchgehen und in ihnen dieselben Ebenen berühren.

Die Curve der parabolischen Punkte der Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt ist die Durchdringungscurve der Letzteren mit ihrer Hesse'schen Fläche, also von der Ordnung zwei und dreissig. Sie besteht zunächst aus dem vollständigen Durchschnitt der Flächen F und U, also aus dem dreimal gezählten Cuspidalkegelschnitt und dem Kegelschnitt (Uq). Der zweite Theil, von der Ordnung vierundzwanzig, ist die Durchdringung der Flächen F und H, in derselben ist der Cuspidalkegelschnitt achtmal zu zählen, der Rest, *die eigentliche parabolische Curve der Fläche F besteht aus vier Kegelschnitten, von denen jeder die beiden Clospunkte enthält und die Ebenen* A_1 *und* A_3 *in ihnen berührt.*

Längs diesen vier Kegelschnitten sind der Fläche F vier Kegel zweiten Grades umgeschrieben, deren Spitzen auf A_2A_4 liegen, sie bilden die gesammte *eigentliche stationär umgeschriebene Developpable* der untersuchten Fläche.

Die Fläche H hat dieselben involutorischen Eigenschaften wie die Fläche F. *Sie ist in involutorischer Centralcollineation mit sich selbst in Bezug auf einen beliebigen Punkt C der Geraden A_1A_3 als Collineationscentrum und die zugehörige Ebene S als Collineationsebene; sie ist auch in involutorischer geschaarter Collineation mit sich selbst in Bezug auf die Axen A_1A_3 und A_2A_4.*

Wenn zwei Paare a_ib_i von Geraden der Fläche F zusammenfallen, letztere also auf der Geraden A_2A_4 einen Doppelpunkt D besitzt, so berührt H die Fläche F längs den Verbindungslinien von D mit den Clospunkten A_1 und A_3 und hat in D ebenfalls einen Doppelpunkt.

Besondere Erwähnung verdient noch das Verhalten der Hesse'schen Fläche für eine beliebige Fläche des Büschels $F_{m=0}$. Die Fläche H zerfällt hier nämlich in die Ebene p und in eine Fläche H^* fünfter Ordnung, deren Gleichung in einfachster Form

$$16x_1^2x_3^2x_4 - 8x_1^2x_2x_3^2 + 16x_1x_2^3x_3 - 32x_1x_2^2x_3x_4 - 3nx_1x_3x_4^3$$
$$- 8x_2^5 + 16x_2^4x_4 + nx_2^2x_4^3 = 0$$

ist. H^* hat den Kegelschnitt (Up) zum Cuspidalkegelschnitt mit K als Rückkehrkegel und schneidet die Ebene p noch in der Geraden A_1A_3, die sie als osculare Gerade nach der Ebene $x_2 - 2x_4 = 0$ enthält. Die Punkte A_1 und A_3 sind besondere dreifache Punkte von H^*, die Berührungskegel dritter Ordnung in ihnen zerfallen in die doppelt gelegte Ebene A_3 respective A_1 und in die Ebene $x_2 - 2x_4 = 0$. Ausser diesen dreifachen Punkten hat H^* in A_4 noch einen conischen Doppelpunkt, dessen Tangentenkegel zweiten Grades die Ebenen A_3 und A_1, und mit ihnen die Fläche H^* längs den respectiven Geraden A_4A_1 und A_4A_3 berührt.

Das Büschel $F_{m=0}$ enthält nur eine einzige Fläche mit Doppelpunkt, nämlich für den Parameterwerth $n = -\frac{256}{27}$. Die Ebene

$$3x_2 - 4x_4 = 0$$

schneidet aus A_2A_4 den Doppelpunkt der betrachteten Fläche F heraus, er ist auch ein Doppelpunkt der Fläche H^*.

VII.

Raumcurven.

Seite 294 wurde gezeigt, dass die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt in zwei von den Ebenen p und q gebildeten Scheitelwinkelräumen liegt und längs der Geraden (pq) nur in den Clospunkten zusammenhängt. Diese Eigenthümlichkeit der Fläche F zieht ein besonderes Verhalten der auf ihr gelegenen Raumcurven zu den Ebenen p und q nach sich, welches darin besteht, dass eine Curve ohne singulären Punkt in den Ebenen p und q, wenn sie von gerader Ordnung $2n$ ist, entweder jede derselben n-mal berührt und keinen der Clospunkte enthält, oder jede von ihnen $(n-1)$-mal berührt und durch jeden Clospunkt einmal hindurchgeht; dass sie aber jede dieser Ebenen n-mal berührt und durch einen der Clospunkte einmal hindurchgeht, wenn sie von ungerader Ordnung $2n+1$ ist. Dabei ist noch zu bemerken, dass diese Curven mit der Ebene p allemal auch den Cuspidalkegelschnitt berühren, dass aber in der Ebene q ein Berühren zwischen ihnen und dem Kegelschnitt (Uq) nicht nothwendig stattfinden muss. Diese einfachen Berührungen können einerseits mehrfach vereinigt Singularitäten der betrachteten Curven bilden und andererseits auch theilweise oder ganz durch singuläre Punkte der Letzteren absorbirt werden.

Wenn dagegen die auf der Fläche liegenden Curven die Clospunkte mehrmal durchsetzen, so ist für Curven von gerader Ordnung die Anzahl der durch jeden Clospunkt hindurchgehenden Curvenäste für beide gleichzeitig entweder gerade oder ungerade, für Curven von ungerader Ordnung dagegen ist diese Anzahl in dem einen Clospunkt gerade, in dem andern ungerade.

Die Realität der Clospunkte ist also nothwendige aber nicht hinreichende Bedingung für reelle Curven ungerader Ordnung auf unserer Fläche. Damit solche Curven wirklich auf ihr liegen können, muss ausser den Clospunkten mindestens eine, folglich vier von den acht Geraden der Fläche reell sein.

Ich wende mich nun zur Betrachtung specieller Raumcurven und beginne mit

Curven dritter Ordnung.

Man kann zweifach unendlich viele Flächen V zweiten Grades durch den Cuspidalkegelschnitt legen, welche noch eine Gerade a_i der Fläche F enthalten. Jede dieser Flächen berührt die Fläche U in A_1 und in einem andern Punkte P des Cuspidalkegelschnittes und durchdringt die Fläche F ausser in diesem Kegelschnitt und der Geraden a_i noch in einer Raumcurve dritter Ordnung. Diese Curve geht durch den Clospunkt A_1 hindurch, berührt den Cuspidalkegelschnitt in P und die Ebene q — (aber nicht den Kegelschnitt (Uq)) — im zweiten Schnittpunkte des Kegelschnittes (Uq) mit der Fläche V. Sie trifft mit Ausnahme von b_i jede Gerade der Fläche F einmal; von den Kegelschnitten der sechs ersten Schaaren K_ϱ jeden, welcher die Gerade a_i schneidet in einem, jeden andern in zwei Punkten und von den Kegelschnitten der Schaar K_λ jeden in zwei Punkten, von welchen einer mit A_1 zusammenfällt. Von den ebenen Curven dritter Ordnung schneidet die betrachtete Raumcurve eine C_{b_k} in zwei Punkten, eine C_{b_i} in drei Punkten, von denen keiner auf b_i liegt, eine C_{a_k} in drei Punkten, von denen einer mit A_1 zusammenfällt, endlich eine C_{a_i} in zwei Punkten, von denen einer in A_1 liegt.

Jeder der acht Geraden der Fläche F ist eine solche doppelt unendliche Schaar von Raumcurven dritter Ordnung zugeordnet.

Zwei Curven R_{a_i} und R_{b_k}, deren zugeordnete Geraden a_i respective b_k windschief sind, schneiden sich in zwei Punkten, Curven R_{a_i} und R_{b_i} haben drei Punkte gemein, Curven R_{a_i}, R'_{a_i} derselben Schaar haben ausser dem Clospunkt A_1 noch einen gemeinschaftlichen Punkt.

Curven vierter Ordnung.

Es giebt dreifach unendlich viele Flächen W zweiten Grades, welche durch den Cuspidalkegelschnitt hindurchgehen. Jede von ihnen berührt die Fläche U in zwei Punkten P_1 und P_2 dieses Kegelschnittes und durchdringt die Fläche F ausser in ihm noch in einer *Raumcurve $R_4^{(1)}$ vierter Ordnung erster Art.* Diese Raumcurve berührt die Ebene p in den Punkten P_1 und P_2 und die Ebene q in den beiden nicht auf p gelegenen Schnittpunkten der Fläche W mit dem Kegelschnitt (Uq), geht also im Allgemeinen nicht durch die Clospunkte hindurch und wird aus der Fläche W durch einen Kegel zweiten Grades herausgeschnitten, der die Ebenen p und q längs ihren Schnittlinien mit der Ebene s desjenigen Kegelschnittes berührt, welchen die Flächen U und W ausser dem Cuspidalkegelschnitt noch gemein haben.

Geht die Ebene s durch eine beliebige Tangente des Cuspidalkegelschnittes hindurch, so wird p eine stationäre Schmiegungsebene der Curve $R_4^{(1)}$, sie enthält vier aufeinanderfolgende Punkte derselben. Trifft s einen Clospunkt, so erhält die $R_4^{(1)}$ in ihm einen Doppelpunkt; enthält die Ebene s die Tangente des Cuspidalkegelschnittes in einem Clospunkte, so ist dieser Letztere ein Doppelpunkt der Raumcurve mit p als Schmiegungsebene in einem der beiden durch ihn hindurchgehenden Curvenästen; fällt endlich s mit der singulären Tangentialebene in einem Clospunkte zum Beispiel mit der Ebene A_3 zusammen, so sind die Ebenen p und q die Schmiegungsebenen der $R_4^{(1)}$ in den beiden durch den Doppelpunkt A_1 der Curve hindurchgehenden Aesten.

Eine beliebige Curve $R_4^{(1)}$ der hier betrachteten dreifach unendlichen Schaar schneidet jede der acht Geraden der Fläche F einmal, jeden Kegelschnitt zweimal, jede ebene Curve dritter Ordnung dreimal und endlich jede Raumcurve dritter Ordnung der vorhin betrachteten Schaaren auch dreimal.

Ausser dieser dreifach unendlichen Schaar durch die Flächen W aus F herausgeschnittener Curven giebt es keine andern Raumcurven vierter Ordnung erster Art auf unserer Fläche, denn wäre z. B. R_4^* eine solche, so hätte sie jedenfalls vier Punkte mit dem Cuspidalkegelschnitt gemein und ein beliebiger fünfter Punkt des Letzteren würde eine Fläche W durch R_4^* bestimmen.

Als specielle Raumcurven vierter Ordnung erster Art auf der Fläche F erscheinen:

1) Die sechs aus je vier Geraden $a_i a_k b_i b_k$ gebildeten windschiefen Vierecke.

2) Alle Paare sich zweimal schneidender Kegelschnitte.

3) Alle ebenen Querschnitte der Fläche.

Jeder Kegelschnitt K_ϱ' der sechs auf den Tangentialebenen der Kummer'schen Kegel gelegenen Schaaren bestimmt mit zwei ihn schneidenden, zu einander windschiefen Geraden der Fläche F, zum Beispiel mit a_i und b_l, — wenn a_i, a_k, b_l, b_m von K_ϱ' getroffen werden — ein einfaches Hyperboloid, welches F ausser in dem betrachteten Kegelschnitt und den beiden Geraden noch in einer *Raumcurve* $R_4^{(2)}$ *vierter Ordnung* durchdringt. Diese Raumcurve ist *von der zweiten Art*, denn sie wird von denjenigen Erzeugenden des Hyperboloides, welche mit den Geraden a_i und b_l derselben Regelschaar angehören, in drei Punkten, von den Erzeugenden der andern Schaar dagegen nur in einem Punkt geschnitten.

Die Curve $R_4^{(2)}$ geht durch jeden Clospunkt der Fläche F einmal hindurch und berührt dort die Gerade a_i respective b_l; sie berührt den Kegelschnitt K_ϱ' und den Cuspidalkegelschnitt gleichzeitig im Berührungspunkte des Letzteren mit K_ϱ' und trifft diesen noch in seinen Schnittpunkten mit den Geraden a_i und b_l. Von den andern Geraden der Fläche F schneidet $R_4^{(2)}$ die Geraden a_m und b_k in je zwei Punkten, jede der Geraden b_i, a_k, a_l, b_m aber nur in einem einzigen Punkte.

Die Kegelschnitte K_ϱ verhalten sich bezüglich des Schneidens mit $R_4^{(2)}$ verschieden, je nachdem sie mit K_ϱ' zu demselben oder zu verschiedenen Kummer'schen Kegeln gehören. Von den ersteren hat jeder mit $R_4^{(2)}$ zwei Punkte, — von den Letzteren jeder, der die Geraden a_i und b_l schneidet, einen, jeder andere aber drei Punkte gemein. Jeder Kegelschnitt K_λ trifft $R_4^{(2)}$ auch in drei Punkten.

Entsprechend den zwölf Paaren windschiefer Geraden $a_i b_k$ giebt es *zwölf einfach unendliche Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art auf der Fläche F* und es ist leicht zu zeigen, dass jede auf ihr liegende Raumcurve dieser Art einer jener zwölf Schaaren angehört.

Als specielle Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art kann man betrachten:

1) Die acht Gruppen von je vier Geraden der Fläche F, gebildet aus drei durch einen Punkt hindurchgehenden Geraden mit einer zu diesen windschiefen. Die einzige Fläche zweiten Grades, welche durch eine solche Curve hindurchgeht, ist das Ebenenpaar $\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_3$.

2) Jeder Kegelschnitt K_ϱ mit zwei ihn schneidenden windschiefen Geraden $a_\iota b_\iota$; eine beliebige von diesen speciellen Curven ergänzt eine $R_4^{(2)}$ zu einem vollständigen Schnitt der Fläche F mit einer Fläche zweiten Grades.

3) Jeder Kegelschnitt K_λ mit zwei windschiefen Geraden der Fläche F. Diese Curven ordnen sich so in Paare, dass jedes Paar den vollständigen Schnitt von F mit einer Fläche zweiten Grades bildet.

Vorstehende Untersuchung ist aus der Arbeit erwachsen, welche mir zwecks der Diplomprüfung am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich von Herrn Prof. Fiedler gestellt und als solche am 1. Juli 1880 eingereicht wurde.

Es sei mir gestattet bei dieser Gelegenheit Herrn Prof. Fiedler für vielfache Anregung und bereitwilligste Unterstützung sowohl in, als ausser der Schule, während meiner Studienzeit und nach Beendigung derselben, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Bei der letzten Durchsicht des vorliegenden Aufsatzes — der sich von meiner Diplomarbeit durch grössere Ausführlichkeit, besonders in den Capiteln über die der Fläche umgeschriebenen Kegelflächen, über die Specialfälle der Fläche und die auf ihr gelegenen Raumcurven unterscheidet — ist es mir durch gütige Vermittlung von Herrn Prof. Fiedler möglich gewesen die in dänischer Sprache geschriebene Dissertation: „Om Fladerne af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit og deres Konturer, med saerligt Hensyn til Realitetsegenskaberne"*) von Herrn Dr. C. Crone in Kopenhagen einzusehen. Schon der Titel kennzeichnet die Hauptrichtung der Untersuchungen von Hrn. Dr. Crone. Er giebt eine eingehende Untersuchung der verschiedenen Formen der Fläche, eine Untersuchung über die Realität der stationär umgeschriebenen — und der Kummer'schen Kegel, so wie der auf den Tangentialebenen der Letzteren gelegenen Kegelschnittschaaren und studirt besonders eingehend die Umrisse der Fläche, also die Spurcurven sechster Ordnung mit acht Spitzen ihrer Tangentenkegel.

---

*) Ueber die Flächen vierter Ordnung mit Rückkehrkegelschnitt und ihre Umrisse mit besonderer Rücksicht auf die Realitätseigenschaften.

Ich habe die Fragen nach Form- und Realitätsverhältnissen der Fläche fast ganz unerörtert gelassen, da ich die Absicht hatte dieselben nebst verschiedenen Specialfällen der allgemeinen Fläche in einer zweiten Abhandlung folgen zu lassen. Dabei sollte auch der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis als Cuspidalkegelschnitt einer Fläche vierter Ordnung gebührende Berücksichtigung finden.

Zürich, im August 1881.

Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen.

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Ausgehend von einer Entwicklung des Ausdrucks $(z_1 - z)^{-1}$ nach Kugelfunctionen, die man Herrn **Heine***) verdankt, hat Herr C. **Neumann****) zuerst gezeigt, dass die Entwicklungen complexer Functionen nach Kugelfunctionen erster und zweiter Art in Gebieten convergiren, welche durch Ellipsen mit den Brennpunkten $+1$ und -1 begrenzt werden. In den nachfolgenden Untersuchungen findet man analoge Resultate für die Entwicklung nach **Lamé**'schen Functionen abgeleitet.

Zu dem Zwecke mussten zunächst einige Eigenschaften dieser Functionen neu entwickelt werden; insbesondere galt es die Function zweiter Art, welche im Unendlichen verschwindet, in ihrer Abhängigkeit von einem complexen Argumente zu studiren und die asymptotischen Werthe der Functionen beider Art zu berechnen (§ I.—IV.); die Untersuchung beschränkt sich auf die Functionen erster Classe (bei denen die Functionen erster Art rational und ganz sind). Die für uns fundamentale Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach **Lamé**'schen Functionen (§ V.), ergiebt sich aus einer Darstellung des reciproken Werthes der Entfernung zweier Raumpunkte mittelst **Lamé**'scher Functionen ihrer elliptischen Coordinaten, welche Herr **Heine** gegeben hat. Für die so erhaltene Entwicklung spielt nun, in der z-Ebene, ein gewisses (schon in § II. studirtes) System von Curven vierter Ordnung dieselbe Rolle, wie das System der confocalen Ellipsen für die Entwicklung nach Kugelfunctionen. Diese Curven haben ihrer Gestalt nach Aehnlichkeit mit den Cassini'schen Curven, sind aber nicht mit ihnen identisch; sie zerfallen ebenfalls in zwei Classen; die Curven der einen Classe bestehen aus einem Zuge, die der anderen aus zwei Ovalen; als Grenzgebilde stellt sich zwischen beide eine Curve mit Doppelpunkt (vergl. Fig. 3). Man kann aus ihnen die Cassini'schen Curven durch einen Grenzprocess ableiten, den ich bei einer andern Gelegenheit zu besprechen denke. Durch das Auftreten der Ovale wird die Behandlung der Entwicklung complexer Functionen (§ VI.), zu der das Cauchy'sche Theorem in bekannter Weise hinleitet, verwickelter als die der entsprechenden Entwicklung nach Kugelfunctionen, indem es nöthig wird mehr verschiedene Fälle zu unterscheiden: das Convergenzgebiet nämlich kann entweder aus einem einfach zusammenhängenden Flächenstücke bestehen, oder aus einem zweifach zusammenhängenden (Ring), oder aus einem dreifach zusammenhängenden.

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen, erste Auflage, S. 38 und 104. Berlin, 1861.

**) Ueber die Entwicklung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art; Halle 1862.

Durch das Auftreten der letzteren Möglichkeit scheinen die Entwicklungen nach Lamé'schen Functionen ein besonderes Interesse darzubieten; ausserdem aber ist das Auftreten unendlich vieler „Nullentwicklungen" bemerkenswerth (§ VII.). Dieselben können entweder nach Functionen erster Art oder nach Functionen zweiter Art fortschreiten. Von den letzteren giebt es nur eine Classe; für dieselbe werden alle möglichen von einander unabhängigen aufgestellt. Die Nullentwicklungen nach Functionen erster Art dagegen zerfallen in drei Classen: solche, die in der ganzen Ebene gültig sind, solche, die nur im Innern der lemniscatenartigen Curve vierter Ordnung gelten, und solche, deren Convergenzgebiet sich auf ein Oval einer Curve des obigen Systems beschränkt. Für jede dieser Classen werden alle von einander unabhängigen Entwicklungen aufgesucht. In zwei besonderen Fällen wird gezeigt (Nr. 25.), wie sich die betr. Formeln auf die Legendre'sche Relation zwischen den Periodicitätsmoduln elliptischer Integrale reduciren lassen. Herr Frobenius*) hat analoge Untersuchungen für die Entwicklung einer Function nach Näherungszählern und Näherungsnennern gewisser Kettenbrüche angestellt. Bei ihm erweisen sich indessen nur Nullentwicklungen nach Functionen erster Art als möglich; und es zeigt sich, dass durch ein gegebenes Convergenzgebiet nur eine endliche Anzahl unabhängiger Nullentwicklungen charakterisirt wird, während es bei uns unendlich viele für jedes in Frage kommende Gebiet giebt.

Von den Lamé'schen Functionen kann man bekanntlich auf zwei Weisen zu den Kugelfunctionen übergehen. Der eine Grenzfall ($b = c$)

---

*) Ueber die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten. Borchardt's Journal, Bd. 73, 1871.

führt zu den Neumann'schen Entwicklungen und wird gelegentlich in § VII. besprochen. Dem andern ($b = 0$) ist § VIII. gewidmet; er führt zu einer Entwicklung nach Zugeordneten $P_\nu^n(\sqrt{1-z^2})$ bez. $Q_\nu^n(\sqrt{1-z^2})$, bei denen $n - \nu$ eine gerade Zahl ist (nach Heine's Bezeichnungsweise); an Stelle der obigen Curven vierter Ordnung treten hier wieder die confocalen Ellipsen mit den Brennpunkten $+1$ und -1 auf.

Anwendungen der vorliegenden Untersuchungen auf Probleme der Potentialtheorie hoffe ich demnächst geben zu können.

§ I.

Die Lamé'schen Functionen erster und zweiter Art.

1. Im Folgenden bediene ich mich derselben Bezeichnungsweisen, welche Herr Heine in seinem Werke über Kugelfunctionen (2. Auflage) benutzt.*) Es wird nützlich sein die hauptsächlichsten Formeln, welche zur Anwendung kommen, hier kurz zusammenzustellen.

Eine Lamé'sche Function erster Art $E_s^n(z)$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades von z, $\sqrt{z^2-b^2}$ und $\sqrt{z^2-c^2}$, welche der Differentialgleichung

$$(1)\qquad (z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2E_s^n}{dz^2} + z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dE_s^n}{dz} + [(b^2+c^2)v_s - n(n+1)z^2]E_s^n = 0$$

genügt. Hierin sind b, c reelle positive Zahlen und $c > b$; v_s ist eine Wurzel einer gewissen algebraischen Gleichung. Es giebt 4 verschiedene Classen von Functionen E, die durch die Buchstaben K, L, M, N unterschieden werden. Ist $\sigma = \frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so hat man $\sigma + 1$ Functionen K der Form:

$$K_s^n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \cdots;$$

die Coefficienten a bestimmen sich durch Recursionsformeln; sie hängen ab von b, c und v_s, wo v_s eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $\sigma + 1$ bedeutet; durch Einsetzen der verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung erhält man die verschiedenen Functionen K_1^n, K_2^n, K_3^n, ... $K_{\sigma+1}^n$; über den ersten Coefficienten a_0 soll später in passender Weise verfügt werden. Es giebt ausserdem je $n - \sigma$ Functionen L und M, endlich σ Functionen N, der Form:

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, Bd. 1, Berlin 1878. S. 358 ff.

$$
\begin{aligned}
L_s^n(z) &= \sqrt{z^2-b^2}\,(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-3} + \cdots),\\
M_s^n(z) &= \sqrt{z^2-c^2}\,(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-3} + \cdots),\\
N_s^n(z) &= \sqrt{z^2-b^2}\,\sqrt{z^2-c^2}\,(a_0 z^{n-2} + a_1 z^{n-4} + \cdots).
\end{aligned}
$$

Im Ganzen giebt es $2n+1$ verschiedene Functionen E_s^n bei gegebener Zahl n. Im Folgenden werden wir vorwiegend mit den Functionen der Classe K zu thun haben; nur für diese geben wir daher hier die betreffenden Formeln an.

Jede Function E kann auch als ganze Function von

$$
(2) \quad . \qquad \zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}
$$

dargestellt werden, wo die Vorzeichen der Wurzeln so zu wählen sind, dass abs $\zeta < 1$, wenn die reelle Grösse z, dem absoluten Werthe nach, kleiner als b oder grösser als c ist, dagegen abs $\zeta = 1$ für $b <$ abs $z < c$. Macht man $\zeta = \cos\varphi - i\sin\varphi$, so ergiebt sich, wenn n gerade und $\sigma = \frac{1}{2}n$:

$$
\begin{aligned}
(3) \quad K_s^n(z) &= \alpha_0 \cos n\varphi + \alpha_1\cos(n-2)\varphi + \cdots + \alpha_{\sigma-1}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\alpha_\sigma\\
&= \frac{1}{2}[\alpha_0(\zeta^n+\zeta^{-n}) + \alpha_1(\zeta^{n-2}+\zeta^{-n+2}) + \cdots + \alpha_{\sigma-1}(\zeta^2+\zeta^{-2}) + \alpha_\sigma],
\end{aligned}
$$

dagegen, wenn n ungerade und $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$:

$$
\begin{aligned}
(3\,\mathrm{a}) \quad K_s^n(z) &= z\Big[\alpha_0\cos(n-1)\varphi + \alpha_1\cos(n-3)\varphi + \cdots\\
&\qquad + \alpha_{\sigma-1}\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\alpha_\sigma\Big]\\
&= \frac{z}{2}[\alpha_0(\zeta^{n-1}+\zeta^{-n+1}) + \alpha_1(\zeta^{n-3}+\zeta^{-n+3}) + \cdots\\
&\qquad + \alpha_{\sigma-1}(\zeta^2+\zeta^{-2}) + \alpha_\sigma].
\end{aligned}
$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$
w = 2v_s - n(n+1), \quad \varkappa = \frac{c^2+b^2}{c^2-b^2},
$$

so bestimmen sich die Coefficienten α für ein gerades n, also in (3), durch folgende Recursionsformeln:

$$
(4)\left\{
\begin{array}{l}
\qquad 1\cdot(2n-1)\,\alpha_1 = [n^2+w]\,\varkappa\alpha_0,\\
\qquad 2\cdot(2n-3)\,\alpha_2 = [(n-2)^2+w]\,\varkappa\alpha_1 - n\cdot 1\cdot\alpha_0,\\
\qquad 3\cdot(2n-5)\,\alpha_3 = [(n-4)^2+w]\,\varkappa\alpha_2 - (n-1)\cdot 3\cdot\alpha_1,\\
\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
(m+1)(2n-2m-1)\,\alpha_{m+1} = [(n-2m)^2+w]\,\varkappa\alpha_m\\
\qquad\qquad\qquad - (n+1-m)(2m-1)\,\alpha_{m-1},\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
\right.
$$

Dies System wird dadurch abgeschlossen, dass man die letzte Gleichung für $m = \sigma - 1$ bildet, nämlich:

$$\sigma(n+1)\,\alpha_\sigma = (2^2 + w)\,\varkappa\,\alpha_{\sigma-1} - (\sigma+2)\,(n-3)\,\alpha_{\sigma-2},$$

und noch die Bedingung hinzufügt:

$$w\varkappa\alpha_\sigma = (n+2)\,(n-1)\,\alpha_{\sigma-1}.$$

Für ein ungerades n, d. i. in der Gleichung (3a), bestimmen sich die α durch:

$$(4\,\mathrm{a})\left\{\begin{array}{r}
1\cdot(2n-1)\,\alpha_1 = [(n-1)^2+w]\,\varkappa\alpha_0,\\
2\cdot(2n-3)\,\alpha_2 = [(n-3)^2+w]\,\varkappa\alpha_1 - (n-1)\cdot 3\cdot\alpha_0,\\
3\cdot(2n-5)\,\alpha_3 = [(n-5)^2+w]\,\varkappa\alpha_2 - (n-2)\cdot 5\cdot\alpha_1,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
(m+1)(2n-2m-1)\,\alpha_{m+1} = [(n-1-2m)^2+w]\,\varkappa\,\alpha_m\\
-(n-m)(2m+1)\,\alpha_{m-1},\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right.$$

Als letzte Gleichung hat man wieder die für $m = \sigma - 1$ entstehende zu bilden, nämlich:

$$\sigma(n+2)\,\alpha_\sigma = [2^2 + w]\,\varkappa\,\alpha_{\sigma-1} - (\sigma+2)\,(n-2)\,\alpha_{\sigma-2};$$

dazu muss man die Bedingung $\alpha_{\sigma-1} = \alpha_{\sigma+1}$ hinzufügen, also:

$$w\varkappa\alpha_\sigma = (n+1)\,(n-2)\,\alpha_{\sigma-1}.$$

Endlich lässt sich die Function K^n in bemerkenswerther Weise durch die Zugeordneten der Kugelfunctionen darstellen; man hat:

$$(5)\qquad K_s^n(c)\cdot K_s^n(z) = \sum_{m=0}^{m=\sigma} h_{2m}^{n,s}\,P_{2m}^n\left(\frac{z}{b}\right),\text{*)}$$

wo das Zeichen P_r^n in demselben Sinne wie bei Herrn **Heine** angewandt ist. Die Grössen $h_r^{n,s}$ sind gewisse Constante, deren Bestimmung im vierten Capitel des zweiten Theiles des mehrfach genannten Werkes näher besprochen ist.

2. Ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (1) wird durch eine unendliche Reihe geliefert, welche nach absteigenden Potenzen von z geordnet ist und mit der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz beginnt, also im Unendlichen verschwindet. Dieses Integral bezeichnen wir als *Lamé'sche Function zweiter Art* $F_s^n(z)$; dieselbe wurde gleichzeitig von Herrn **Heine** und Herrn **Liouville** eingeführt.

Sie ist durch die erwähnte Potenzreihe nur für abs $z > c$ definirt; eine für alle Werthe von z gültige Darstellung erhält man, indem man $F_s^n(z)$ in bekannter Weise durch die Function erster Art ausdrückt:

---

*) Vergl. **Heine**, l. c. S. 376.

$$(6) \qquad F_s^n(z) = (2n+1)\, E_s^n(z) \int_z^{\infty} \frac{dz}{[E_s^n(z)]^2 \sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}} .$$

Durch Umformung dieser Gleichung ergiebt sich (nach Heine), dass $F_s^n(z)$ keine andere Transscendente enthält, als elliptische Integrale erster und zweiter Gattung; und zwar hat man für die Classe K der Lamé'schen Functionen:

$$(7) \qquad F_s^n(z) = -K_s^n(z)\,[\chi_s^n(z) - \chi_s^n(\infty)],$$

wenn:

$$(7\text{a}) \qquad -K_s^n(z) \cdot \chi_s^n(z)$$

$$= \sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2} \cdot G_s^n(z) + K_s^n(z) \int_0^z \frac{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} z^2)\, dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}} ;$$

hierin ist G eine ganze Function von z, nämlich, wenn α_i die Wurzeln der Gleichung $K_s^n(z) = 0$ bedeuten:

$$(7\text{b}) \quad G_s^n(z) = (2n+1) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{K_s^n(z) - K_s^n(\alpha_i)}{z - \alpha_i} \cdot \frac{1}{(\alpha_i^2 - b^2)(\alpha_i^2 - c^2)[K_s'^n(\alpha_i)]^2} ,$$

während die Constanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch folgende Gleichungen gegeben werden:

$$(7\text{c}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = (2n+1) \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha_i^2}{(\alpha_i^2-b^2)(\alpha_i^2-c^2)[K_s'^n(\alpha_i)]^2} , \\ \mathfrak{b} = (2n+1) \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(\alpha_i^2-b^2)(\alpha_i^2-c^2)[K_s'^n(\alpha_i)]^2} . \end{cases}$$

Endlich hat man noch die Relation:

$$(7\text{d}) \qquad \chi_s^n(\infty) = -\frac{\mathfrak{a}}{c} K' + \mathfrak{b} b k' \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} ,$$

wo:

$$(8) \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}} , \qquad k'^2 = 1 - \frac{c^2-b^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} .$$

In vorstehenden Gleichungen ist z zunächst reell gedacht, und, um Mehrdeutigkeit zu vermeiden, abs $z > c$.

§ II.

Eine Abbildungsaufgabe.

3. Um die Function $F_s^n(z)$ für alle complexen Werthe von z darzustellen, entwickeln wir sie nach Potenzen von ζ, wo wie in (2):

$$(2) \qquad \zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}} .$$

Es wird daher nützlich sein, zuvor die hierdurch vermittelte Abbildung näher zu studiren.

Die Werthe von ζ können wir uns über der z-Ebene in einer vierblättrigen Riemann'schen Fläche Z ausgebreitet denken. Letztere hat über den Punkten $\pm c$ und $\pm b$ acht Verzweigungspunkte, indem sich über jedem der vier Punkte zwei Verzweigungen verschiedener Blätterpaare befinden. Ausserdem liegen im unendlich fernen Punkte zwei Paare sich aufhebender Verzweigungspunkte; denn durch Rationalmachen von (2) entsteht:

$$\frac{1}{4}\zeta^4(c^2-b^2) - z^2\zeta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2(c^2+b^2) + \frac{1}{4}(c^2-b^2) = 0,$$

und dies ist (in Veränderlichen z, ζ) die Gleichung einer Curve 4. Ordnung mit einem Selbstberührungspunkte (zwei unendlich benachbarten Doppelpunkten) im unendlich fernen Punkte der Axe $\zeta = 0$. Ihr Geschlecht ist gleich $\frac{1}{2}\,3 \cdot 2 - 2 = 1$, und daher der Zusammenhang der vierblättrigen Fläche Z gleich 3.

Umgekehrt findet man

$$(9) \quad z = \frac{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\zeta^4+2\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}\zeta^2+1}}{2\zeta} = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\sqrt{\zeta^2+2\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}+\zeta^{-2}} .$$

Breitet man die Werthe von z über der ζ-Ebene aus, so erhält man eine zweiblättrige Fläche Z mit den vier Verzweigungspunkten

$$\pm i\sqrt{\frac{c+b}{c-b}} \quad \text{und} \quad \pm i\sqrt{\frac{c-b}{c+b}} .$$

Durch (2) *resp.* (9) *ist die vierblättrige Fläche Z auf die zweiblättrige Fläche Z conform abgebildet.*

Die in Z vorkommenden Verzweigungen kann man in folgender Weise anordnen. Es sei z_0 ein reeller Werth von z, und $b < z_0 < c$; dann nehmen wir als erstes Blatt dasjenige, in welchem

$$\zeta_0 = \frac{\sqrt{z_0^2-b^2}-\sqrt{z_0^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}} ;$$

wo beide Wurzelzeichen mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind, während $\sqrt{c^2-b^2}$ immer positiv sein soll.

Im zweiten Blatte sei $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2}=-\sqrt{z_0^{\,2}-b^2}+\sqrt{z_0^{\,2}-c^2}$,
„ dritten „ „ $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2}=-\sqrt{z_0^{\,2}-b^2}-\sqrt{z_0^{\,2}-c^2}$,
„ vierten „ „ $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{z_0^{\,2}-b^2}+\sqrt{z_0^{\,2}-c^2}$.

Es hängen also zusammen

die Blätter 1 und 3 in $\pm b$,
„ „ 1 „ 4 „ $\pm c$,
„ „ 2 „ 3 „ $\pm c$,
„ „ 2 „ 4 „ $\pm b$.

Nennt man die Punkte $+b$, $-b$, $+c$, $-c$ bez. B, B', C, C', (vgl. Fig. 1) so kann man daher die Linie $B\,B'$ und die Linie $C\infty C'$ als Verzweigungsschnitte benutzen, der Art, dass man

durch Ueberschreiten von $B\,B'$ vom 1ten ins 3te Blatt,
oder „ 2ten „ 4te „ ,
„ „ „ $C\infty C'$ „ 1ten „ 4te „ ,
oder „ 2ten „ 3te „

gelangt und umgekehrt. Geht man z. B. von ζ_0 im ersten Blatte aus, so kommt man durch einen Umgang um C ins 4te, dann durch einen Umgang um B ins 2te, von da durch einen Umgang um C ins 3te und endlich von hier durch einen Umgang um B zurück zu ζ_0 im ersten Blatte: ein zweimaliger Umgang um die Linie BC giebt in der Fläche Z eine geschlossene Curve.

Die beiden Blätter der Fläche Z gehen längs zweier Verzweigungsschnitte in einander über, von denen der eine die Punkte $+i\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ und $+i\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$, der andere die Punkte $-i\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ und $-i\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$ mit einander verbindet.

4. Es ist für uns von Wichtigkeit in der z-Ebene (also auf der Fläche Z) diejenigen Curven zu verfolgen, für welche der absolute Betrag von ζ constant ist. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$(10)\qquad \begin{cases} z=x+iy=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi), \\ \zeta=\xi+i\eta=\varrho\,(\cos\omega+i\sin\omega). \end{cases}$$

Es ergiebt sich aus (9):

$$(11)\quad z=\sqrt{\frac{c^2+b^2}{2}+\frac{c^2-b^2}{4}\left[\left(\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}\right)\cos 2\omega+i\left(\varrho^2-\frac{1}{\varrho^2}\right)\sin 2\omega\right]},$$

also:

$$(12)\qquad \begin{cases} x^2-y^2=\frac{c^2+b^2}{2}+\frac{c^2-b^2}{4}\,(\varrho^2+\varrho^{-2})\,\mathrm{cosin}\,2\omega, \\ 2xy\quad=\frac{c^2-b^2}{4}\,(\varrho^2-\varrho^{-2})\sin 2\omega. \end{cases}$$

Durch Elimination von ϱ hieraus ergiebt sich:

$$\left(\frac{x^2-y^2-\frac{1}{2}(c^2+b^2)}{\cos 2\omega}\right)^2-\left(\frac{2xy}{\sin 2\omega}\right)^2=\left(\frac{c^2-b^2}{2}\right)^2. \tag{13}$$

Diese Curven 4. Ordnung in der z-Ebene entsprechen den in der ζ-Ebene durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden.

Durch Elimination von ω aus (12) findet man:

$$\left(\frac{x^2-y^2-\frac{1}{2}(c^2+b^2)}{\varrho^2+\varrho^{-2}}\right)^2+\left(\frac{2xy}{\varrho^2-\varrho^{-2}}\right)^2=\left(\frac{c^2-b^2}{4}\right)^2. \tag{14}$$

Diese Curven 4. Ordnung in der z-Ebene entsprechen den in der ζ-Ebene um den Anfangspunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kreisen.

Wir untersuchen zunächst das System (13) näher. Setzen wir $\omega=0$, so folgt aus (11):

$$y=0,\ x=\sqrt{\frac{c^2+b^2}{2}+\frac{c^2-b^2}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})}.$$

Es wird $x=c$ für $\varrho=1$ und $x=\infty$ für $\varrho=0$; $x=c$ ist gleichzeitig der kleinste Werth, den x annimmt. Während also in Z ein Punkt auf der x-Axe sich von C nach ∞ bewegt, geht der entsprechende Punkt in Z auf der ζ-Axe von C (Fig. 2) zum Anfangspunkte Ω; während letzterer von C ($\varrho=1$) sich ins Unendliche entfernt, durchläuft x wieder den Strahl $C\infty$.

$\omega=\frac{\pi}{2}$ giebt:

$$y=0,\ x=\sqrt{\frac{c^2+b^2}{2}-\frac{c^2-b^2}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})},\ \text{wenn}\ c^2+b^2>\frac{c^2-b^2}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2}),$$

$$y=0,\ x=b,\qquad \text{„}\ \varrho=1,$$

$$y=0,\ x=0,\qquad \text{„}\ c^2+b^2=\frac{c^2-b^2}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2}),$$

$$\text{d. h. } \varrho^2=\frac{c+b}{c-b}\ \text{oder}=\frac{c-b}{c+b},$$

$$x=0,\ y=\sqrt{\frac{c^2-b^2}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})-\frac{c^2+b^2}{2}},\ \text{wenn}\ c^2+b^2<(\varrho^2+\varrho^{-2})\frac{c^2-b^2}{2},$$

$$x=0,\ y=\infty\qquad \begin{cases}\text{„}\ \varrho=0,\\ \text{oder}\ \varrho=\infty.\end{cases}$$

Während also der Punkt z auf der reellen Axe von B nach O läuft, läuft der Punkt ζ (bei Wahl des positiven Vorzeichens der Wurzel) auf der imaginären Axe von 1 nach $\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ (O in Fig. 2), oder nach $\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$ (O' in Fig. 2); und während z auf der imaginären Axe von

O ins Unendliche läuft, bewegt sich ζ von O (resp. O') aus entweder ins Unendliche oder zum Anfangspunkte Ω.

Ist $\omega = \frac{\pi}{4}$, so wird nach (12):

$$(15) \qquad x^2 - y^2 = \frac{c^2 + b^2}{2}.$$

Die Curve (13) artet in eine doppelt zählende gleichseitige Hyperbel aus.

Dem Radiusvector $\omega = 0$ entspricht hiernach die Linie $C\infty$, dem Radiusvector $\omega = \frac{\pi}{4}$ der eine halbe Zweig der Hyperbel (15) und dem Radiusvector $\varrho = \frac{\pi}{2}$ die gebrochene Linie B-O-$i\infty$. Ist ω von einem dieser 3 Werthe wenig verschieden, so wird sich die entsprechende Curve (13) einer jener speciellen Curven eng anlegen; man erkennt daraus den ungefähren Verlauf der Curven (13), wie er in Fig. 3 angegeben. Zu bemerken ist noch, dass die Gleichung (13) sich nicht ändert, wenn man $\frac{\pi}{2} - \omega$ an Stelle von ω setzt. Je zwei symmetrisch gegen den Hyperbelast (15) liegende Curvenzweige sind also als Theile derselben Curve (13) zu betrachten. Jede Curve hat 4 reelle Asymptoten, welche sämmtlich durch O gehen, bestimmt durch:

$$(x^2 - y^2) \sin^2 2\omega = 4x^2y^2 \operatorname{cosin}^2 2\omega.$$

5. Von den Curven (14) erstreckt sich keine ins Unendliche. Für $\varrho = 1$ erhält man aus (11):

$$y = 0, \; x = \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2} \operatorname{cosin} 2\omega},$$

insbesondere:

$$x = b \quad \text{für} \quad \omega = \frac{\pi}{2},$$

$$x = c \quad \text{„} \quad \omega = 0$$

und immer

$$b < x < c.$$

Also dem Kreisquadranten $\varrho = 1$ und $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ in der ζ-Ebene entspricht die Strecke der x-Axe, welche zwischen B und C liegt, oder, wenn das Vorzeichen der Wurzel negativ genommen wird, zwischen B' und C'. Wie über die verschiedenen hier und in Nr. 4. auftretenden Möglichkeiten zu entscheiden ist, lehrt eine in Nr. 6. angestellte Untersuchung über die Verzweigung einander entsprechender Blättertheile von Z und Z.

Die Gleichung (14) ändert sich nicht, wenn man ϱ mit ϱ^{-1} vertauscht. Man erhält also dieselbe Curvenschaar, wenn man ϱ von 1 bis 0 abnehmen, als wenn man ϱ von 1 bis ∞ wachsen lässt; *wir lassen ϱ abnehmen.* Ist ϱ von 1 wenig verschieden, so wird sich eine

Curve ergeben, welche sich eng an die Strecke BC anlegt und durch einen entsprechenden Theil im Quadranten $+x$, $-y$ zu einem Ovale ergänzt wird. Dieses Oval vergrössert sich bei abnehmendem ϱ, bis $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ geworden ist. Jedes Oval wird durch ein congruentes um $B'C'$ gezogenes zu einer Curve (14) ergänzt. In der That bestimmen sich die 4 Schnittpunkte einer solchen Curve mit der x-Axe durch:

$$x^2 = \frac{c^2+b^2}{2} + (\varrho^2 + \varrho^{-2})\frac{c^2-b^2}{4}$$

und:

$$x^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - (\varrho^2 + \varrho^{-2})\frac{c^2-b^2}{4}.$$

Erstere beiden sind immer reell und entfernen sich mit abnehmendem ϱ ins Unendliche; letztere beiden sind reell, so lange:

$$\varrho^2 + \varrho^{-2} < 2\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2};$$

sie fallen in den Anfangspunkt zusammen für

$$\varrho^2 + \varrho^{-2} = 2\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 = \frac{(c \pm b)^2}{c^2-b^2},$$

und werden imaginär, wenn ϱ noch weiter abnimmt. Für $\varrho^2 = \frac{c-b}{c+b}$ $\left(\text{bez. } \frac{c+b}{c-b}\right)$ hat man also eine Curve mit Doppelpunkt nach Art einer Lemniscate; ihre Gleichung ist:

$$(16)\qquad (x^2-y^2)^2-(c^2+b^2)(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x^2y^2\left(\frac{c^4+b^4+6b^2c^2}{bc(c^2+b^2)}\right)^2 = 0.$$

Bei weiter abnehmendem ϱ besteht die Curve aus einem einzigen Zuge, der beide Axen in je zwei reellen Punkten trifft. Für $\varrho = 0$ hat sie sich auf den unendlich fernen Punkt zusammengezogen. *Das ganze System ist also gestaltlich dem Systeme confocaler Cassini'scher Curven sehr ähnlich.*

Zur Berechnung einzelner Punkte der Curven (13) und (14) ist es praktisch Polarcoordinaten einzuführen. Man findet aus (13):

$$(17)\quad r^2 = \frac{2(c^2+b^2)\cdot\cos 2\varphi\cdot\sin^2 2\omega \pm \sin 4\omega\sqrt{(c^2-b^2)^2\sin^2 2\omega + 4b^2c^2\sin^2 2\varphi}}{4\sin 2(\omega-\varphi)\cdot\sin 2(\omega+\varphi)}.$$

Die Asymptoten sind also durch $\varphi = \omega$ und $\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$ bestimmt. Aus (14) ergiebt sich:

$$(17\text{a})\quad r^2 = \frac{2(c^2+b^2)(\varrho^2-\varrho^{-2})^2\cos 2\varphi \pm (\varrho^4-\varrho^{-4})\sqrt{(c^2-b^2)^2(\varrho^2-\varrho^{-2})^2 - 16b^2c^2\sin^2 2\varphi}}{4(\varrho^2-\varrho^{-2})^2 + 16\sin^2 2\varphi}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sind die Curven in Fig. 3 berechnet. Es ist daselbst $b = 2^{\text{cm}}$, $c = 6^{\text{cm}}$ gewählt. Gezeichnet sind in einem Quadranten die Curven $\varrho^2 = 1$ (Strecke BC), $\varrho^2 = \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{17}{32}$ (je zwei Ovale), $\frac{4}{8}$ (Curve mit Doppelpunkt), $\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$ (eintheilige Curven); ferner aus der orthogonalen Schaar die Curven $\omega = \frac{\pi}{32}$ oder $\frac{15}{32}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$ oder $\frac{7}{16}\pi$, $\frac{2}{16}\pi$ oder $\frac{6}{16}\pi$, $\frac{3}{16}\pi$ oder $\frac{5}{16}\pi$ (je aus vier Zweigen bestehend, von denen aber nur zwei in diesem Quadranten), endlich $\frac{4}{16}$ (doppelt zählende Hyperbel). In Fig. 1 ist $b = 1^{\text{cm}}$, $c = 3^{\text{cm}}$, in Fig. 2 ebenfalls und die Einheit (= Radius ΩC) gleich 1^{cm}.

6. Es ist noch zu untersuchen wie die einzelnen Blätter und Flächentheile von Z sich auf Z abgebildet finden.

Nach den in Nr. 3. gemachten Festsetzungen entspricht einem Punkte $+x$, 0 des ersten Blattes von Z, wo $b < x < c$, ein Punkt

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

wo alle Wurzelzeichen absolut zu nehmen sind; also:

$$\xi = \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \eta = -\frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Dem betreffenden Punkte der Fläche Z entspricht daher ein Punkt des 4. Quadranten der Fläche Z, für den also ω negativ ist (und absolut $< \frac{\pi}{2}$), während $\varrho = 1$; das Blatt, in welchem er liegt, soll als *erstes* Blatt der Fläche Z bezeichnet werden. — Wir nehmen nun y von Null verschieden an, während x positiv bleibt. Aus der zweiten Gleichung (12) folgt, dass dann $\varrho < 1$ ist, wenn y positiv, und $\varrho > 1$, wenn y negativ ist.

Es sollen nun in der Fläche Z der Quadrant $+x$, $+y$ mit $I/$ der Quadrant $-x$, $+y$ mit $II/$, der Quadrant $-x$, $-y$ mit $III/$, der Quadrant $+x$, $-y$ mit $IV/$ bezeichnet werden; und ein beigefügter unterer Index soll angeben, in welchem Blatte von Z der Quadrant gedacht ist. Ebenso unterscheiden wir die Quadranten in Z; hier theilen wir jeden noch in 2 Theile, deren einer ausserhalb des Kreises $\varrho = 1$ liegt, deren anderer innerhalb dieses Kreises sich befindet; der erstere Theil soll durch den obern Index a, der andere durch den obern Index i bezeichnet werden. Das Resultat der eben angestellten Ueberlegung können wir dann so aussprechen, dass *den Quadranten* $I/_1$ *und* $IV/_1$ *von* Z *bez. die Flächentheile* $IV/_1^i$ *und* $IV/_1^a$ *von* Z *entsprechen.*

Durch Ueberschreiten der Linie OB gelangt man in Z von $IV/_1$

nach $I/_3$; dem entsprechend in Z durch Ueberschreiten der Linie OB von $IV/_1^a$ nach $III/_2^a$. Durch Ueberschreiten der Linie $C\infty$ gelangt man in Z von $IV/_1$ nach $I/_4$; dem entspricht in Z ein Ueberschreiten der Linie ΩC ausserhalb des Kreises $\varrho = 1$, wodurch indess das Blatt 1 nicht verlassen wird. Es entsprechen sich daher die Flächentheile $I/_3$ und $III/_2^a$ einerseits, und $I/_4$ und $I/_1^a$ andererseits. Durch Ueberschreiten von O-$i\infty$ kommt man von $I/_1$ nach $II/_1$, und durch den entsprechenden Weg über die Linie O_1-Ω von $IV/_1^i$ nach $III/_1^i$; also $II/_1$ und $III/_1^i$ entsprechen sich. Durch Fortsetzung solcher Ueberlegungen gelangt man zu dem Resultate, dass sich die in folgender Tabelle neben einander gestellten Flächenstücke entsprechen:

$$\begin{array}{llll}
I/_1 - IV/_1^i, & II/_1 - III/_1^i, & III/_1 - III/_1^a, & IV/_1 - IV/_1^a, \\
I/_2 - II/_2^i, & II/_2 - I/_2^i, & III/_2 - I/_2^a, & IV/_2 - II/_2^a, \\
I/_3 - III/_2^a, & II/_3 - IV/_2^a, & III/_3 - IV/_2^i, & IV/_3 - III/_2^i, \\
I/_4 - I/_1^a, & II/_4 - II/_1^a, & III/_4 - II/_1^i, & IV/_4 - I/_1^i.
\end{array}$$

Die Fläche Z kann man in zwei Theile zerlegen; in dem einen ist $\varrho < 1$, im andern $\varrho > 1$. Der erstere ist für das Folgende von Wichtigkeit; er besteht aus denjenigen Quadranten, welche auf das Innere des Kreises $\varrho = 1$ in Z abgebildet sind, also:

$$\begin{array}{l}
I/_1,\ II/_1,\ III/_4,\ IV/_4, \\
I/_2,\ II/_2,\ III/_3,\ IV/_3.
\end{array}$$

Diese acht Quadranten überdecken die z-Ebene vollständig und doppelt. Die Halbebene $I/_1\ II/_1$ hängt mit der Halbebene $III/_3\ IV/_3$ längs der Linie BB' und mit der Halbebene $III/_4\ IV/_4$ längs der Linie $C\infty C'$ zusammen. Ebenso hängt die Halbebene $I/_2$, $II/_2$ längs BB' mit $III/_4\ IV/_4$ und längs $C\infty C'$ mit $III/_3\ IV/_3$ zusammen. Für die so entstandene zweiblättrige Fläche, in der überall $\varrho < 1$, bilden die Linien BC und $B'C'$ unüberschreitbare Begrenzungen.

Hervorgehoben mag noch werden, dass nach obigen Erörterungen dem Ringe, welcher in Z von den Kreisen $\varrho = 1$ und $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ begrenzt wird und sich durch die Quadranten $I/_1^i$, $II/_2^i$, $III/_2^i$, $IV/_1^i$ zieht, in Z das Innere der einen Schleife der Curve (16) entspricht, insofern es sich in den Quadranten $IV/_4$, $I/_2$, $IV/_3$, $I/_1$ befindet, also ein geschlossenes Flächenstück, welches sich zweimal um die Linie BC windet. Dem andern Ringe, welcher von denselben Kreisen $\varrho = 1$ und $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ begrenzt wird, sich aber durch die Quadranten $I/_2^i$, $II/_1^i$, $III/_1^i$, $IV/_2^i$ hinzieht, entspricht das Innere der andern Schleife der Curve (16), und zwar in den Quadranten $II/_2$, $III/_4$, $II/_1$, $III/_3$.

Die beiden in Z liegenden Ringe, welche von den Kreisen $\varrho = 1$ und $\varrho = \sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$ begrenzt werden, entsprechen in analoger Weise den andern innerhalb der beiden Schleifen der Curve (16) liegenden Blätterstücken von Z.

§ III.

Die Lamé'sche Function zweiter Art von der Classe K als Function einer complexen Veränderlichen.

7. Die in Nr. 2. behandelte Function $F_s^n(z)$ kann für abs $z > c$ in eine nach absteigenden Potenzen von z geordnete Reihe entwickelt werden, wie schon oben erwähnt. Es handelt sich für uns zunächst darum, *die so definirte Function ins Innere des Kreises $r = c$ hinein stetig fortzusetzen.* Dies kann dadurch geschehen, dass wir sie nach aufsteigenden Potenzen von ζ entwickeln, wo ζ durch (2) gegeben ist. Die Möglichkeit der Entwicklung ist leicht einzusehen.

Wir setzen fest, um Eindeutigkeit herzustellen, dass abs ζ $(=\varrho) < 1$ sei; der Werth des Productes $z \cdot \zeta$ kann dann für $z = \infty$ nach (9) entweder gleich $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}$ oder gleich $-\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}$ gewählt werden, denn es wird $\zeta = 0^1$ für $z = \infty$; *wir bestimmen, es sei*

$$\lim_{z=\infty} z \cdot \zeta = +\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}. \tag{18}$$

Dann ist, innerhalb des Kreises $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$, z eine eindeutige Function von ζ; und umgekehrt, ausserhalb des Kreises $r = c$, ist ζ eine eindeutige Function von z. Es fragt sich, in welchen Blättern der Flächen Z und Z die einander entsprechenden Werthe von z und ζ zu suchen sind. Nun ist

$$z \cdot \zeta = r \cdot \varrho\,[\cos(\varphi + \omega) + i \sin(\varphi + \omega)].$$

Nähert sich ζ in der Richtung ω dem Anfangspunkte, so entfernt sich z auf der zugehörigen Curve (13) ins Unendliche (da $r = \infty$ für $\varrho = 0$ nach Nr. 4.), oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf einer Asymptote dieser Curve; ich kann also nach (17) setzen $\varphi = \omega$, $\varphi = \pi - \omega$, $\varphi = \pi + \omega$ oder $\varphi = -\omega$; da aber $z \cdot \zeta$ rein reell wird für $z = \infty$, so bleibt nur die Wahl zwischen $\varphi = -\omega$ und $\varphi = \pi - \omega$. Der erstere Werth liefert einen positiven Werth von $z \cdot \zeta$, entspricht also der in (18) gemachten Festsetzung; d. h. ist $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so befinde ich mich im ersten Quadranten in der z-Ebene, dagegen im vierten Quadranten der ζ-Ebene. Da nun nur die Quadranten, in denen $\varrho < 1$, in Betracht kommen, so haben wir diejenigen Punkte z, für welche

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ nach obiger Tabelle (Nr. 6.) im ersten Quadranten des *ersten Blattes* der Fläche Z zu suchen. Soll ferner die Gleichung (18) unabhängig von φ bestehen, so müssen die anderen Quadranten mit $I/_1$ im Unendlichen stetig zusammenhängen. Es folgt so aus den Betrachtungen in Nr. 6.: *Wir haben durch die Bestimmung* $\varrho < 1$ *und durch* (18) ζ *so als eindeutige Function von* z *bestimmt und umgekehrt, dass die Veränderlichkeit von* z *auf die Quadranten* $I/_1$, $II/_1$, $III/_4$, $IV/_4$ *beschränkt ist, die von* ζ *auf die entsprechenden Quadranten* $IV/^i_1$, $III/^i_1$, $II/^i_1$, $I/^i_1$. Hätte man auf der rechten Seite von (18) das entgegengesetzte Zeichen gewählt, so wären statt dessen die Quadranten $I/_2$, $II/_2$, $III/_3$, $IV/_3$ in Betracht gekommen.

Innerhalb der ganzen so bestimmten einblättrigen Fläche ist ζ *eine holomorphe Function von* z, *ausgenommen die Linie* COC'; denn längs dieser hängt die Halbebene $I/_1$, $II/_1$ nicht mit der Halbebene $III/_4$, $IV/_4$ zusammen. *Von den beiden Werthen, welche* ζ *längs* BC *oder* $B'C'$ *annimmt, ist der eine der reciproke Werth des andern;* in der That hat man:

$$\frac{\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - c^2}}.$$

Längs OB *und* OB' *dagegen sind die beiden Werthe von* ζ *einander gleich bis auf das Vorzeichen* (vgl. Nr. 3.).

Die hier vorkommende einblättrige Fläche, welche einen Theil von Z ausmacht, soll mit Z' bezeichnet werden. Das entsprechende Stück von Z, gebildet durch die Quadranten $IV/^i_1$, $III/^i_1$, $II/^i_1$, $I/^i_1$, mag Z' genannt werden. Dieses Stück Z' besteht aus dem Innern einer Kreisfläche, deren Zusammenhang längs OB und $O'B'$ durch Einschnitte unterbrochen ist.

8. Einem Gebiete in Z', das den unendlich fernen Punkt enthält und ganz ausserhalb der Curve (16) liegt, entspricht in Z' ein Gebiet, welches den Nullpunkt einschliesst und ganz im Innern des Kreises $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ liegt. In ersterem ist F^n als Function von z^{-1} durch eine Potenzreihe dargestellt, im letzteren ist z^{-1} eine holomorphe Function von ζ; also ist auch F^n nach Potenzen von ζ zu entwickeln, und diese Entwicklung muss convergiren *im ganzen* Innern des Kreises $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$.

Die Entwicklung von $F_s^n(z)$ *nach Potenzen von* ζ *stellt also die in Nr. 2. behandelte Function dar für alle Werthe von* z, *deren entsprechende Punkte ausserhalb der Curve* (16) *sich befinden.*

Die wirkliche Ausführung dieser Entwicklung wird in Nr. 10. gegeben werden.

Auch für das Innere der Curve (16) lässt sich eine ähnliche Darstellung der Function $F^n(z)$ finden. Innerhalb der Curve (16) und ausserhalb des Kreises $r = c$ liegt ein Theil der Fläche Z', in dem F^n als Function von z^{-1} durch die soeben benutzte Potenzreihe dargestellt ist. Dieser Theil besteht aus zwei getrennten Stücken; das eine ($CDFE$ in Fig. 1) wird von der positiven, das andere ($C'D'F'E'$ in Fig. 1) von der negativen x-Axe durchsetzt. Dem ersteren entspricht in Z' der von den Kreisen $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ und $\varrho = 1$ und von den Strecken OB und $O'B'$ eingeschlossene Halbring $OBCB'O'F$ in Fig. 2; in letzterem ist z^{-1} eine holomorphe Function von ζ, und z^{-1} bleibt eine solche, wenn man den Halbring zu einem Vollringe ergänzt durch Ueberschreiten der Linien OB und $O'B'$ und gleichzeitiges Uebergehen in das zweite (nicht mehr zu Z' gehörige) Blatt der Fläche Z. Für alle Werthe von ζ im Innern dieses Ringes kann daher $F^n(z)$ (nach dem Satze von Laurent) in eine nach Potenzen von ζ und ζ^{-1} fortschreitende Reihe entwickelt werden. Nach der Bemerkung am Schlusse von Nr. 6. *convergirt diese Darstellung von F^n für alle Punkte der Fläche Z', welche sich im Innern der von der positiven x-Axe durchsetzten Schleife der Curve* (16) *befinden.* Diese Darstellung bleibt aber auch noch gültig, wenn man die Fläche Z' durch Ueberschreiten von OB verlässt und in das andere Blatt derjenigen zweiblättrigen Fläche übertritt, in welcher auch noch $\varrho < 1$ war; denn erst beide Schleifen zusammen entsprechen dem in Z gelegenen Ringe. Die so aufzustellende Reihe vermittelt daher auch die stetige Fortsetzung der Function F^n in das von uns nicht betrachtete Blatt der Fläche Z, in welchem ebenfalls $\varrho < 1$ ist, in dem aber $z \cdot \zeta$ für $z = \infty$ gleich $-\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}$ wird.

Eine besondere Betrachtung verlangt noch das Verhalten der Function F^n an der Linie OC; längs derselben ist sie nämlich unstetig. Die beiden Werthe $F(x + i \cdot 0)$ und $F(x - i \cdot 0)$ werden noch durch die Entwicklung nach Potenzen von ζ und ζ^{-1} dargestellt. Letztere convergirt nämlich nicht nur in dem Halbringe $OBCB'O'F$, sondern man kann die äussere Grenze desselben bis an den Kreis $\varrho = \sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$ verschieben, ohne die Convergenz zu stören; denn in dem ganzen so entstehenden Halbringe ist z eine holomorphe Function von ζ. *Unsere Reihe convergirt also noch für $\varrho = 1$,* d. h. für alle Punkte der Linie BC. Längs OB aber convergirt sie, da ja das Convergenzgebiet über OB hinaus fortgesetzt werden kann in das zweite Blatt von Z. — Die Differenz der Werthe $F(x + i \cdot 0)$ und $F(x - i \cdot 0)$ wird in Nr. 9. berechnet werden.

Durch Benutzung des Halbringes $OBC'B'O'F'$ wird man in derselben Weise *eine Darstellung von F^n für das Innere der andern Schleife der Curve* (16) *finden.*

Um F^n auch für Punkte der Linie COC' zu definiren, setzen wir für abs $x < c$:

$$(19)\qquad F_s^n(x) = \tfrac{1}{2}\left\{F_s^n(x+i\cdot 0) + F_s^n(x-i\cdot 0)\right\}.$$

9. Wir kehren jetzt zu der Darstellung von F^n durch die Integralformel (6) oder (7) in § 1. zurück. Sie giebt uns unmittelbar Aufschluss über das Verhalten von F^n an der Linie COC'.

Ist $b < x < c$, so folgt:

$$(20)\qquad F_s^n(x-i\cdot 0) - F_s^n(x+i\cdot 0)$$
$$= 2(2n+1)K_s^n(x)\int_c^x \frac{dx}{[K_s^n(x)]^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}},$$

denn beim Umgange um C ändert $\sqrt{z^2-c^2}$ sein Zeichen; hierin ist nach (7) und (7a):

$$(20\text{a})\qquad (2n+1)\int_c^x \frac{dx}{[K_s^n(x)]^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}} = \chi_s^n(x) - \chi_s^n(c)$$
$$= -\frac{G_s^n(x)}{K_s^n(x)}\sqrt{x^2-c^2}\,\sqrt{x^2-b^2} - \int_c^x \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}x^2}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}\,dx.$$

Das Integral wird also zwar unendlich erster Ordnung in einem Nullpunkte von $K_s^n(x)$, der etwa zwischen x und c liegt; dies stört aber nicht, da dasselbe in (20) noch mit $K_s^n(x)$ multiplicirt erscheint. Die rechte Seite von (20) ist rein imaginär; folglich stimmen $F_s^n(x+i\cdot 0)$ und $F_s^n(x-i\cdot 0)$ in ihren reellen Theilen überein; und nach (19) *ist $F_s^n(x)$ in der Linie BC gleich dem reellen Theile von $F_s^n(x\pm i\cdot 0)$.*

Eine von (20) verschiedene Formel ergiebt sich für die Linien OB und OB'; denn hier gelangt man von $x+i\cdot 0$ zu $x-i\cdot 0$ durch einen Umgang um beide Punkte B und C, wobei sowohl $\sqrt{z^2-b^2}$ als $\sqrt{z^2-c^2}$ sein Zeichen ändert. Es ist längs OB:

$$(21)\qquad F_s^n(x-i\cdot 0) = F_s^n(x+i\cdot 0)$$
$$+\,2(2n+1)\,K_s^n(x)\int_c^b \frac{dx}{[K_s^n(x)]^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}},$$

oder nach (7) und (7a):

$$(21\,\mathrm{a})\quad F_s^n(x-i\cdot 0)-F_s^n(x+i\cdot 0)=2K_s^n(x)\int\limits_b^c\frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}x^2}{\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{x^2-b^2}}\,dx.$$

Dieselbe Differenz ergiebt sich für einen Punkt von OB'; statt des Umganges um die Linie BC kann man einen Umgang um $B'C'$ machen, ohne das Resultat zu ändern (vgl. die Theorie der elliptischen Integrale). Auch die rechte Seite von (21) ist rein imaginär; also: *auch in der Linie* BOB' *ist* $F^n(x)$ *gleich dem reellen Theile von* $F^n(x\pm i\cdot 0)$.

Es bleibt die Strecke $B'C'$ zu untersuchen. Man hat analog zu (20) jedenfalls

$$(21\,\mathrm{b})\qquad F_s^n(x-i\cdot 0)-F_s^n(x+i\cdot 0)$$

$$=\pm 2(2n+1)\,K_s^n(x)\int\limits_{-c}^{x}\frac{dx}{[K_s^n(x)]^2\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}.$$

Das Vorzeichen der rechten Seite bestimmt sich durch die Bemerkung, dass die Function $F_s^n(z)$, bei Umgang von z um alle vier Verzweigungspunkte, sich nicht ändert (wie die elliptischen Integrale), oder dass für $x=-b$ die Relation (21) resultiren muss; *man hat daher das untere Zeichen zu wählen.* Die Function $F_s^n(x)$ ist in $B'C'$ wieder gleich dem reellen Theile von $F_s^n(x\pm i\cdot 0)$.

In C selbst ist

$$F^n(x+i\cdot 0)=F^n(x-i\cdot 0),$$

nämlich nach (7a):

$$(22)\qquad F_s^n(c)=K_s^n(c)\cdot\chi_s^n(\infty).$$

Für $x=b$ stimmt die rechte Seite von (21) mit der rechten Seite von (20) überein. Es folgt hieraus, dass $F_s^n(x)$ *in der ganzen* x-*Axe eine reelle und stetige Function der reellen Variabeln* x *ist;* als solche genügt sie überdies der fundamentalen Differentialgleichung (1). Letzteres folgt aus (19) mit Rücksicht darauf, dass die rechten Seiten von (20) und (21) dieser Differentialgleichung genügen.

10. Von den verschiedenen Potenzreihen, welche erwähnt wurden, brauchen wir nur diejenige näher zu entwickeln, welche nach aufsteigenden Potenzen von ζ fortschreitet und für das Aeussere der Curve (16) convergirt. Es geschieht dies, indem wir in (1) die Grösse ζ als unabhängige Variable einführen und diese Differentialgleichung dann durch eine Potenzreihe integriren. Die niedrigste Potenz, welche vorkommt, ist die $(n+1)^{\text{te}}$, denn F^n muss von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden für $z=\infty$ (d. i. $\zeta=0$).

Die Gleichung (1) lässt sich schreiben:

$$\frac{d^2 E_s^n}{d\xi^2} = [n(n+1)z^2 - p v_s]\, E_s^n, \tag{23}$$

wenn:

$$d\xi = \frac{dz}{\sqrt{z^2-c^2}\sqrt{z^2-b^2}}, \quad p = b^2 + c^2.$$

Es ist nun:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{z}{\sqrt{c^2-b^2}}\left(\sqrt{z^2-c^2} - \sqrt{z^2-b^2}\right) = -z\cdot\zeta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \zeta\left(z^2 - \sqrt{z^2-c^2}\sqrt{z^2-b^2}\right) = \frac{\zeta}{2}\left[c^2 + b^2 + \zeta^2(c^2-b^2)\right],$$

$$\zeta^2\cdot z^2 = \frac{1}{4}(c^2-b^2)(1+\zeta^4) + \frac{1}{2}(c^2+b^2)\zeta^2;$$

also

$$\frac{d^2\zeta^m}{d\xi^2} = \frac{1}{4}(c^2-b^2)\left[m(m-1)\zeta^{m-2} + m(m+1)\zeta^{m+2}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}(c^2+b^2)\, m^2\zeta^m.$$

Soll folglich die unendliche Reihe

$$F_s^n(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \gamma_i \zeta^{n+i+1}$$

der Differentialgleichung (23) genügen, so bestimmen sich die Coefficienten γ_i aus folgenden Relationen:

$$\gamma_i = 0,$$

wenn i ungerade ist, und für geraden Index:

$$\gamma_2(4n+6) = -2\varkappa\left[(n+1) + 2v_s\right]\gamma_0,$$

$$\gamma_{i+2}\left[(2i+4)n + (i+2)(i+3)\right] = -2\varkappa\left[(2i+1)n + (i+1)^2 - 2v_s\right]\gamma_i$$
$$- \left[(2i-2)n + i(i-1)\right]\gamma_{i-2},$$

wo $\varkappa$ dieselbe Bedeutung hat wie in § I., oder, wenn $i = 2j$ und $\gamma_{2j} = \beta_j$ gesetzt wird:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1(2n+3) = -\varkappa\left[(n+1) + 2v_s\right]\beta_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (j+1)\beta_{j+1}(2n+2j+3) = -\varkappa\left[(4j+1)n + (2j+1)^2 - 2v_s\right]\beta_j \\ \qquad - (2j-1)(n+j)\beta_{j-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{24}$$

Bei passender Bestimmung von β_0 kann man also setzen:

$$F_s^n(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \beta_i \zeta^{n+2i+1}. \tag{25}$$

Die rechte Seite convergirt nach Nr. 8. so lange

$$\text{(25a)} \qquad \operatorname{abs} \zeta < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}};$$

in der That ergiebt sich aus (24), wenn

$$U = \lim_{j=\infty} \frac{\beta_{j+1}}{\beta_j}$$

gesetzt wird:

$$U^2 + 2\varkappa U + 1 = 0$$

also

$$U = \frac{(c \pm b)^2}{c^2 - b^2}.$$

Wählt man das obere Zeichen, wodurch die Convergenz am meisten beschränkt wird, so ergiebt sich der Grenzwerth des Quotienten zweier successiven Glieder gleich $\zeta^2 \frac{c+b}{c-b}$, also < 1, wenn (25a) erfüllt ist.

Um β_0 zu bestimmen, berechnen wir den Grenzwerth von $z^{n+1} F_s^n(z)$ für $z = \infty$. Beachtet man die Relation (18), so ergiebt sich aus (25):

$$\lim_{z=\infty} z^{n+1} F_s^n(z) = \beta_0 \left(\sqrt{\frac{z^2 - b^2}{2}} \right)^{n+1};$$

andererseits hat man:

$$\lim_{z=\infty} z^{n+1} K_s^n(z) \int_z^\infty \frac{d\xi}{[K_s^n(z)]^2} = \lim_{z=\infty} \frac{-\dfrac{1}{[K_s^n(z)]^2 \sqrt{z^2-c^2}\sqrt{z^2-b^2}}}{\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z^{n+1} K_s^n(z)}\right)}$$

$$= \frac{1}{a_0 (2n+1)},$$

wenn mit a_0 der Coefficient von z^n in $K_s^n(z)$ bezeichnet wird. Aus Gleichung (6) Nr. 2. folgt daher:

$$\text{(25 b)} \qquad \beta_0 = \frac{1}{a_0} \left(\frac{2}{\sqrt{c^2 - b^2}} \right)^{n+1}.$$

Zum Schlusse möge eine *Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Function $F_s^n(z)$* hier folgen:

1) Sie genügt in der ganzen Ebene bis an die Linie $C'OC$ der Differentialgleichung (1). Der letztern genügt sie auch in dieser Linie als Function der reellen Veränderlichen x, wie überhaupt längs der ganzen x-Axe.

2) Sie ist in der ganzen Ebene eine stetige Function von $z = x + iy$, ausgenommen die genannte Linie. Ihr Verhalten an letzterer ist in (20), (21) und (21 b) angegeben.

3) Ihre Werthe in dieser Linie sind durch (19) definirt als arithmetische Mittel ihrer Werthe zu beiden Seiten der Linie.

4) Sie ist dargestellt durch (6) für alle Werthe von z ausserhalb COC'.

5) Sie wird für $z = \infty$ Null von der Ordnung $n + 1$.

6) Für alle Werthe von z ausserhalb der Curve (16) kann sie in eine nach steigenden Potenzen von ζ geordnete Reihe entwickelt werden, welche mit ζ^{n+1} beginnt; ihr Bildungsgesetz findet sich in (24) und (25); hierbei ist ζ durch (2) und durch die zu Anfang von § III. gemachten Festsetzungen definirt.

7) Im Innern der beiden Schleifen, aus welchen (16) besteht, gilt je eine Entwicklung nach auf- und absteigenden Potenzen von ζ.

8) Ihre asymptotischen Werthe werden durch die weiter unten aufgestellten Gleichungen (29) bis (33) gegeben.

§ IV.

Grenzwerthe der Functionen K^n und F^n für unendlich grosse Werthe von n.

11. Um die Convergenz der im Folgenden auftretenden Reihen zu beurtheilen, ist es nöthig Näherungswerthe für K^n und F^n bei sehr grossen Werthen von n aufzustellen, analog denjenigen, welche man Laplace für die Kugelfunctionen verdankt. Wir beginnen mit der Function $K^n(z)$; *es möge n zunächst gerade* ($= 2\sigma$) *sein.* Die Gleichung (3) schreiben wir in der Form

$$(26) \qquad K_s^n(z) = \frac{1}{2}\zeta^{-n}\left[\alpha_0 + \alpha_1\zeta^2 + \alpha_2\zeta^4 + \cdots + \alpha_\sigma\zeta^n\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\zeta^n\left[\alpha_0 + \alpha_1\zeta^{-2} + \alpha_2\zeta^{-4} + \cdots + \alpha_{\sigma-1}\zeta^{-n+2}\right].$$

Die beiden Glieder der rechten Seite sind nach einander zu untersuchen.

Der zweite Factor des ersten Gliedes liefert für $n = \infty$ eine unendliche Reihe, deren Coefficienten sich aus den Gleichungen (4) berechnen lassen. Die Grössen v_s bleiben endlich für $n = \infty$ (wie das Beispiel der Kugelfunctionen zeigt); es folgt daher aus (4) für $n = \infty$;

$$(27) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}\varkappa\alpha_1, \\ 2\cdot\alpha_2 &= -\frac{5}{2}\varkappa\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ (i+1)\,\alpha_{i+1} &= -\frac{1}{2}(4i+1)\,\varkappa\alpha_i - \frac{1}{2}(2i-1)\,\alpha_{i-1}. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Also auch:

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = -\frac{4i+1}{2i+2}\varkappa - \frac{2i-1}{2i+2}\,\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}.$$

Bezeichnet also A den Grenzwerth des links stehenden Verhältnisses für $i = \infty$, so hat man $\mathsf{A}^2 + 2\varkappa\mathsf{A} + 1 = 0$, und hieraus

$$\mathsf{A} = -\frac{c-b}{c+b} \quad \text{oder} \quad \mathsf{A} = -\frac{c+b}{c-b}.$$

Die aus (27) abgeleitete Reihe

$$\text{(27a)} \qquad \varphi(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1\zeta^2 + \alpha_2\zeta^4 + \cdots$$

convergirt daher sicher, so lange abs $\zeta < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$, d. h. für alle Punkte z ausserhalb der Curve (16) und für alle Punkte ζ im Innern des um Ω geschlagenen Kreises, welcher durch O und O_1 geht (Fig. 2). Ausserhalb desselben convergirt (27a) nicht mehr; um das zu erkennen, bestimmen wir $\varphi(\zeta)$ näher. Aus (27a) ergiebt sich durch Differentiation unter Anwendung von (27):

$$\begin{aligned}\varphi'(\zeta) &= -\varkappa\zeta[\alpha_0 + 5\alpha_1\zeta^2 + 9\alpha_2\zeta^4 + \cdots + (4i-3)\alpha_{i-1}\zeta^{2i-2} + \cdots] \\ &\quad - \zeta^3[\alpha_0 + 3\alpha_1\zeta^2 + 5\alpha_2\zeta^4 + \cdots + (2i-3)\alpha_{i-2}\zeta^{2i-4} + \cdots] \\ &= -(\varkappa\zeta + \zeta^3)\varphi(\zeta) - (2\varkappa\zeta^2 + \zeta^4)\varphi'(\zeta),\end{aligned}$$

und hieraus durch Integration, da $\varphi(0) = \alpha_0$:

$$\text{(27b)} \qquad \varphi(\zeta) = \alpha_0(\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Man erkennt hieraus, dass die angegebene Grenze für abs ζ nicht überschritten werden darf, wenn (27a) einen Sinn haben soll.

Das zweite Glied der rechten Seite von (26) besteht aus dem für $n = \infty$ verschwindenden Factor ζ^n und einer Reihe, welche nach Vorstehendem divergirt, so lange (27a) convergirt. Gleichwohl nähert sich das Product der Grenze Null für $n = \infty$. Da die rechte Seite von (27a) convergirt für $\varrho^2 = \text{abs}\,\zeta^2 < \frac{c-b}{c+b}$, so ist:

$$\lim_{i=\infty} \alpha_i \left(\frac{c-b}{c+b}\right)^{i(1-\varepsilon)} = 0,$$

wenn ε eine Zahl bezeichnet, die sich beliebig wenig von 0 unterscheiden mag; folglich für sehr grosse Werthe von i:

$$\text{abs}\,\alpha_i < \left(\frac{c+b}{c-b}\right)^i,$$

und für hinreichend grosse i:

$$\text{abs}\,[\alpha_i\zeta^{n-2i} + \alpha_{i+1}\zeta^{n-2i-2} + \cdots + \alpha_{\sigma-1}\zeta^2] < (\sigma - i)\left(\frac{c-b}{c+b}\right)^\sigma.$$

Die rechte Seite aber nähert sich der Null, wenn n unendlich gross wird, so gross auch i sein mag, denn es wird höchstens $i = \sigma$. In dem zweiten Gliede der rechten Seite von (26) verschwindet also jeder einzelne Term für endliche Werthe von i und es verschwindet der

Rest bei $n = \infty$; folglich ist diese Klammer zu vernachlässigen. Also folgt aus (27a) und (27b):

Ist n gerade und hinreichend gross, so gilt für die Function $K_s^n(z)$ näherungsweise die Gleichung:

$$K_s^n(z) = \frac{\alpha_0 \zeta^{-n}}{2\sqrt{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}}, \tag{28}$$

wenn

$$\text{abs}\,\zeta < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}},$$

d. h. wenn z ausserhalb der Curve (16) *liegt.* Hierin haben die Grössen α_0, ζ, $\varkappa$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 1.

Ist n ungerade, so hat man an Stelle von (26) wegen (3a):

$$K_s^n(z) = \frac{1}{2} z\zeta^{-n+1}\psi(\zeta) + \frac{1}{2} z\zeta^{n-1}[\alpha_0 + \alpha_1\zeta^{-2} + \alpha_2\zeta^{-4} + \cdots].$$

Hierin bedeutet $\psi(\zeta)$ eine zu (27a) analoge Reihe; die Coefficienten α_i derselben bestimmen sich aber jetzt mittelst der aus (4a) für $n = \infty$ folgenden Gleichungen:

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2}\varkappa\alpha_0,$$

$$2\alpha_2 = -\frac{7}{2}\varkappa\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(i+1)\,\alpha_{i+1} = -\frac{4i+3}{2}\varkappa\alpha_i - \frac{2i+1}{2}\alpha_{i-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Für die Function ψ findet man die Differentialgleichung:

$$\psi'(\zeta)\cdot[\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1] = -3\psi(\zeta)\cdot[\zeta^3 + \varkappa\zeta],$$

und hieraus:

$$\psi(\zeta) = \alpha_0(\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1)^{-\frac{3}{4}}.$$

Das zweite Glied in dem Ausdrucke für K^n verschwindet wieder, und so ergiebt sich mit Hülfe von (9) für $n = \infty$ (ungerade) und $\text{abs}\,\zeta^2 < \frac{c-b}{c+b}$:

$$K_s^n(z) = \frac{z\cdot\zeta^{-n+1}\cdot\alpha_0}{2(\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\zeta^{-n}\cdot\alpha_0\cdot\sqrt{c^2 - b^2}}{4\sqrt[4]{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}}.$$

Die rechte Seite bringt man mit der rechten Seite von (28) in Uebereinstimmung, wenn man noch α_0 durch a_0 ausdrückt. Es muss $K^n(z)\cdot z^{-n}$ für $z = \infty$ (d. i. $\zeta = 0$) gleich a_0 werden; folglich hat man durch Benutzung von (18) bez. bei geradem und ungeradem n:

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = a_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = a_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c^2-b^2}\right)^{n-1}.$$

Für jeden hinreichend grossen Werth von n gilt daher folgende Näherungsformel:

$$K_s^n(z) = \frac{\zeta^{-n}\sqrt{(c^2-b^2)^n}\cdot a_0}{2^n\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}}, \tag{28a}$$

wenn:

$$\operatorname{abs}\zeta < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Der Sinn der vierten Wurzel ist dadurch bestimmt, dass $K^n\cdot z^{-n}$ gleich a_0 sein muss für $z=\infty$.

Ueberschreitet abs ζ die bisher gezogene Grenze, so sind die soeben ausgeführten Rechnungen nicht mehr anwendbar; doch kann man auf folgende Weise zu dem asymptotischen Werthe von K^n gelangen.

Innerhalb des Kreises $\varrho = \operatorname{abs}\zeta < 1$ ist z eine stetige Function von ζ, ausgenommen die Linien OB und O_1B_1 (vgl. Fig. 2). Das Gleiche gilt daher auch von der Function $K_s^n(z)\cdot\zeta^n$; es gilt dies aber nur bis an die Peripherie dieses Kreises, nicht auf der Peripherie; denn wenn z in der Fläche Z' (vgl. den Schluss von Nr. 7.) die Linie BC überschreitet, springt ζ von einem Punkte des Kreisbogens BC zu dem entsprechenden des Kreisbogens B_1C über. Für das Innere des durch O und O_1 gehenden Kreises ist K^n durch (28a) als stetige Function von ζ gegeben; die stetige Fortsetzung der linken Seite bis an den Kreis $\varrho = 1$ und bis an die Linien OB und O_1B_1 muss also mit der stetigen Fortsetzung der rechten Seite in diesem Gebiete übereinstimmen; in der That wird auch letztere nur an den Linien OB und O_1B_1 unstetig.

Damit wäre die Gültigkeit der Formel (28a) innerhalb der Curve (16) erwiesen. Um die hierbei benutzte Schlussweise genauer zu rechtfertigen, mag man noch folgende Ueberlegungen anstellen. Zunächst zeigt man, dass *der asymptotische Werth des Differentialquotienten von $\zeta^nK_s^n$ gleich ist dem Differentialquotienten des asymptotischen Werthes von $\zeta^n\cdot K_s^n$*. In der That hat man für $n=2\sigma$ aus (26):

$$\frac{d\zeta^nK_s^n(z)}{d\zeta} = \alpha_1\zeta + 2\alpha_2\zeta^3 + 3\alpha_3\zeta^5 + \cdots + \sigma\alpha_\sigma\zeta^{n-1}$$
$$+ \zeta^{2n-1}\left[n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1\zeta^{-2} + (n-2)\alpha_2\zeta^{-4} + \cdots\right].$$

Das erste Glied der rechten Seite ist direct gleich $\varphi'(\zeta)$; das Verschwinden des zweiten ergiebt sich wie vorhin bei (26). — Ebenso zeigt man, dass die beiden Seiten von (28a) beliebig oft differentiirt werden können, ohne das Bestehen der Gleichheit zu stören. Um nun die Function $\zeta^n\cdot K_s^n(z)$ über den Kreis $\varrho = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ hinaus fortzusetzen, wird man dieselbe nach Potenzen von $(\zeta - \zeta_0)$ entwickeln, wo ζ_0 einen innern, der Peripherie nahen Punkt bezeichnet. Die Coefficienten der Potenzen von $(\zeta - \zeta_0)$ sind (bis auf Zahlenfactoren) gleich den Differentialquotienten von $\zeta^n K_s^n$ in $\zeta = \zeta_0$. Ebenso kann man $\varphi(\zeta)$ nach Potenzen von $(\zeta - \zeta_0)$ entwickeln; die Coefficienten bestimmen sich dabei durch die Differentialquotienten von $\varphi(\zeta)$ in $\zeta = \zeta_0$. Um endlich den asymptotischen Werth von $\zeta^n \cdot K_s^n$ zu finden, muss man die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der erst erwähnten Entwicklung suchen; diese aber ergaben sich nach (28a) soeben als Differentialquotienten proportional zu den Differentialquotienten von $\varphi(\zeta)$, also proportional zu den Coefficienten der Entwicklung dieser Function. Beide Entwicklungen sind sonach identisch für $n = \infty$.

Kehrt man vermöge unserer Abbildung von der Fläche Z' zur Fläche Z' zurück, so giebt dies folgenden Satz:

Durch die Gleichung (28a) *ist nicht nur für die ausserhalb der Curve* (16) *liegenden Punkte* z *ein asymptotischer Werth von* $K_s^n(z)$ *gegeben, sondern für alle Punkte der* z*-Ebene, allein ausgenommen die Punkte der Linie* $C'OC$.

Um letztere Punkte zu erledigen, muss zuvor die Function F^n untersucht werden.

12. Setzt man in (24) $n = \infty$, so ergeben sich für den Coefficienten β der Entwicklung von F^n genau wieder die Recursionsformeln (27); man hat daher in Rücksicht auf (25b)

$$(29) \qquad F_s^n(z) = \beta_0 \zeta^{n+1} \varphi(\zeta) = \frac{2^{n+1} \cdot \zeta^{n+1}}{a_0 \cdot \sqrt{(c^2 - b^2)^{n+1}} \sqrt{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}}$$

für $n = \infty$. Diese Gleichung gilt zunächst nur, so lange die Entwicklung (25) convergirt, d. h. für die ausserhalb der Curve (16) liegenden Punkte. Da aber F^n eine stetige Function von ζ ist bis an den Kreis $\varrho = 1$ und bis an beide Seiten der Linien OB und $O_1 B_1$, so schliesst man, wie am Schlusse von Nr. 11., dass *die Gleichung* (29) *gültig ist für alle Punkte der* z*-Ebene, allein ausgenommen die Punkte der Linie* $C'OC$.

Von letzterer Linie müssen die Strecken $B'C'$, OB', OB und BC einzeln betrachtet werden. Die Grenzwerthe von F^n ergeben sich aus Gleichung (19) und aus den Bemerkungen in Nr. 9. Mit Hülfe der Gleichungen (9) und (10) erhält man zunächst aus (29):

$$29\text{a}) \quad F_s^n(z) = \frac{2^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varrho^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left\{\text{cosin}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega - \frac{\varphi}{2}\right] + i \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega - \frac{\varphi}{2}\right]\right\}}{a_0 \cdot \sqrt{(c^2 - b^2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{1}{2}}}}, {}^{*})$$

---

*) Wenn man im Folgenden $F(x - i \cdot 0)$ berechnen will, $\varphi = 2\pi$ setzt und ω entsprechend (d. i. gemäss obiger Abbildung) bestimmt, so darf i nicht

wo:

$$(29\text{b})\qquad \left(\frac{4}{c^2-b^2}\right)^2 r^4 = \varrho^4 + \varrho^{-4} + 4\varkappa(\varrho^2 + \varrho^{-2})\cos 2\omega + 4\varkappa^2 + 2\cos 4\omega.$$

In der Linie CC' ist $F^n(x)$ gleich dem reellen Theile von $F^n(x \pm i\cdot 0)$; man hat so unmittelbar folgende Resultate aus (29a) und (29b):

In $C'B'$ *ist* $\varrho = 1$, $\varphi = +\pi$ und ω variabel von $-\pi$ bis $-\frac{\pi}{2}$, oder $\varphi = -\pi$ und ω variabel von π bis $+\frac{\pi}{2}$, *also:*

$$(30)\qquad F_s^n(x) = -\frac{1}{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt{2\varkappa + \cos 2\omega}}$$

$$\text{für:}\ \begin{cases} -c \leqq x \leqq -b, \\ n = \infty, \\ \pi \geqq \omega \geqq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

In $B'O$ *ist* ϱ variabel von 1 bis $\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$, $\varphi = \pi$ und $\omega = -\frac{\pi}{2}$, oder $\varphi = -\pi$ und $\omega = +\frac{\pi}{2}$, *also:*

$$(31)\qquad F_s^n(x) = \frac{(-1)^{\sigma+1}}{a_0\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1} \frac{\varrho^{n+1}}{\sqrt{2\varkappa\varrho^2 - \varrho^4 - 1}}$$

$$\text{für:}\ \begin{cases} -b \leqq x < 0, \\ n = \infty, \end{cases}$$

wenn wieder $n = 2\sigma$ oder $n = 2\sigma + 1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Für den Punkt O selbst ($r = 0$) verschwindet der Nenner der rechten Seite, wie dies auch bei der entsprechenden Formel für die Kugelfunction Q_ν^n eintritt.

In OB *ist* ϱ variabel von $\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ bis 1, $\varphi = 0$ und $\omega = -\frac{\pi}{2}$, oder $\varphi = 2\pi$ und $\omega = +\frac{\pi}{2}$, *also:*

$$(32)\qquad F_s^n(x) = \frac{(-1)^{\sigma}}{a_0\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1} \frac{\varrho^{n+1}}{\sqrt{2\varkappa\varrho^2 - \varrho^4 - 1}}$$

$$\text{für:}\ \begin{cases} 0 < x \leqq b, \\ n = \infty. \end{cases}$$

---

mehr mit $-i$ vertauscht werden; denn durch die Wahl von φ ist das Annähern an x von der Seite $x - i\cdot 0$ bereits ausgedrückt.

In BC ist $\varrho = 1$, $\varphi = 0$ und ω variabel von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, oder $\varphi = 2\pi$ und ω variabel von $\frac{\pi}{2}$ bis 0, *also*

$$F_s^n(x) = \frac{-1}{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1} \frac{\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt[4]{2\varkappa + 2\operatorname{cosin} 2\omega}} \tag{33}$$

$$\text{für:} \left\{\begin{array}{l} b \leqq x \leqq c, \\ n = \infty. \\ \frac{\pi}{2} \geqq \omega \geqq 0. \end{array}\right.$$

13. Aus den Gleichungen (30) — (33) ergeben sich jetzt weiter die asymptotischen Werthe von K_s^n in der Linie $C'OC$ (die in Nr. 11. noch nicht angegeben werden konnten) durch Benutzung der Relationen (20) und (21) in Nr. 9.

Für die Punkte der Linie BC erhält man aus (29a), indem man wieder $\varrho = 1$, $\varphi = 2\pi$, $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ nimmt, um $F_s^n(x - i\cdot 0)$ zu finden:

$$\begin{aligned} &F_s^n(x - i\cdot 0) - F_s^n(x + i\cdot 0) \\ &= -\frac{2i}{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt[4]{2\varkappa + 2\operatorname{cosin} 2\omega}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ferner wird nach (9) und nach Nr. 10., wenn $\varrho = 1$, $\varphi = 2\pi$:

$$\begin{aligned} &\int_c^x \frac{dx}{[\mathsf{K}_s^n(x)]^2\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}} \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{c^2-b^2}}\int_0^\omega \frac{d\omega}{[\mathsf{K}(\omega)]^2\sqrt{\varkappa + \operatorname{cosin} 2\omega}}, \end{aligned} \tag{34a}$$

wo zur Abkürzung $\mathsf{K}(\omega) = K_s^n(x)$. Durch Einsetzen der Werthe (34) und (34a) in (20) und Differentiation beider Seiten nach ω ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$X'(\omega) = -(2n+1)\frac{\varphi(\omega)}{\mathsf{K}(\omega)} + \frac{\mathsf{K}'(\omega)}{\mathsf{K}(\omega)}X(\omega). \tag{34b}$$

Hier ist zur Abkürzung die rechte Seite von (34) mit $2iX(\omega)$ und der Differentialquotient der rechten Seite von (34a) mit $-i\varphi(\omega)[\mathsf{K}(\omega)]^{-2}$ bezeichnet. Aus (34b) findet man durch Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\mathsf{K}}{X} &= (2n+1)\int \frac{\varphi(\omega)}{[X(\omega)]^2}\,d\omega \\ &= -(2n+1)\,a_0^2\left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{2n+1}\int \frac{d\omega}{\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\right]^2}, \end{aligned}$$

also:

$$\mathsf{K}(\omega) = \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^n \cdot a_0 \cdot 2 \cdot \frac{\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt{2\varkappa + 2\operatorname{cosin} 2\omega}} + C X(\omega),$$

wenn C eine Integrationsconstante bedeutet. Setzt man diesen Werth wieder in die rechte Seite von (20) ein, so ergiebt sich $C = 0$.

In der Linie BC, d. h. für $b \leqq x \leqq c$ besteht daher die Näherungsformel:

$$K_s^n(x) = 2a_0 \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^n \frac{\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt{2\varkappa + 2\operatorname{cosin} 2\omega}}, \tag{35}$$

$$\text{für:} \begin{cases} n = \infty, \\ b \leqq x \leqq c. \end{cases}$$

Für $x = c$, d. h. $\omega = 0$ findet man insbesondere:

$$K_s^n(c) = \frac{2a_0}{\sqrt{c}} \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad \text{für} \quad n = \infty. \tag{35a}$$

Wollte man diesen Werth dagegen aus (28a) berechnen, so würde sich nur die Hälfte der rechten Seite ergeben. Für $x = b$, d. h. $\omega = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$\begin{aligned} K_s^n(b) &= 2\,\frac{(-1)^\sigma a_0}{\sqrt{2b}} \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} && \text{für} \quad n = 2\sigma = \infty, \\ &= 2\,\frac{(-1)^{\sigma+1} a_0}{\sqrt{2b}} \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} && \quad " \quad n = 2\sigma + 1 = \infty. \end{aligned} \tag{35b}$$

Durch Einsetzen des Werthes von K_s^n in (20) und Benutzung von (34) oder direct aus (34a) findet man ferner:

$$\int\limits_c^x \frac{dx}{[K_s^n(x)]^2 \sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}$$

$$= -i \left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{2n+1} \frac{1}{a_0^2(2n+1)} \operatorname{tang}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega,$$

also für $x = b$, d. h. $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$\int\limits_c^b \frac{dx}{[K_s^n(x)]^2 \sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}} = -i \left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{a_0^2(2n+1)} \tag{35c}$$

$$\text{für } n = \infty.$$

Diese Formel erlaubt uns aus (21) den *Grenzwerth von K^n in der Linie OB zu berechnen.* Die linke Seite von (21a) findet man für unsern Fall, indem man auf der rechten von (29a) $\varphi = 2\pi$ und

$\omega = \frac{\pi}{2}$ setzt und das Doppelte des entstehenden Ausdrucks nimmt; es wird so:

$$(36)\quad \begin{aligned} K_s^n(x) &= (-1)^\sigma a_0 \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^n \frac{\varrho^{n+1}}{\sqrt{2\varkappa\varrho^2-\varrho^4-1}} \\ &\qquad \text{für } n = 2\sigma = \infty, \\ &= (-1)^{\sigma+1} a_0 \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^n \frac{\varrho^{n+1}}{\sqrt{2\varkappa\varrho^2-\varrho^4-1}} \\ &\qquad \text{für } n = 2\sigma+1 = \infty. \end{aligned}$$

Für $\varrho = 1$ ergiebt sich wieder der Werth (35b) für $K_s^n(b)$.

Für die Linie $B'C'$ hat man, da in (29a) $\varphi = -\pi$ zu setzen ist, in (34) und den folgenden Gleichungen $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega$ zu ersetzen durch $\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega$; man erhält so:

$$(36\text{a})\quad K_s^n(x) = 2a_0 \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt{2\varkappa+2\operatorname{cosin}2\omega}}$$

$$\text{für} \left\{ \begin{array}{c} -c \leqq x \leqq -b, \\ n = \infty, \\ \pi \geqq \omega \geqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Ersetzt man ω durch $\pi - \omega$, so entsteht, wie es sein muss, die rechte Seite von (35) bis auf einen Factor $(-1)^n$. Für $x = -c$ ist $\omega = \pi$, also:

$$K_s^n(-c) = (-1)^n \frac{2a_0}{\sqrt{c}} \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{für } n = \infty,$$

und für $x = -b$, $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$K_s^n(-b) = 2\,\frac{(-1)^\sigma a_0}{\sqrt{2b}} \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{für } n = \infty.$$

Um endlich den asymptotischen Werth von $K_s^n(x)$ in OB' zu finden, hat man nur die rechten Seiten der Gleichungen (36) *mit* $(-1)^n$ *zu multipliciren; denn K_s^n ist eine gerade oder ungerade Function, je nachdem n gerade oder ungerade ist.*

§ V.

Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Lamé'schen Functionen.

14. Eine holomorphe Function von z wird man auf Grund des Cauchy'schen Satzes nach Lamé'schen Functionen entwickeln können, wenn Letzteres mit dem reciproken Werthe von $z_1 - z$ möglich ist.

Die Entwicklung des letztern Ausdrucks ergiebt sich leicht als specieller Fall einer bekannten Formel der Potentialtheorie. Es seien ϱ, μ, ν und ϱ_1, μ_1, ν_1 die elliptischen Coordinaten zweier beliebigen Punkte im Raume, R ihre Entfernung von einander; dann hat man:

$$\begin{aligned} R^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 + {\varrho_1}^2 + {\mu_1}^2 + {\nu_1}^2 - 2c^2 - 2b^2 - 2\,\frac{\varrho\varrho_1\,\mu\mu_1\,\nu\nu_1}{b^2c^2} \\ - 2\,\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{{\varrho_1}^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{{\mu_1}^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{b^2-{\nu_1}^2}}{b^2(c^2-b^2)} \\ - 2\,\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{{\varrho_1}^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-{\mu_1}^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-{\nu_1}^2}}{c^2(c^2-b^2)}; \end{aligned}$$

hierin ist $\varrho \geqq c$, $c \geqq \mu \geqq b$, $b \geqq \nu \geqq 0$, und analog für ϱ_1, μ_1, ν_1. Ist ausserdem $\varrho_1 > \varrho$, so hat man:*)

$$(37) \qquad \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y^n,$$

wenn:

$$(37\text{a}) \qquad Y^n = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{s=2n+1} E_s^n(\mu) E_s^n(\mu_1) E_s^n(\nu) E_s^n(\nu_1)\, E_s^n(\varrho) F_s^n(\varrho_1);$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass über die noch willkürlich gelassene Constante a_0 in E passend verfügt ist; letztere muss so gewählt sein, dass

$$(37\text{b}) \quad \int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} \int_b^c (\mu^2-\nu^2)\,[E_s^n(\mu) E_s^n(\nu)]^2 \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = 1.$$

In (37) setzen wir jetzt $\mu = \mu_1 = c$, $\nu = \nu_1 = b$; dann wird $R^2 = (\varrho - \varrho_1)^2$; ferner ist: $L_s^n(b) = 0$, $M_s^n(c) = 0$, $N_s^n(b) = 0$, $N_s^n(c) = 0$; also wird:

$$(38) \qquad Y^n = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} [K_s^n(c)\, K_s^n(b)]^2\, K_s^n(\varrho)\, F_s^n(\varrho_1).$$

Es bleiben rechts nur die Functionen der ersten Classe stehen; deshalb haben wir uns im Vorstehenden nur mit diesen beschäftigt. Die constanten Coefficienten in Y^n können noch anders ausgedrückt werden. Es ist nämlich nach (5):

$$\begin{aligned} (38\text{a}) \qquad K_s^n(c)\, K_s^n(b) &= \sum_{m=0}^{m=\sigma} h_{2m}^{n,s}\, P_{2m}^n(1) \\ &= {h_0}^{n,s}\, \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1)}; \text{**)} \end{aligned}$$

---

*) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 1. Auflage, 1861, S. 378, 2. Auflage, Th. II, S. 172 und Liouville in dessen Journal, Bd. 10 und 11.

**) Vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., Th. I., S. 207.

rechts ist für $n = 0$ die Einheit statt des Zahlenfactors zu setzen. Dies giebt folgenden Satz:

Sind z, z_1 zwei reelle Grössen und $z_1 > z > c$, so besteht folgende Relation:

$$(39)\quad \frac{1}{z_1 - z} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} (h_0^{n,s})^2\, K_s^n(z)\, F_s^n(z_1),$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n K_s^n(z)\, F_s^n(z_1),$$

wenn wieder $\sigma = \frac{1}{2} n$ oder $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$, und wenn hier und im Folgenden zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(39\text{a})\quad C_s^n = [K_s^n(b)\, K_s^n(c)]^2 \cdot \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

Die Gleichung (39) wird man auch für complexe Werthe von z und z_1 in Anspruch nehmen können, wenn für solche die rechte Seite convergirt und eine stetige Function von z und z_1 ist. Letzteres bedarf deshalb einer besonderen Erörterung, weil die Functionen F^n an der Linie $C'OC$ unstetig sind. Wir untersuchen zuerst die Convergenz der rechten Seite und gehen erst dann auf diese Erörterung ein.

15. Die Convergenz der rechten Seite von (39) kann man mit Hülfe der in § IV. aufgestellten asymptotischen Werthe beurtheilen. Es sind hier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1) *Von den beiden Punkten z und z_1 liegt keiner in der Linie COC'.* Dann ist für $n = \infty$ nach (28a), (29), (38):

$$Y^n = \frac{\pi \zeta^{-n} \zeta_1^{n+1}}{(2n+1)\sqrt{c^2 - b^2}\, \sqrt[4]{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}\, \sqrt[4]{\zeta_1^4 + 2\varkappa\zeta_1^2 + 1}}$$

$$\cdot \left(\frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n-1)} \right)^2 \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} (h_0^{n,s})^2.$$

Aus der Formel*)

$$(40)\quad P^n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{s=2n+1} E_s^n(\mu)\, E_s^n(\mu_1)\, E_s^n(\nu)\, E_s^n(\nu_1),$$

wo:

$$(40\text{a})\quad \cos\gamma = \frac{\mu\nu\mu_1\nu_1}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\mu_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu_1^2}}{b^2(c^2 - b^2)}$$

$$+ \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu_1^2}\sqrt{c^2 - \nu_1^2}}{c^2(c^2 - b^2)},$$

folgt für $\mu = \mu_1 = c$, $\nu = \nu_1 = b$ wegen (38a):

---

*) Vgl. Heine, l. c. S. 432.

$$(40\text{b})\qquad P^n(1) = 1 - \frac{\pi}{2(2n+1)}\left(\frac{1\,.\,2\,...\,n}{1\,.\,3\,...\,(2n-1)}\right)^2 \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} (h_0^{n,s})^2.$$

Somit wird für $n = \infty$

$$Y^n = \frac{2\zeta^{-n}\zeta_1^{n+1}}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}\sqrt[4]{\zeta_1^4+2\varkappa\zeta_1^2+1}}\,.$$

Der Quotient $Y^{n+1} : Y^n$ nähert sich folglich bei wachsendem n der Grenze $\zeta_1 : \zeta$. *Die Reihe ist also absolut convergent, wenn* abs $\zeta_1 <$ abs ζ *oder* $\varrho_1 < \varrho$, *d. h. wenn die durch* z *gehende Curve des Systems* (14) *ganz umschlossen wird von der durch* z_1 *gehenden Curve dieses Systems.* Liegen beide Punkte auf derselben Curve, so lässt sich über die Convergenz hier nichts aussagen.

2) *Es liege* z *auf* BC *oder* $B'C'$, z_1 *ausserhalb der Linie* COC'. Aus (29), (35) und (40b) folgt für $n = \infty$, wenn zunächst $b < x < c$

$$Y^n = \frac{4\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\cdot\zeta_1^{n+1}}{\sqrt{c^2-b^2}\sqrt[4]{2\varkappa+2\operatorname{cosin}2\omega}\sqrt{\zeta_1^4+2\varkappa\zeta_1^2+1}}\,.$$

Also bei hinreichend grossem n:

$$Y^n + Y^{n+1} + \cdots + Y^{n+\nu}$$
$$= X\sum_{m=n}^{m=n+\nu}(2m+1)\,\zeta_1^{m+1}\operatorname{cosin}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\omega + R,$$

wo X den von n unabhängigen Factor in Y^n bezeichnet, und R die Summe der Fehler, welche man bei Benutzung der asymptotischen Werthe begeht, eine Summe, welche jedenfalls gegen die Summe dieser Werthe selbst verschwindet. Es ist aber

$$\text{abs}\sum(2m+1)\,\zeta_1^{m+1}\operatorname{cosin}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\omega \leqq \sum(2m+1)\,\varrho_1^{m+1},$$

und die rechte Seite wird beliebig klein, wenn n hinreichend gross, für jede Zahl ν, *immer* $\varrho_1 < 1$ *vorausgesetzt* (vergl. Nr. 7.); also wird auch die Summe $Y^n + \cdots + Y^{n+\nu}$ beliebig klein für ein hinreichend grosses n. *Die rechte Seite von* (39) *convergirt.* Dasselbe gilt, wenn z in $B'C'$ liegt.

3) *Es liege* z_1 *auf* BC *oder* $B'C'$, z *ausserhalb der Linie* COC'. Aus (33) und (28a) folgt, wenn $b < x_1 < c$:

$$Y^n = -\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\,\frac{\zeta^{-n}\operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_1}{\sqrt[4]{2\varkappa+2\operatorname{cosin}\omega_1}\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}}\,.$$

Da $\varrho < 1$, *ist die Reihe offenbar divergent*, auch für $\varrho = 1$. Ebenso in $B'C'$, wo $-c < x_1 < -b$.

4) *Es liege z in BB', z_1 ausserhalb COC'.* Man hat nach (29) und (36) für $n = \infty$:

$$\text{abs } Y^n = \text{abs } \frac{2}{\sqrt{c^2 - b^2}} \; \frac{\varrho^{n+1} \zeta_1^{n+1}}{\sqrt[4]{2\varkappa\varrho^2 - \varrho^4 - 1} \sqrt[4]{\zeta_1^4 + 2\varkappa\zeta_1^2 + 1}} .$$

Da $\varrho < 1$ und $\varrho_1 < 1$, convergirt die Reihe immer. Gleichwohl ist sie nur dann gleich $(z - z_1)^{-1}$, wenn $\varrho_1 < \varrho$; denn nur für diesen Fall ist (39) bei reellen Werthen von z und z_1 (beide $> c$) bewiesen, und lässt man z und z_1 aus der Linie $C \infty C'$ heraustreten, während (39) erfüllt bleibt, so muss nach dem unter 1) erhaltenen Resultate stets $\varrho_1 < \varrho$ bleiben.

5) *Es liege z_1 in BB', z ausserhalb COC'.* Wegen (28a) und (32) tritt offenbar Divergenz ein.

6) *Es liegen z und z_1 in BB'.* Man hat nach (31), (32) und (36):

$$\text{abs } Y^n = \text{abs } \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - b^2}} \; \frac{\varrho^{n+1} \varrho_1^{n+1}}{\sqrt[4]{2\varkappa\varrho^2 - \varrho^4 - 1} \sqrt[4]{2\varkappa\varrho_1^2 - \varrho_1^4 - 1}} .$$

Die Reihe convergirt immer; es gilt aber wieder die unter (4) gemachte Bemerkung.

7) *Es liege z in BC oder $B'C'$, z_1 in BB'.* Man hat aus (31) und (35):

$$\text{abs } Y^n = \text{abs } \frac{4}{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{2}} \; \frac{\varrho_1^{n+1} \operatorname{cosin}\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt[4]{2\varkappa\varrho_1^2 - \varrho_1^4 - 1} \sqrt[4]{2\varkappa + 2 \operatorname{cosin} 2\omega}} .$$

Die Reihe convergirt, wenn $\varrho_1 < 1$.

Als Resultat dieses Paragraphen sprechen wir folgenden Satz aus: *Die in (39) gegebene Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Lamé'schen Functionen ist immer anwendbar, wenn die durch den Punkt z gehende Curve des Systems (14) von der durch z_1 gelegten Curve desselben Systems (oder, falls beide aus je zwei Ovalen bestehen, ein Theil der erstern von einem Theile der letztern) ganz umschlossen wird. Der Punkt z kann auch auf BC oder auf $B'C'$ liegen; alsdann gilt (39) für jeden Punkt z_1 ausserhalb dieser beiden Strecken.*

16. Nach Vorstehendem convergirt die rechte Seite von (39) immer, wenn $\varrho_1 < \varrho$ (wobei $\varrho_1 < 1$, $\varrho \leq 1$), also insbesondere auch wenn z_1 auf der Linie BB' liegt und z sich im Innern eines der beiden Ovale befindet, aus welchen die durch z_1 gehende Curve des Systems (14) besteht. Nennt man P und P' die auf OB bez. OB' liegenden Schnittpunkte der beiden Ovale mit der x-Axe, so steht in (39) rechts eine absolut convergente unendliche Reihe, in welcher jedes Glied als Function von z_1 längs der Linie PP' nach Gleichung (21) unstetig ist; auf der linken Seite dagegen eine in der ganzen

Ebene (ausgenommen die Stelle $z = z_1$) stetige Function von z_1. Es muss daher die Summe der Sprünge, welche die einzelnen Glieder an PP' erleiden, verschwinden; d. h. nach (21a) muss man haben:

$$(41)\qquad 0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n \, K_s^n(z) \, K_s^n(x_1) \int_b^c \frac{\mathfrak{a}_s^n - \mathfrak{b}_s^n x^2}{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}} \, dx,$$

wo also $z = x + iy$ einen Punkt im Innern der Curve (16) bedeutet, und wo x_1 auf der x-Axe zwischen den beiden Schnittpunkten P, P' der durch z gehenden Curve des Systems (14) mit der Strecke BOB' liegt. Denkt man umgekehrt x_1 als fest gegeben, so kann man letztere Bedingung dahin aussprechen, dass z im Innern eines der beiden Ovale liegen muss, aus denen die durch x_1 gehende Curve (14) besteht. Liegt insbesondere z in BC, so kann x_1 irgend ein Punkt der Linie BB' sein.

Man könnte versucht sein auf die Gleichung (41) die bekannten Relationen

$$\int_0^b \frac{dx_1}{\sqrt{(c^2-x_1^2)(b^2-x_1^2)}} \int_b^c K_s^m(x) \, K_s^m(x_1) \, K_t^n(x) \, K_t^n(x_1) \frac{(x^2-x_1^2)\, dx}{\sqrt{(c^2-x^2)(b^2-x^2)}} = 0$$

anzuwenden, wo $m \gtrless n$ und noch $v_t \gtrless v_s$ falls $m = n$. Es würde sich dann ergeben, dass die Coefficienten in (41) einzeln gleich Null sind; dies aber ist nicht richtig, wie man sofort im Falle $n = 0$ und $n = 1$ erkennt. In der That liegt auch zur Anwendung der erwähnten Lamé'schen Relationen keine Veranlassung vor. Nach (35), (20a), (35c), (36) und (40b) ist nämlich für $n = \infty$ das allgemeine Glied der rechten Seite von (41) gleich

$$(42)\qquad \frac{4i(-1)^{3\sigma}}{\sqrt{c^2-b^2}} \, \frac{\varrho_1^{n+1} \operatorname{cosin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sqrt[4]{2\varkappa\varrho_1^2-\varrho_1^4-1}\,\sqrt[4]{2\varkappa+2\operatorname{cosin}2\omega}},$$

wenn $n = 2\sigma$ oder $n = 2\sigma+1$.

Die Reihe (41) *convergirt also, so lange* $\varrho_1 < 1$ (was mit Obigem übereinstimmt), nicht aber für $\varrho_1 = 1$, d. h. $x_1 = b$, und um so weniger, wenn gleichzeitig $\omega = \frac{\pi}{2}$, d. h. $z = b$; die Integration nach x_1 von 0 bis b und gleichzeitig nach z von b bis c ist daher nicht erlaubt.

Die durch (41) gegebene Entwicklung der Null nach Lamé'schen Functionen wird uns in § VII. noch beschäftigen.

§ VI.

Entwicklung einer Function mit complexem Argumente nach Lamé'schen Functionen.

17. Aus der fundamentalen Formel (39) ergiebt sich die Entwicklung einer Function $f(z)$ nach K_s^n und F_s^n in bekannter Weise durch Vermittlung des Cauchy'schen Satzes, dass

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\, dz_1, \tag{43}$$

wenn das Integral rechts geführt wird in positivem Sinne*) über die ganze Begrenzung eines ebenen Flächenstücks, innerhalb dessen $f(z)$ als holomorphe Function von z gegeben ist (resp. über eine Curve, welche im Innern beliebig nahe an die Begrenzung herangeschoben werden kann). Da sich die unendlich entfernten Glieder der rechten Seite von (39) wie Glieder einer Potenzreihe verhalten, kann ohne Weiteres gliedweise integrirt werden. Es handelt sich also nur noch darum, die verschiedenen hier möglichen Fälle aufzuzählen; sie erledigen sich durch Anwendung des am Schlusse von Nr. 15. ausgesprochenen Satzes.

Erstens behandeln wir die Fälle, wo $f(z)$ im Innern eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes gegeben ist.

1) *$f(z)$ ist gegeben für das Innere einer solchen Curve* (14), *die aus einem einzigen Zuge besteht.* Hier convergirt die Reihe (39), sobald z_1 auf dem Rande liegt. Also:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n A_s^n K_s^n(z), \tag{44}$$

wo C_s^n durch (39a) gegeben ist und:

$$A_s^n = \frac{1}{2i\pi}\int f(z_1) F_s^n(z_1)\, dz_1, \tag{44a}$$

das Integral in positivem Sinne über die Begrenzung geführt. Die letztere kann sich insbesondere auf den unendlich fernen Punkt zusammenziehen, wenn $f(z)$ für alle endlichen Werthe von z holomorph bleibt.

2) *$f(z)$ ist gegeben für das Innere eines Ovals, welches Theil einer Curve des Systems* (14) *ist.* Hier gilt wieder (44) und (44a), wenn das Integral rechts in positivem Sinne über das Oval geführt wird. Zu bemerken ist, dass die Reihe (44) auch für das Innere des ergänzenden Ovals convergirt; vergl. darüber den „Nachtrag“.

---

*) Wobei für den, welcher das Flächenstück umgeht, das Innere stets zur Linken bleibt.

Dem Innern des Ovals entspricht in der Fläche Z' (vergl. den Schluss von Nr. 6.) das Innere eines Halbringes, begrenzt durch die Halbkreise $\varrho = 1$, $\varrho = \varrho_1$ und die dazwischen liegenden Stücke der Linien OB und $O_1 B_1$. Dass in diesem Halbringe eine Function durch (43) dargestellt wird, wenn nur über den Halbkreis $\varrho = \varrho_1$ von $\omega = \frac{\pi}{2}$ über $\omega = 0$ bis $\omega = -\frac{\pi}{2}$ integrirt wird, erklärt sich daraus, dass das Integral, geführt über den andern Theil der Begrenzung, verschwindet, weil nämlich $f(z)$ an zwei symmetrischen Stellen der Strecken OB und $O_1 B_1$, sowie der Halbkreise BC und $B_1 C$ gleiche Werthe annimmt.

3) *$f(z)$ ist gegeben für alle Punkte ausserhalb einer Curve* (14), *die aus einem Zuge besteht.* Es convergirt (39), sobald z auf der Begrenzung, z_1 im Innern liegt, also wenn z und z_1 vertauscht werden:

$$\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n B_s^n F_s^n(z), \tag{45}$$

wo:

$$B_s^n = -\frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z_1)}{z_1} K_s^n(z_1)\, dz_1, \tag{45a}$$

das Integral so über die betreffende Curve (14) geführt, dass die äusseren Punkte (also die inneren des betrachteten Flächenstücks) zur Linken bleiben. Die Curve (14) kann insbesondere aus der mit Doppelpunkt versehenen Curve (16) bestehen. Verschwindet $f(z)$ im Unendlichen mindestens von der ersten Ordnung, so kann man den Factor z^{-1} als in $f(z)$ enthalten betrachten.

4) *$f(z)$ ist gegeben für alle Punkte ausserhalb eines Ovals $\mathfrak{O}_1$, das durch ein zweites analoges Oval $\mathfrak{O}_1$ zu einer Curve* (14) *ergänzt wird.* Hier muss das ganze Gebiet in zwei Theile zerlegt werden, in denen verschiedene Reihenentwicklungen gültig sind. Eine Reihe von der Form (45) besteht nur für diejenigen Punkte z, welche ausserhalb $\mathfrak{O}$, aber nicht im Innern von $\mathfrak{O}_1$ liegen; die Coefficienten B sind durch (45a) bestimmt, wenn das Integral über das Oval $\mathfrak{O}$ geführt wird (dabei das Aeussere zur Linken). Für die Punkte im Innern von $\mathfrak{O}_1$ dagegen besteht eine Reihe der Form (44), deren Coefficienten A durch (44a) berechnet werden; das Integral ist über $\mathfrak{O}$ zu führen, wie vorhin. Das Oval $\mathfrak{O}$ kann sich insbesondere auf die Linie BC (oder $B'C'$) zusammenziehen; dann gilt die Entwicklung der Form (45) für alle Punkte ausserhalb BC, ausgenommen die Punkte der Linie $B'C'$, und man hat an Stelle von (45a):

$$B_s^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_b^c [f(x + i \cdot 0) - f(x - i \cdot 0)]\, K_s^n(x) \frac{dx}{x} \, .$$

Beispiele hierfür sind die Functionen:

$$\log\frac{z-b}{z-c},\quad \frac{z}{\sqrt{(z-b)(z-c)}},\quad \sqrt{\frac{z-b}{z-c}}.$$

18. *Zweitens* möge das Gebiet, in welchem $f(x)$ als holomorphe Function von z gegeben ist, zweifach zusammenhängend sein. Hier sind folgende Fälle möglich:

5) *Das Flächenstück ist ringförmig; die äussere Begrenzung besteht aus einer eintheiligen Curve* (14), *ebenso die innere.*

Wendet man Cauchy's Formel (43) an, so ist (39) anwendbar bei Integration über den äusseren Rand, für den inneren Rand erst nach Vertauschung von z und z_1. Also wird:

$$(46)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{s=0}^{s=\sigma+1} C_s^n\left[A_s^n K_s^n(z)+B_s^n F_s^n(z)\right],$$

wo:

$$(46\text{a})\qquad A_s^n=\frac{1}{2i\pi}\int f(z_1)F_s^n(z_1)\,dz_1,\quad B_s^n=\frac{1}{2i\pi}\int f(z_1)K_s^n(z_1)\,dz_1;$$

das erstere Integral in positivem Sinne über den äussern Rand, das andere (da das Vorzeichen vertauscht ist) in *gleicher* Richtung über den inneren Rand erstreckt. Der äussere Rand kann sich um den unendlich fernen Punkt, der innere um die Curve (16) beliebig eng zusammenziehen.

6) *Der äussere Rand besteht aus einer eintheiligen Curve* (14), *der innere aus dem Ovale $\mathfrak{O}$ einer zweitheiligen.* Das ergänzende Oval heisse $\mathfrak{O}_1$. Wie unter 4) zerfällt das Flächenstück in zwei Gebiete, die getrennt behandelt werden müssen. Liegt z ausserhalb des Ovals $\mathfrak{O}_1$, so gilt (46); in (46a) ist das zweite Integral über das Oval $\mathfrak{O}$ zu führen. Liegt dagegen z im Innern von $\mathfrak{O}_1$, so gilt (46), wenn man in (46a) die Integrationswege der beiden Integrale vertauscht.

7) *Das ringförmige Flächenstück wird von zwei Ovalen der Curven* (14) *begrenzt*, die natürlich beide auf derselben Seite der x-Axe liegen. Es besteht wieder (46); in (46a) ist das erstere Integral über das äussere Oval, das andere über das innere auszudehnen. Ersteres kann insbesondere aus einer Hälfte der Curve (16) bestehen, letzteres aus der doppelt zu nehmenden Strecke BC resp. $B'C'$.

8) *Das Flächenstück enthält den unendlich fernen Punkt und wird begrenzt durch zwei Ovale $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, welche zusammen eine Curve* (14) *bilden.* Es ist analog zu (45):

$$(47)\qquad \frac{f(z)}{z}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n B_s^n F_s^n(z)$$

wo nun:

$$(47\text{a})\qquad B_s^n = +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\frac{f(z_1)}{z_1}K_s^n(z_1)\,dz_1 + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}_1}\frac{f(z_1)}{z_1}K_s^n(z_1)\,dz_1,$$

die Integrale in demselben Sinne wie bei (46a) bez. über O und O_1 geführt. Die Ovale können sich auf die Linien BC und $B'C'$ zusammenziehen. Beispiele dafür geben die Functionen

$$\log\frac{z^2-b^2}{z^2-c^2},\qquad \frac{z^2}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}},\qquad \int\limits_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}.$$

Jede derselben kann mittelst (47) in eine für alle Punkte der Ebene gültige Reihe entwickelt werden, allein ausgenommen die Punkte der Linien BC und $B'C'$.

9) *Das Flächenstück enthält den unendlich fernen Punkt und wird begrenzt durch zwei Ovale $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$, welche sich bez. um BC und $B'C'$ erstrecken, aber Theile verschiedener Curven des Systems* (14) *sind.* Längs $\mathfrak{O}$ sei $\varrho = \text{abs}\,\zeta = \varrho_0$, längs $\mathfrak{O}'$ sei $\varrho = \varrho_0'$, und $\varrho_0' > \varrho_0$, so dass der Flächeninhalt von $\mathfrak{O}'$ kleiner ist, als der von $\mathfrak{O}$. Das Gebiet zerfällt in zwei Theile. Der eine enthält den unendlich fernen Punkt und wird begrenzt durch das Oval $\mathfrak{O}$ und dasjenige Oval $\mathfrak{O}_1$, welches mit $\mathfrak{O}$ zusammen eine Curve (14) bildet. In diesem Theile gilt (47), wenn man in (47a) das zweite Integral über $\mathfrak{O}'$ statt über $\mathfrak{O}_1$ führt.

Der andere Theil ist ringförmig und wird nach Aussen begrenzt durch $\mathfrak{O}_1$, nach Innen durch $\mathfrak{O}'$. In ihm hat man:

$$(48)\qquad \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n\left[A_s^n K_s^n(z) + B_s^n F_s^n(z)\right]$$

wo:

$$(48\text{a})\quad A_s^n = -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}}\frac{f(z_1)}{z_1}F_s^n(z_1)\,dz_1,\quad B_s^n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}'}\frac{f(z_1)}{z_1}K_s^n(z_1)\,dz_1,$$

die Integrale in demselben Sinne wie bei (47a) geführt.

19. *Drittens* sei $f(z)$ im Innern eines dreifach zusammenhängenden Flächenstückes als holomorphe Function von z gegeben. Es sind nur zwei Fälle möglich, von denen der erstere als Specialfall im andern enthalten ist.

10) *Das Flächenstück wird nach Aussen begrenzt von einer eintheiligen Curve* (14), *nach Innen von zwei Ovalen, $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, welche zusammen eine Curve* (14) *bilden.* Es gilt wieder die Gleichung (46), wenn A_s^n wie in (46a) bestimmt wird, dagegen:

$$(49)\qquad B_s^n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}} f(z_1)\,K_s^n(z_1)\,dz_1 + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}_1} f(z_1)\,K_s^n(z_1)\,dz_1;$$

der Sinn der Integrationswege ist derselbe wie bei B_s^n in (46a).

11) *Die äussere Begrenzung ist wieder eine eintheilige Curve* (14); *die innere Begrenzung bilden zwei Ovale* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{O}'$ *wie unter* 9). Wie dort, zerfällt das Gebiet in zwei Theile, welche durch das Oval $\mathfrak{O}_1$ von einander getrennt werden. Für das Innere des dreifach zusammenhängenden Gebiets besteht die Gleichung (46), wenn A_s^n und B_s^n wie unter 10) bestimmt werden; nur muss man auf der rechten Seite von (49) das Oval $\mathfrak{O}_1$ durch das Oval $\mathfrak{O}'$ ersetzen. Für den ringförmigen Theil, begrenzt durch $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}_1$, besteht (46), wenn

$$A_s^n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{A}} f(z_1)\, F_s^n(z_1)\, dz_1 - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}} f(z_1)\, F_s^n(z_1)\, dz_1,$$

$$B_s^n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\mathfrak{O}'} f(z_1)\, K_s^n(z)\, dz_1;$$

hier bezeichnet $\mathfrak{A}$ den äussern Rand; alle Integrale sind in gleichem Sinne genommen, von der positiven X-Axe zur positiven Y-Axe.

Von den behandelten Fällen sind besonders diejenigen hervorzuheben, bei denen das Convergenzgebiet dreifach zusammenhängend ist. In einem solchen Gebiete kann man bekanntlich eine Function $f(z)$ in einfacher Weise nach Potenzen einer Function von z entwickeln, wenn es möglich ist, sämmtliche Begrenzungslinien desselben durch eine conforme Abbildung gleichzeitig in Kreise überzuführen*). In unserem Falle scheint dies nicht möglich zu sein; letzteres zugegeben, würde daher die Entwicklung nach Lamé'schen Functionen gegenüber den Entwicklungen nach Potenzen und nach Kugelfunctionen etwas wesentlich Neues bieten.

§ VII.

Die Nullentwicklungen.

20. Schon in Nr. 16. haben wir gesehen, dass es „Nullentwicklungen“ nach Lamé'schen Functionen giebt, d. h. dass es möglich ist, die Null durch Reihen darzustellen, welche nach Lamé'schen Functionen fortschreiten. Es handelt sich jetzt darum, *alle möglichen von einander linear unabhängigen Nullentwicklungen aufzustellen.*

Wir betrachten zunächst solche Reihen, die nach Functionen K fortschreiten, und nehmen an, dass dieselben in der ganzen Ebene convergiren. Solche Reihen erhält man sofort, wenn man eine Function $K_t^n(z)$ auf Grund der Resultate von § VI., also unter Benutzung von (44), nach Functionen $K_s^m(z)$ entwickelt. Dabei hat man zu berücksichtigen, dass

---

*) Vgl. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, Th. I, S. 100ff.

$$(50)\qquad \int K_t^n(z)\,F_s^m(z)\,dz = 0 \quad \text{für} \quad m > n,$$

das Integral über eine eintheilige Curve des Systems (14) geführt; unter dem Integralzeichen steht hier nämlich eine Function, welche ausserhalb der benutzten Curve allenthalben holomorph ist und im Unendlichen mindestens von der zweiten Ordnung verschwindet. Man erhält daher für K_t^n eine endliche Reihe, und zwar ($m = 2\sigma$ oder $2\sigma + 1$ gesetzt):

$$(51)\quad K_t^n(z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m K_s^m(z)\int K_t^n(z_1)\,F_s^m(z_1)\,dz_1.\text{*)}$$

Bringt man die linke Seite auf Null, so hat man eine Nullentwicklung. Deren ergeben sich sonach sofort unendlich viele, wenn man n und t alle möglichen Werthe beilegt. Ist die Zahl n ($= 2\tau$ oder $2\tau + 1$) gegeben, so giebt es $\tau + 1$ Formeln von der Gestalt (51). In Betreff derselben ist noch zu bemerken, dass (50) auch für $m < n$ besteht, sobald $m + n$ eine ungerade Zahl ist, denn dann steht unter dem Integralzeichen eine gerade Function von z, und der Integrationsweg ist eine um den Anfangspunkt symmetrisch liegende Curve. *Auf der rechten Seite von* (51) *fallen also alle Glieder aus, für welche* $m + n$ *eine ungerade Zahl ist.*

Wir suchen jetzt alle Nullentwicklungen auf, bei welchen Lamé'sche Functionen K von höchstens der n^{ten} Ordnung benutzt werden, also alle Entwicklungen der Form:

$$(52)\qquad 0 = \sum_{m=0}^{m=n}\sum_{s=1}^{s=\sigma+1} c_s^m K_s^m(z).$$

Es sei zuerst $n = 0$, dann entsteht: $c^0 K^0 = 0$, also $c^0 = 0$; ebenso wird bei $n = 1$: $c^0 = 0$, $c^1 = 0$; *es giebt keine Nullentwicklungen* 0^{ten} *und ersten Grades.*

Ist n von Null und Eins verschieden, so wird man die rechte Seite von (52) nach Potenzen von z ordnen; die Coefficienten derselben müssen dann einzeln Null sein. Wir führen die Coefficienten von K_s^m ein, indem wir setzen:

$$K_s^m(z) = a_{0s}^m z^m + a_{1s}^m z^{m-2} + a_{2s}^m z^{m-4} + \cdots$$

Der Fall $n = 2$ giebt die Bedingungen:

---

*) Unten in Nr. 21. wird gelegentlich gezeigt, wie die hier als Coefficienten auftretenden Integrale sich auf solche zwischen reellen Grenzen reduciren; vgl. Gleichung (59).

$$\begin{aligned} c^0 a^0 + c_1^2 a_{11}^2 + c_2^2 a_{12}^2 &= 0, \\ c^1 a_0^1 &= 0, \\ c_1^2 a_{01}^2 + c_2^2 a_{02}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Also $c^1 = 0$; man kann c_2^2 (oder c_1^2) willkürlich wählen; dann sind die Coefficienten c^0 und c_1^2 vollkommen bestimmt; denn die Determinante der Gleichungen ist gleich $a^0 \cdot a_{01}^2$, also jedenfalls nicht Null. Da es aber, um eine Entwicklung der Form

$$c^0 K^0 + c_1^2 K_1^2(z) + c_2^2 K_2^2(z) = 0 \tag{53a}$$

herzustellen, nur auf die Verhältnisse der Unbekannten c ankömmt, bleibt bei Aenderung von c_2^2 die resultirende Entwicklung im Wesentlichen ungeändert. *Es giebt daher nur eine Nullentwicklung zweiten Grades.* Die beiden Formeln, welche sich aus (51) für $n = 2$ ergeben, wenn man nach einander $t = 1$ und $t = 2$ setzt, sind folglich identisch, d. h. die Coefficienten beider einander proportional: *es verschwinden alle zweireihigen Determinanten des Systems:*

$$\left\| \begin{array}{lll} C^0 \int K_1^2 F^0 dz & C_1^2 \int K_1^2 F_1^2 dz - 2\pi i & C_2^2 \int K_1^2 F_2^2 dz \\ C^0 \int K_2^2 F^0 dz & C_1^2 \int K_2^2 F_1^2 dz & C_2^2 \int K_2^2 F_2^2 - 2\pi i \end{array} \right\|. \tag{53b}$$

Für $n = 3$ findet man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} c^0 a^0 + c_1^2 a_{11}^2 + c_2^2 a_{12}^2 = 0, \quad & c^1 a_0^1 + c_1^3 a_{11}^3 + c_2^3 a_{12}^3 = 0, \\ c_1^2 a_{01}^2 + c_2^2 a_{02}^2 = 0, \quad & c_1^3 a_{01}^3 + c_2^3 a_{02}^3 = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Die Coefficienten der geraden K genügen also wieder den Gleichungen (53), die Verhältnisse der ungeraden sind eindeutig bestimmt: *es giebt unendlich viele Nullentwicklungen dritten Grades. Ist* $S_3 = 0$ *eine solche, so sind alle anderen von der Form* $S_3 + \lambda S_2 = 0$, *wenn* S_2 *die linke Seite von* (53a) *bedeutet.* Die Determinanten des Systems (53b) verschwinden auch noch, wenn man unter den Integralzeichen K_1^2, K_2^2 bez. durch K_1^3, K_2^3 ersetzt.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erkennt man sofort, dass sich alle Nullentwicklungen aus solchen zusammensetzen lassen, die entweder nur gerade oder nur ungerade K enthalten; denn wenn n z. B. ungerade ist und um eine Einheit grösser genommen wird, so treten damit für die Coefficienten der ungeraden K keine neuen Bedingungen auf. So bestehen bei $n = 4$ für c^1, c_1^3, c_2^3 die Gleichungen (54), dagegen für die übrigen c folgende:

$$
\begin{aligned}
&c^0 a^0 + c_1^2 a_{11}^2 + c_2^2 a_{12}^2 + c_1^4 a_{21}^4 + c_2^4 a_{22}^4 + c_3^4 a_{23}^4 = 0,\\
(54\text{a})\qquad &c_1^2 a_{01}^2 + c_2^2 a_{02}^2 + c_1^4 a_{11}^4 + c_2^4 a_{12}^4 + c_3^4 a_{13}^4 = 0,\\
&c_1^4 a_{01}^4 + c_2^4 a_{02}^4 + c_3^4 a_{03}^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Hier kann man c_2^2, c_2^4, c_3^4 willkürlich annehmen; die übrigen Coefficienten sind dann durch Gleichungen bestimmt, deren Determinante $a^0 a_{01}^2 a_{01}^4$ nicht verschwindet. Hat man ferner ein System von Grössen c gefunden; das den Gleichungen genügt, so kann man ein anderes System der Art herstellen, indem man c^0, c_1^2, c_2^2 durch Addition solcher Grössen ändert, welche dem Systeme (53) genügen. Es geht hieraus hervor, dass sich alle Nullentwicklungen vierten Grades aus zwei solchen (etwa $S_4' = 0$ und $S_4'' = 0$) und aus Entwicklungen niedrigeren Grades ableiten lassen, also von der Form sind:

$$S_4' + \varkappa S_4'' + \lambda S_3 + \mu S_2 = 0.$$

Es folgt gleichzeitig, dass die 3 Entwicklungen (51), welche für $n = 4$ möglich sind, linear von einander abhängen, eventuell unter Benutzung von $S_2 = 0$. Jedenfalls aber sind die Coefficienten der drei Functionen K^4 von einander abhängig, d. h. es besteht die Gleichung:

$$
\begin{vmatrix}
U_{11}^{44} - 1 & U_{12}^{44} & U_{13}^{44}\\
U_{21}^{44} & U_{22}^{44} - 1 & U_{23}^{44}\\
U_{31}^{44} & U_{32}^{44} & U_{33}^{44} - 1
\end{vmatrix} = 0,
$$

wo:

$$(55)\qquad U_{st}^{mn} = \frac{1}{2\pi i}\, C_s^m \int F_s^m K_t^n \, dz.$$

Allgemein verschwinden alle vierreihigen Determinanten des Systems:

$$
(55\text{ a})\qquad
\left\|
\begin{matrix}
U_{02}^{02} & U_{12}^{22} & U_{22}^{22} - 1 & 0 & 0 & 0\\
U_{01}^{04} & U_{11}^{24} & U_{21}^{24} & U_{11}^{44} - 1 & U_{21}^{44} & U_{31}^{44}\\
U_{02}^{04} & U_{12}^{24} & U_{22}^{24} & U_{12}^{44} & U_{22}^{44} - 1 & U_{32}^{44}\\
U_{03}^{04} & U_{13}^{24} & U_{23}^{21} & U_{13}^{44} & U_{23}^{44} & U_{33}^{44} - 1
\end{matrix}
\right\|.
$$

Nach den aus (53b) entspringenden Relationen kann hier in der ersten Reihe der zweite untere Index 2 durch 1 ersetzt werden.

Man übersieht aus der Natur des Vorstehenden sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Alle Nullentwicklungen der Form (52) *und vom Grade* n ($= 2\tau$ *oder* $2\tau + 1$) *lassen sich linear zusammensetzen aus* τ *von einander unabhängigen Entwicklungen der Art und aus Nullentwicklungen niedrigeren Grades, enthalten also im Ganzen für* $n = 2\tau$

$$\tau + 2(\tau - 1) + 2(\tau - 2) \cdots + 2 - 1 = \tau(\tau - 1) + \tau - 1 = \tau^2 - 1$$

lineare Parameter, und für $n = 2\tau + 1$

$$2\tau + 2(\tau - 1) + 2(\tau - 2) + \cdots + 2 - 1 = \tau(\tau + 1) - 1$$

solche Parameter.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob zwischen den aus (51) für ein gegebenes n abgeleiteten $\tau + 1$ Nullentwicklungen ausser der gefundenen (und für $n = 4$ besprochenen) noch weitere Relationen bestehen. Um zu zeigen, dass dies nicht stattfindet, hat man nachzuweisen, dass nicht sämmtliche Unterdeterminanten der Determinante

$$(56) \qquad \begin{vmatrix} U_{11}^{nn} - 1 & U_{12}^{nn} & \cdots U_{1\tau}^{nn} \\ U_{21}^{nn} & U_{22}^{nn} - 1 & \cdots U_{2\tau}^{nn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ U_{\tau 1}^{nn} & U_{\tau 2}^{nn} & \cdots U_{\tau\tau}^{nn} - 1 \end{vmatrix}$$

(welche nach Obigem Null ist) verschwinden können. Zu dem Zwecke betrachten wir den besonderen Fall der Kugelfunctionen, indem wir $b = c$ werden lassen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Grössen C_s^m in (55) durch (39a) nur gegeben sind, wenn (37b) erfüllt ist. Für $b = c$ ist letzteres nicht mehr der Fall; man muss daher in C_s^m noch eine Constante k_s^m hinzufügen:

$$C_s^m = \frac{\pi}{2(2m+1)} \left[K_s^m(c)\, K^m(b)\right]^2 \cdot k_s^m$$

wo k_s^m gleich dem reciproken Werthe des auf der linken Seite von (39a) stehenden Doppelintegrales ist.*) C_s^m wird zunächst für $b = c$ von der Form $\frac{0}{0}$; wir haben den wahren Werth zu bestimmen.

In dem zu betrachtenden Specialfalle gehen die Functionen $K_s^m(z)$ über in solche Kugelfunctionen $P_\mu^m\left(\frac{z}{c}\right)$, deren unterer Index eine gerade Zahl ist**); insbesondere verwandelt sich K_1^m in P_0^m. Um nun C_s^m zu berechnen, transformiren wir das Doppelintegral (37b) mittelst der Substitution $\nu = b v$, $\mu = b u$; es wird dann:

$$\frac{1}{k_s^m} = k'^2 \int\limits_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2 v^2)}} \int\limits_1^{\frac{1}{k}} \left[K_s^m(bu)\, K_s^m(bv)\right]^2 \frac{(v^2-u^2)\,du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k'^2u^2)}}.$$

wo $k'^2 = \frac{b^2}{c^2} = 1 - k^2$. Hierin setzen wir noch $u^2 = \frac{1-k^2w^2}{k'^2}$; dann wird:

---

*) Vgl. Heine, l. c. Theil I, S. 431 und Th. II, S. 172.

**) L. c. Th. I, S. 362.

$$(56\,\mathrm{a})\quad \frac{1}{k_s^m} = \int_0^1 \frac{[K_s^m(bv)]^2\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}} \int_0^1 (1-k^2w^2-k'^2v^2)\,\frac{[K_s^m(c\sqrt{1-k^2w^2})]^2\,dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

also für $b = c$, d. h. $k = 0$, $k' = 1$

$$= \int_0^1 [P_{2\nu}^m(v)]^2 dv \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \cdot [P_{2\nu}^m(1)]^2.$$

Ferner wird:

$$K_s^m(c)\,K_s^m(b) = [P_{2\nu}^m(1)]^2,$$

und es ist:

$$P_{2\nu}^m(1) = 0 \text{ für } \nu > 0, \quad P_0^m(1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)},$$

$$\int_0^1 [P_{2\nu}^m(v)]^2\,dv = \frac{1}{2m+1}\;\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+2\nu)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-2\nu)}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)]^2};$$

also schliesslich

$$C_s^m = 0 \quad \text{für} \quad s > 1,\ \nu > 0,$$
$$C_1^m = 1, \quad \text{indem} \quad \nu = 0.$$

In der Determinante (56) verschwinden daher alle Glieder mit Ausnahme der Diagonalglieder; letztere sind, das erste ausgenommen, sämmtlich gleich -1; das erste Glied aber wird Null; in der That hat man

$$\frac{1}{2\pi i}\int K_1^n F_1^n\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int P_0^n Q_0^n\,dz,$$

das Integral geführt über eine geschlossene Curve, welche um die Punkte $+1$ und -1 gelegt ist (wenn $c = 1$ gesetzt), also

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1} P_0^n(x)[Q_0^n(x - i\cdot 0) - Q_0^n(x + i\cdot 0)]\,dx$$

$$= (2n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)^2 \int_{-1}^{+1} [P_0^n(x)]^2\,dx\,\text{*)}$$

$$= 1,\ \text{q. e. d.**)}$$

---

*) L. c. Th. I, S. 223.

**) Diese Relation stimmt mit der von Herrn C. Neumann (l. c.) gegebenen überein, denn man hat

$$P^n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot P_0^n(x);$$

$$Q^n(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{2n+1}\,Q_0^n(x),$$

also in der That:

Für $b = c$ ist also erstens die Determinante (56) *wirklich gleich Null, und zweitens sind ihre ersten Unterdeterminanten nicht sämmtlich gleich Null.*

Letzteres tritt daher auch im Allgemeinen nicht ein: *Man findet alle Nullentwicklungen n^{ten} Grades, indem man von τ der $\tau + 1$ Gleichungen* (51) *ausgeht und ausserdem Entwicklungen niedrigeren Grades hinzufügt. Diese τ Gleichungen sind von einander unabhängig.*

21. Nachdem die endlichen Nullreihen erledigt sind, haben wir die unendlichen zu untersuchen, zunächst unter der Annahme, dass sie in einem Gebiete, welches den Nullpunkt einschliesst, convergiren (wie unter 1) in § VI, Nr. 17.). Eine solche Reihe muss auch noch convergiren, wenn man sie nach Potenzen von z ordnet; es müssen also in der Gleichung:

$$0 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} c_s^m K_s^m(z) \tag{57}$$

alle Coefficienten von z^0, z^1, z^2, $\cdots$ verschwinden. Dies giebt Bedingungen, welche genau von der Form (54) und (54a) sind, nämlich für z^0, z^2, z^4, $\cdots$

$$\begin{aligned}
0 &= c^0 a^0 + c_1^2 a_{11}^2 + c_2^2 a_{12}^2 + \sum_{i=1}^{i=3} c_i^4 a_{2i}^4 + \sum_{i=1}^{i=4} c_i^6 a_{3i}^6 + \cdots, \\
0 &= \qquad\quad c_1^2 a_{01}^2 + c_2^2 a_{02}^2 + \sum_1^3 c_i^4 a_{1i}^4 + \sum_1^4 c_i^6 a_{2i}^6 + \cdots, \\
0 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \sum_1^3 c_i^4 a_{0i}^4 + \sum_1^4 c_i^6 a_{1i}^6 + \cdots, \\
0 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \sum_1^4 c_i^6 a_{0i}^6 + \cdots, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned} \tag{57a}$$

$$\int P^n(z)\, Q^n(z)\, dz = \frac{2\pi i}{2n+1}.$$

Die Ableitung dieser Formel beruht a. a. O. auf der Annahme, dass die Entwicklung complexer Functionen nach Kugelfunctionen nur auf eine Art möglich sei. Es dürfte sich mehr empfehlen, umgekehrt aus ihr und der analogen Gleichung

$$\int P^m(z)\, Q^n(z)\, dz = 0 \quad \text{für} \quad m \gtrless n$$

die eindeutige Bestimmtheit der Entwicklungscoefficienten abzuleiten, die genannten Relationen selbst also zuvor, wie im Texte, herzustellen. — Man ersieht aus Obigem zugleich, *wie man die Heine'sche Entwicklung von* $(z - z_1)^{-1}$ *durch den Grenzübergang des Textes* $(b = c)$ *aus der unsrigen herleitet.*

Man sieht, dass man etwa die Grössen:

$$c_2^2,\ c_2^4,\ c_3^4,\ c_2^6,\ c_3^6,\ c_4^6,\ \cdots,\ c_2^{2\sigma},\ c_3^{2\sigma},\ \cdots,\ c_{\sigma+1}^{2\sigma},\ \cdots$$

willkürlich wählen kann, um dann alle anderen durch successive Eliminationen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Aus jedem Systeme von Grössen c, welches den Gleichungen genügt, kann man ein anderes herleiten durch Hinzufügen solcher Grössen, welche als Coefficienten bei den Entwicklungen von Nr. 20. auftreten. Sind allgemein

$$S_1^n = 0,\ S_2^n = 0,\ \cdots,\ S_\tau^n = 0$$

τ von einander unabhängige Nullentwicklungen n^{ten} Grades und λ_s^n willkürliche Grössen, so ist die allgemeinste Nullentwicklung:

$$\text{(57b)} \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\tau} \lambda_s^n S_s^n = 0. -$$

Zweitens haben wir *Nullentwicklungen, die nur in einem Ovale, welches Theil einer Curve* (14) *ist, convergiren.* Ein Beispiel dafür giebt die in Nr. 16. besprochene, durch (41) dargestellte Entwicklung

$$\text{(41)} \qquad 0 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m K_s^m(z) K_s^m(x_1) \int_b^c \frac{\mathfrak{a}_s^m - \mathfrak{b}_s^m x^2}{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}\, dx;$$

dieselbe convergirt im Innern des durch x_1 gehenden Ovals, wo x_1 einen Punkt der Linie $B'OB$ bezeichnet. Man kann aus ihr sofort unendlich viele Entwicklungen ableiten, welche im Innern desselben Ovals convergiren, indem man nach der (wesentlich reellen) Variabeln x_1 differentiirt, wobei die gliedweise Differentiation erlaubt ist (wie bei Potenzreihen). Setzt man sodann $x_1 = 0$, so erhält man unendlich viele Nullentwicklungen, deren Convergenzgebiet durch das Innere der Curve (16) gegeben ist (und zwar das Innere *beider* Schleifen).

Andere Nullentwicklungen dieser Art, analog zu (51), ergeben sich, wenn man die Functionen $K_t^n(z)$ für das Innere eines solchen Ovals auf Grund von 2), § VI., Nr. 17. entwickelt. Es wird:

$$\text{(58)} \qquad K_t^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m K_s^m(z) \int_{\mathfrak{D}} K_t^n(z_1) F_s^m(z_1)\, dz_1,$$

das Integral über das betreffende Oval geführt. Letzteres möge von der positiven x-Axe durchsetzt werden und β den Schnittpunkt des Ovals mit OB bezeichnen; dann ist nach (21) und (20):

$$(58\text{a})\quad \int\limits_{\mathfrak{C}} K_t^n(z_1)\,F_s^m(z_1)\,dz_1 = \int\limits_{\beta}^{c} K_t^n(x)\,[F_s^m(x-i\cdot 0)-F_s^m(x+i\cdot 0)]\,dx$$

$$= 2\int\limits_{\beta}^{b} K_t^n(x)\,K_s^m(x)\,dx \cdot \int\limits_{b}^{c} \frac{\mathfrak{a}_s^m - \mathfrak{b}_s^m y^2}{\sqrt{(y^2-c^2)(y^2-b^2)}}\,dy$$

$$+2(2m+1)\int\limits_{b}^{c} K_t^n(x)\,K_s^m(x)\int\limits_{c}^{x} \frac{dy}{[K_s^m(y)]^2\sqrt{(y^2-c^2)(y^2-b^2)}}.$$

Ist $\beta = 0$, so convergirt (58) in der einen Schleife der mit einem Doppelpunkte versehenen Curve (16); und zwar, bei der gemachten Festsetzung, in derjenigen, welche von der positiven x-Axe getroffen wird. Im Innern der andern Schleife würde die rechte Seite zwar noch convergiren, die Gleichung aber nicht richtig sein; denn das Integral (58a) ist nicht gleich dem entsprechenden Integral geführt über die andere Schleife; Letzteres würde, bis auf das Vorzeichen, eintreten für $m > n$ oder $m+n$ ungerade. Für $\beta = 0$ lässt sich die Gleichung (58) noch weiter vereinfachen. Integrirt man nämlich links über eine eintheilige Curve (14) in positivem Sinne, so ist wegen (20), (21) und (21b):

$$(59)\quad \int K_t^n F_s^m\,dz = \int\limits_{-c}^{+c} K_t^n\,[F_s^m(x-i\cdot 0)-F_s^m(x+i\cdot 0)]$$

$$= -2(2m+1)\int\limits_{-c}^{-b} K_s^m(x)\,K_t^n(x)\,dx\int\limits_{-c}^{x} \frac{dy}{[K_s^m]^2\sqrt{Y}}$$

$$+2\int\limits_{-b}^{+b} K_s^m(x)\,K_t^n(x)\,dx\int\limits_{-b}^{c} \frac{\mathfrak{a}_s^m - \mathfrak{b}_s^m y^2}{\sqrt{Y}}\,dy$$

$$+2(2m+1)\int\limits_{b}^{c} K_s^m(x)\,K_t^n(x)\,dx\int\limits_{c}^{x} \frac{dy}{[K_s^m]^2\sqrt{Y}},$$

wo $Y = (y^2 - b^2)(y^2 - c^2)$. Das erste Glied der rechten Seite ist gleich dem dritten, multiplicirt mit $(-1)^{m+n}$; das Ganze daher gleich dem Doppelten dessen, was aus der rechten Seite von (58a) für $\beta = 0$ entsteht. Die Integrale links sind die Coefficienten in (51); durch Combination mit (58) entsteht also die *neue Entwicklung, welche innerhalb der einen Schleife von (16) convergirt:*

$$(60)\quad \frac{1}{2}K_t^n(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=n+1}^{m=\infty}\sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m\,K_s^m(z)\int K_t^n(z_1)\,F_s^m(z_1)\,dz_1;$$

die Coefficienten bestimmen sich aus (58a) für $\beta = 0$. Dieselben lassen sich noch einfacher berechnen, wenn $m > n$ und $m + n$ gerade ist. Alsdann nämlich verschwindet die linke Seite von (59); es ist also:

$$\text{(60a)} \qquad \int_0^b K_s^m(x)\, K_t^n(x)\, dx \int_b^c \frac{\mathfrak{a}_s^m - \mathfrak{b}_s^m y^2}{\sqrt{Y}}\, dy$$

$$= (2m+1) \int_b^c K_s^m(x)\, K_t^n(x)\, dx \int_x^c \frac{dy}{[K_s^m(y)]^2 \sqrt{Y}}\,;$$

$$m > n, \quad m + n \text{ gerade},$$

und (58a) geht für $\beta = 0$ über in:

$$\text{(60b)} \quad \int_{\mathfrak{D}} K_t^n(z_1) F_s^m(\mathfrak{z}_1)\, dz_1 = 0 \quad \text{für} \quad m > n,\ m + n \text{ gerade}.$$

Auf der rechten Seite von (60) *kommen also nur solche Glieder vor, bei denen $m + n$ ungerade ist.* Links steht, wenn n z. B. gerade, eine ganze gerade Function, rechts eine unendliche Reihe, deren Glieder sämmtlich ungerade sind; dies wird nicht befremden, wenn man bedenkt, dass es nicht erlaubt ist in (60) z mit $-z$ zu vertauschen, da die Gleichung nur in *einer* Schleife von (16) gültig ist.

Ist $m + n$ ungerade, so verschwindet die rechte Seite von (59) identisch, wie es sein muss (vgl. Nr. 20.).

Wir beweisen nun noch folgende drei Sätze:

Die $\tau + 1$ Nullentwicklungen ($n = 2\tau$ oder $2\tau + 1$), welche für $t = 1, 2, \cdots, \tau + 1$ aus (60) *entstehen, wenn man die linke Seite auf Null bringt, sind von einander unabhängig.*

Alle Nullentwicklungen, welche in einer Schleife der Curve (16) *und nicht darüber hinaus convergiren, lassen sich aus den Entwicklungen* (60) *linear zusammensetzen, abgesehen von solchen Nullentwicklungen, die in der ganzen Ebene gelten.*

Ebenso lassen sich alle in einem Ovale $\mathfrak{D}$ convergirenden Nullentwicklungen aus den Entwicklungen (60) *und aus* (41) *linear zusammensetzen.*

Der erste dieser Sätze ist evident, denn andernfalls müsste zwischen den $\tau + 1$ Functionen K^n eine lineare Relation bestehen.

In Betreff des zweiten gilt Folgendes. Alle Nullentwicklungen, welche mit Lamé'schen Functionen K n^{ter} Ordnung beginnen, lassen sich offenbar aus den $\tau + 1$ Entwicklungen der Form (60) bilden und aus Entwicklungen, die mit Functionen höherer Ordnung beginnen. Da nun jede Nullentwicklung mit Functionen einer bestimmten Ordnung beginnen muss, so erhält man jedenfalls *alle* Entwicklungen, wenn man n und t alle möglichen Werthe beilegt und alle so aus (60) entstehenden Reihen linear combinirt.

Convergirt endlich eine gegebene Nullentwicklung nur innerhalb eines Ovals $\mathfrak{O}$, so kann man durch Benutzung hinreichend vieler der Gleichungen (60) die Entwicklung so umformen, dass sie erst mit Lamé'schen Functionen von bestimmt vorgegebener Ordnung beginnt. Diese Operation kann man insbesondere mit den Gleichungen (58) vornehmen; dann wird das System dieser Gleichungen von derselben Form wie das System (60), und man schliesst also wieder, dass alle Nullentwicklungen, welche nur bis an den Rand von $\mathfrak{O}$ gelten, sich aus den Gleichungen (58) bilden lassen. Die letzteren aber lassen sich wieder mittelst (41) auf (60) zurückführen; man muss zu dem Zwecke nur (41) mit $(\pi i)^{-1} K_t^n(x_1)$ multipliciren, von 0 bis β nach x_1 integriren und die entstehende Gleichung zu (58) addiren*). Mittelst (60) und (41) sind also schliesslich alle Möglichkeiten zu erledigen. Damit ist auch der dritte von obigen drei Sätzen abgeleitet.

22. Weiter haben wir Nullentwicklungen zu untersuchen, welche nach Functionen F_s^m geordnet sind. Beispiele solcher Entwicklungen ergeben sich, wenn man eine Function $F_t^n(z)$ nach (45) in 3) § VI. entwickelt. Es wird:

$$(61)\quad F_t^n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=n}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m F_s^m(z) \int F_t^n(z_1) K_s^m(z_1)\, dz_1,$$

alle Integrale genommen wie in (45a). Hervorzuheben ist, dass auf der rechten Seite alle Terme, in denen $m-n$ eine ungerade Zahl ist, von selbst ausfallen. Es fragt sich wieder, ob man auf diese Weise alle möglichen Nullentwicklungen findet, und ob die gefundenen von einander unabhängig sind.

Nehmen wir an, es sei irgend eine Nullentwicklung der Form

$$(62)\qquad 0 = \sum_{m=n}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} c_s^{m,n} F_s^m(z),$$

convergent in einem einfach zusammenhängenden Gebiete, das den unendlich fernen Punkt einschliesst; suchen wir die Coefficienten $c_s^{m,n}$ zu bestimmen. Die rechte Seite kann sicher nach Potenzen von z^{-1} entwickelt werden, muss also convergiren, wenn man nach solchen Potenzen ordnet; die Reihe beginnt alsdann mit dem Gliede z^{-n-1}. Ist

$$F_s^m(z) = z^{-m-1}(b_{0s}^m + b_{1s}^m z^{-2} + b_{2s}^m z^{-4} + \cdots),$$

so findet man also folgende Bedingungen:

---

*) Umgekehrt erhält man (41) aus (58), indem man letztere Gleichung, unter Benutzung von (58a) nach β differentiirt, $\beta = x_1$ setzt, und einen Factor $K_t^n(x_1)$ vom Resultate absondert.

$$0 = \sum_{m=n}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} b_{0s}^{m} c_s^{m,n},$$

$$0 = \sum_{m=n+1}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} b_{1s}^{m} c_s^{m,n}, \tag{62a}$$

. . . .

. . . .

Man erkennt (wenn $n = 2\tau$ oder $2\tau + 1$), dass von den $\tau + 1$ Coefficienten $c^{m,n}$ in (62) τ willkürlich gewählt werden können; der $(\tau + 1)^{\text{te}}$ lässt sich alsdann berechnen. *Es giebt also nur τ von einander unabhängige Entwicklungen nach Functionen F_s^m, welche mit den Functionen n^{ter} Ordnung beginnen.* Allerdings bleiben auch für jedes $m > n$ von den $\sigma + 1$ Grössen $c_s^{m,n}$ noch σ willkürlich; diese weiteren Parameter stören aber den ausgesprochenen Satz nicht, wenn man hinzufügt, dass *die τ genannten Entwicklungen nur bis auf Entwicklungen niedrigeren Grades bestimmt sein können*, d. h. bis auf solche, die mit Functionen F_s^m beginnen, wo $m > n$.

Es folgt hieraus, dass *von den $\tau + 1$ Nullentwicklungen, welche aus* (61) *hervorgehen, eine die Folge der τ anderen ist;* ein Umstand, der wieder (wie in Nr. 20.) das Verschwinden einer Reihe von Determinanten zur Folge hat. Berücksichtigt man nur die Coefficienten mit $m = n$, so ergiebt sich insbesondere wieder das Verschwinden der Determinante (56). Da nun oben gezeigt wurde, dass die Unterdeterminanten der letztern im Allgemeinen nicht Null sind, so folgt, dass *zwischen den eben genannten τ übrigen Nullentwicklungen keine lineare Relation besteht.* Man erhält also aus (61) alle möglichen Nullentwicklungen nach Functionen F_s^m. Sie alle convergiren in dem ganzen Gebiete der Ebene, welches ausserhalb der Curve (16) liegt. Es folgt also auch, dass es keine Nullentwicklung unserer Art giebt, deren Convergenzgebiet den unendlich fernen Punkt enthielte und sich in das Innere dieser Curve erstreckte. In der That ist es auch nicht möglich, die Function $F_t^n(z)$ für das Aeussere eines Ovals, das Theil einer Curve (14) ist, mittelst unserer Methoden (nach 4) § VI.) zu entwickeln; denn in einem solchen Gebiete ist F_t^n nicht holomorph.

23. Endlich fragt es sich, ob Nullentwicklungen existiren, die in einem zwei- oder dreifach zusammenhängenden Gebiete convergiren. Nehmen wir zuerst an, in einem solchen Gebiete sei es möglich, eintheilige Curven des Systems (14) zu ziehen, das Gebiet also von der Art, wie es im § VI. unter 5), 6), 8), 9), 10), 11) auftritt. Die Entwicklung sei:

$$0 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum \left(c_s^m K_s^m(z) + \gamma_s^m F_s^m(z)\right). \tag{63}$$

Wir multipliciren mit $K_t^n(z)$ und integriren nach z über eine eintheilige Curve (14), die im Innern des Gebiets liegt. Es ist

$$\begin{aligned} &\int K_s^m(z)\,K_t^n(z)\,dz = 0, \\ &\int F_s^m(z)\,K_t^n(z)\,dz = 0 \quad \text{für} \begin{cases} m > n, \\ m \gtrless n,\ m+n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} & 0 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum \gamma_s^m \int K^0 F_s^m\,dz, \\ (63\text{a}) \qquad & 0 = \sum_{1}^{\infty} \sum \gamma_s^m \int K^1 F_s^m\,dz, \\ & 0 = \sum_{2}^{\infty} \sum \gamma_s^m \int K_t^2 F_s^m\,dz, \quad t = 1, 2 \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Genau dasselbe System ergiebt sich aber für die Coefficienten c der in Nr. 22. studirten Entwicklungen durch Anwendung desselben Processes und könnte an Stelle der Gleichungen (62a) zur successiven Berechnung der Coefficienten benutzt werden; die Form der Gleichungen zeigt, dass die Zahl der Grössen, welche hierbei willkürlich bleiben, jedenfalls nicht grösser ist, als bei dem Systeme (62a). Alle Lösungen von (63a) sind daher auch Lösungen von (62a). Es bestehen somit die beiden einzelnen Gleichungen

$$0 = \sum \sum c_s^m K_s^m(z), \qquad 0 = \sum \sum \gamma_s^m F_s^m(z).$$

Die letztere gilt überall ausserhalb (16); die erstere gilt in der ganzen Ebene.

24. Zweitens könnte es vorkommen, dass eine Reihe von der Form (63) nur in einem Ringe convergirt, der von zwei Ovalen der Curven (14) begrenzt wird, so dass es nicht möglich ist, in dem Gebiete eine eintheilige Curve (14) zu ziehen (wie in 7) § VI.). Der asymptotische Werth des allgemeinen Gliedes ist nach (28a) und (29):

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}} \left[\sum c_s^m \left(\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{2}\right)^m a_0 \zeta^{-m} + \sum \gamma_s^m \left(\frac{2}{\sqrt{c^2 - b^2}}\right)^{m+1} \frac{1}{a_0} \zeta^{m+1} \right].$$

Da nun eine Reihe, die nach Functionen ζ^m und ζ^{-m} fortschreitet, nur convergirt, wenn die beiden nach Potenzen von ζ und von ζ^{-1} geordneten Reihen für sich convergiren, so muss sich auch die rechte Seite von (63) in zwei convergente Glieder spalten lassen, welche (abgesehen vom Vorzeichen) eine und dieselbe Function $\varphi(z)$ darstellen, so dass also in dem Ringe:

$$(64)\qquad \varphi(z) = \sum\sum c_s^m K_s^m(z) = -\sum\sum \gamma_s^m F_s^m(z).$$

Die Convergenz jeder dieser Reihen hängt nur ab von abs ζ; die erste convergirt daher nicht nur in dem Ringe, sondern in dem ganzen Ovale, welches vom äussern Rande des Ringes begrenzt wird; ebenso convergirt die andere allenthalben ausserhalb des den innern Ringrand bildenden Ovals, ausgenommen das Innere des symmetrischen und congruenten Ovals.

Das Oval des äusseren Randes bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{O}$, das des inneren mit $\mathfrak{O}'$; $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_1'$ seien die beiden Ovale, durch welche bez. $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ zu Curven des Systems (14) ergänzt werden. Es soll nun gezeigt werden, *dass man für jede holomorphe Function* $\varphi(z)$, *die für das ganze Aeussere des Ovals* $\mathfrak{O}_1'$ *gegeben ist und im Unendlichen mindestens von der ersten Ordnung verschwindet, Reihen von der Form* (64) *und also auch eine Nullentwicklung für das Innere des von* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{O}'$ *begrenzten Ringes herstellen kann.*

Nach 4), in Nr. 17., § VI., kann $\varphi(z)$ in eine Reihe nach Functionen F^m entwickelt werden für alle Punkte ausserhalb $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}_1'$, und zwar nur auf *eine* Weise, da eine Nullentwicklung nach Functionen F^m niemals im Innern von (16) convergiren kann. Damit sind die Coefficienten γ_s^m in (64) eindeutig bestimmt, wenn $\varphi(z)$ gegeben ist. — Ferner kann $\varphi(z)$ (ebenfalls nach 4), Nr. 17., § VI.) für das Innere von $\mathfrak{O}'$ nach Functionen K^m entwickelt werden; eine analoge Darstellung ist aber auch für das Innere von $\mathfrak{O}$ (welches $\mathfrak{O}'$ umschliesst) möglich, wie es (64) verlangt; man hat nur die Integrale in den Coefficienten der ersteren über $\mathfrak{O}_1$ statt über $\mathfrak{O}_1'$ auszudehnen. Die beiden so entstehenden Formeln kann man auch aus einander mittelst einer Nullentwicklung herleiten; in der That hat man, wenn β, β' die Schnittpunkte der Ovale $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_1'$ mit der X-Axe sind:

$$0 = \int_{\mathfrak{O}_1} \varphi(z) F_s^m(z)\, dz - \int_{\mathfrak{O}_1'} \varphi(z) F_s^m(z)\, dz$$

$$+ \int_{\beta}^{\beta'} \varphi(x)\left[F_s^m(x - i\cdot 0) - F_s^m(x + i\cdot 0)\right] dx,$$

folglich:

$$\int_{\mathfrak{O}_1} \varphi(z) F_s^m(z)\, dz - \int_{\mathfrak{O}_1'} \varphi(z) F_s^m(z)\, dz$$

$$= 2\int_{\beta}^{\beta'} \varphi(x) K_s^m(x)\, dx \int_{b}^{c} \frac{\mathfrak{a}_s^m - \mathfrak{b}_s^m y^2}{\sqrt{(y^2 - b^2)(y^2 - c^2)}}\, dy.$$

Durch Subtraction der beiden erwähnten Darstellungen von $\varphi(z)$ entsteht also eine Nullentwicklung, die aus (41) leicht herzuleiten ist.

Hiermit ist gezeigt, dass die Gleichungen (64) immer herzustellen sind, d. h. dass die Function $\varphi(z)$ keinen weiteren Beschränkungen unterworfen ist.

Als Resultate der Untersuchungen in diesem Paragraphen haben wir sonach folgende Nullentwicklungen:

I) Entwicklungen nach Functionen K^n:

   1) Solche, die in der ganzen Ebene gültig sind. Sie können alle aus (51) abgeleitet werden. Von je $\tau + 1$ dieser Gleichungen, welche zu demselben n gehören ($n = 2\tau$ oder $2\tau + 1$), folgt eine aus den τ übrigen; die letzteren sind von einander unabhängig.

   2) Solche, die nur im Innern der Curve (16) gelten. Sie können alle aus (60) und (51) abgeleitet werden; die Gleichungen (60) sind von einander unabhängig; jede derselben gilt nur in einer Schleife der Curve (16), für die andere Schleife findet man eine entsprechende Entwicklung.

   3) Solche, die nur in einem Ovale einer zweitheiligen Curve (14) gelten. Dieselben lassen sich mittelst der Gleichung (41) auf (51) und (60) zurückführen.

II) Entwicklungen nach Functionen F^n. Jede solche Entwicklung gilt für alle Punkte z ausserhalb der Curve (16) und nur für diese; aus (61) ergeben sich alle möglichen.

III) Entwicklungen nach Functionen K^n und F^n, die in einem von zwei Ovalen der Curven (14) begrenzten Ringe convergiren. Sie entstehen durch Subtraction zweier verschiedenen Entwicklungen von der Form (64) für eine Function $\varphi(z)$.

IV) Entwicklungen, welche nicht in einem zweifach ausgedehnten Gebiete, sondern nur längs einer Linie gelten. Ein Beispiel hierfür giebt (41), wenn man x_1 als Variable, z als Parameter auffasst; x_1 muss dann reell sein und zwischen bestimmten Grenzen liegen (vgl. Nr. 16.). Die Frage, ob es andere Formeln der Art giebt, ist im Vorstehenden nicht behandelt.

25. Es mögen jetzt noch die beiden Gleichungen untersucht werden, welche aus (51) für $n = 0$ und $n = 1$ hervorgehen und welche, zu Nullentwicklungen keine Veranlassung geben, da solche erst von $n = 2$ ab möglich waren.

Der Fall $n = 0$ giebt

$$K^0 = \frac{1}{2\pi i} C^0 K^0 \int F^0 K^0 \, dz, \tag{65}$$

das Integral über eine eintheilige Curve (14) ausgedehnt. Nun ist K^0 eine Constante $= a_0^0$, und nach (59) mit Benutzung von (20a):

$$\int K^0 F^0 dz = -4 \int_0^b dx \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-c^2)(y^2-b^2)}} + 4 \int_b^c dx \int_c^x \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}}$$

$$= -4b \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-c^2)(y^2-b^2)}}$$

$$+4 \left\{ -b \int_c^b \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}} - \int_b^c \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}} \right\} = 2\pi i.$$

Die Constante a_0^0 ist so bestimmt, dass die Gleichung (37b) erfüllt wird; also hat man:

$$\frac{1}{(a_0^0)^4} = \int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} \int_b^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}$$

$$- \int_0^b \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} \int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}$$

$$= -K'J + KJ',$$

wenn:

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = c \int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}}, \quad k'^2 = \frac{b^2}{c^2} = 1-k^2,$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = c \int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}},$$

(66)

$$J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = K' - \frac{1}{c} \int_0^b \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}},$$

$$J = \int_0^1 \frac{k^2x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K - \frac{1}{c} \int_b^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(b^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}}.$$

Die Constante C^0 endlich bestimmt sich aus (39a):

$$C^0 = (a_0^0)^4 \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man die gefundenen Werthe in (65) ein, so folgt:

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

Der Fall $n=0$ führt also auf die Legendre'sche Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. —

Im Falle $n=1$ giebt (51):

$$K^1(z) = \frac{1}{2\pi i}\, C^1 K^1(z) \int K^1(z)\, F^1(z)\, dz, \tag{67}$$

wo:

$$K^1(z) = a_0{}^1 z, \quad F^1(z) = \frac{2z}{a_0{}^1} \int_z^\infty \frac{dz}{z^2 \sqrt{(z^2-c^2)(z^2-b^2)}}\,.$$

Aus (59) folgt jetzt:

$$\int K^1(z)\, F^1(z)\, dz = -4\cdot 3 \int_0^b x^2 dx \cdot \int_b^c \frac{dy}{y^2\sqrt{Y}} + 4\cdot 3 \int_b^c x^2 dx \int_c^x \frac{dy}{y^2 \sqrt{Y}}$$
$$= 2\pi i^*).$$

Ferner hat man aus (37b):

$$\left(\frac{1}{a_0{}^1}\right)^4 = \int_0^b \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}} \int_b^c \frac{\mu^4 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}$$
$$- \int_0^b \frac{\nu^4 d\nu}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}} \int_b^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,.$$

Um die rechte Seite umzuformen, hat man sich wieder der Gleichungen (66) zu bedienen und ausserdem der Relation:

$$3k^2 \int \frac{y^4 dy}{\sqrt{Y}} = 2(1+k^2) \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{Y}} - \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} + y\sqrt{Y}$$

woraus:

$$\int_0^b \frac{\nu^4 d\nu}{\sqrt{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}} = c^3 \left\{ K' - 2J' + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^4 y^4 dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}} \right\}$$
$$= c^3 \left[\left(1 - \frac{1}{3}k^2\right) K' - \frac{1}{3}(4-k^2) J' \right],$$

$$\int_b^c \frac{\mu^4 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = c^3 \left\{ K - 2J + \int_0^1 \frac{k^4 y^4 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \right\}$$
$$= c^3 \left[\left(1 - \frac{1}{3}k^2\right) K - \frac{1}{3}(4-k^2) J \right].$$

---

*) Statt (59) anzuwenden, kann man die Substitution $z = \mathfrak{z}^{-1}$ machen, und alsdann den Integrationsweg auf einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt $\mathfrak{z} = 0$ zusammenziehen; denkt man sich dabei $F(z)$ nach Potenzen von $\mathfrak{z}$ entwickelt, so ergiebt sich sofort dasselbe Resultat.

Man findet so:

$$\left(\frac{1}{a_0{}^1}\right)^4 = \frac{c^2 b^2}{3}\,(J'K - K'J).$$

Endlich folgt aus (39 a):

$$C^1 = (a_0{}^1)^4\, c^2\, b^2\, \frac{\pi}{6}\,.$$

Setzt man alle gefundenen Werthe in (67) ein, so resultirt wieder: $J'K - K'J = \frac{1}{2}\pi$:

Auch der Fall $n = 1$ *führt auf die Legendre'sche Relation.*

Führt man in analoger Weise die Rechnungen für höhere Werthe von n aus, indem man in (51) die Coefficienten gleicher Potenzen von z vergleicht, so werden sich durch Benutzung von (37 b), (39 a), (59) und der bekannten Formel

$$(2m - 1)k^2 \int \frac{y^{2m}}{\sqrt{Y}}\, dy$$

$$= (2m - 2)(1 + k^2)\int \frac{y^{2m-2}}{\sqrt{Y}}\, dy - (2m - 3)\int \frac{y^{2m-3}}{\sqrt{Y}} dy + y^{2m-3}\sqrt{Y}$$

alle entstehenden Relationen zurückführen lassen auf obige Legendre'sche Gleichung.

§ VIII.

Der Grenzfall $b = 0$.

26. Macht man insbesondere $b = c$ oder $b = 0$, so gehen bekanntlich die Lamé'schen Functionen in die Kugelfunctionen und deren Zugeordnete über. Was im Falle $b = c$ aus unseren Entwicklungen wird, ersahen wir schon gelegentlich in Nr. 20., § VII.; es ergab sich die Heine'sche Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Kugelfunctionen. Es erübrigt jetzt noch, dem Falle $b = 0$ einige Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Die Lamé'schen Functionen $K_s^n(z)$ gehen, wenn b gleich Null wird, in diejenigen Zugeordneten der Kugelfunctionen $P_m^n\left(\frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{c}\right)$ über, für welche $n - m$ eine gerade Zahl ist*). Will man den Grenzübergang in der Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$, also in (39), ausführen, so hat man wegen (37 b), wie in Nr. 20., vorher dem Coefficienten C_s^n einen Factor k_s^n hinzuzufügen, der durch (56 a) gegeben ist, so dass hier:

---

*) Vergl. Heine, l. c. Th. I, S. 362.

$$\frac{1}{k_s^n} = [P_m^n(1)]^2 \int\limits_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \int\limits_0^1 [P_m^n(w)]^2\, dw$$

$$= (-1)^m \frac{\pi}{2(2m+1)} \cdot \frac{1.2.3\ldots(n+m).1.2.3\ldots(n-m)}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}.$$

Ferner wird:

$$K_s^n(c) = P_m^n(0), \qquad K_s^n(b) = P_m^n(1),$$

also:

$$C_s^n = (-1)^m [P_m^n(0)]^2 \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{(n+m)!\,(n-m)!}$$

$$= (-1)^{n+m} \frac{1.3.5\ldots(n+m-1).1.3.5\ldots(n-m-1)}{2.4.6\ldots(n+m).2.4.6\ldots(n-m)}.$$

Die gefundenen Werthe dürfen wir aber nicht ohne Weiteres in (39) einsetzen, vielmehr müssen wir auf Gleichung (37) zurückgreifen. Bei dem zu machenden Grenzübergange fallen nämlich die Lamé'schen Functionen L, welche auch in ganze Functionen übergehen, nicht mehr aus; diese Functionen liefern ebenfalls Zugeordnete der Kugelfunctionen P_m^n, bei denen $n-m$ eine gerade Zahl ist, aber nur solche, welche für $z=0$ verschwinden; in den Gliedern, welche in (37) aus Functionen L hervorgehen, kann daher P_0^n nie vorkommen; jede andere Function P_m^n, wo $n-m$ gerade, dagegen kommt einmal vor. Es wird nun, wie bei Functionen K: $L_s^n(c) = P_m^n(0)$, $L_s^n(b) = P_m^n(1)$, $m > 0$; auch die Berechnung des im Nenner stehenden Doppelintegrals bleibt dieselbe. Auf der rechten Seite der so aus (37) abgeleiteten Formel kommt also schliesslich jedes Glied zweimal vor, in dem eine Function P_m^n mit $m > 0$ steht; dagegen die Function P_0^n erscheint nur einmal.

Sonach geht aus (37), *für* $b = 0$ *und* $c = 1$, *folgende Entwicklung hervor, welche an Stelle von* (39) *tritt:*

$$(68) \quad \frac{1}{z_1 - z} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_m{}' (-1)^{n+m} \frac{1.3\ldots(n+m-1).1.3\ldots(n-m-1)}{2.4\ldots(n+m).2.4\ldots(n-m)} \cdot P_m^n(\sqrt{1-z^2})\, Q_m^n(\sqrt{1-z_1^2});$$

hierin ist die innere Summe über alle Zahlen m *auszudehnen, für welche* $n-m$ *eine positive gerade Zahl oder Null ist;* der Strich an dem Summenzeichen soll hier und im Folgenden andeuten, dass für $m = 0$ nur die Hälfte des betreffenden Gliedes zu nehmen ist.

Man kann (68) übrigens auch aus einer Entwicklung des reciproken Werthes der Entfernung zweier Raumpunkte ableiten, welche man bei den Potentialaufgaben für das Rotationsellipsoid anwendet, und welche selbst ein Grenzfall von (37) ist, nämlich aus der Formel:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=n}{}' (-1)^\nu a_\nu^{(n)} P_\nu^n(\cos\vartheta) P_\nu^n(\cos\eta) P_\nu^n(s) Q_\nu^n(r) \operatorname{cosin} \nu\varphi,$$

$$a_\nu^{(n)} = 2 \cdot \frac{[1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!},$$

$$R^2 = r^2 - \sin^2\vartheta + s^2 - \sin^2\eta - 2rs \cos\vartheta \cos\eta$$

$$- 2\sqrt{r^2 - 1}\sqrt{s^2-1} \sin\vartheta \sin\eta \cos\varphi.$$

Setzt man hierin $\vartheta = \eta = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = 0$, $r = \sqrt{1 - z_1^2}$, $s = \sqrt{1 - z^2}$, so erhält man sofort (68).

Die Convergenz der rechten Seite von (68) beurtheilt man mittelst der asymptotischen Werthe von P_m^n und Q_m^n; dieselben sind, wenn

$$\mathfrak{z} = \sqrt{1 - z^2}, \qquad \mathfrak{z}_1 = \sqrt{1 - z_1^2},$$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z} - \sqrt{\mathfrak{z}^2 - 1}, \qquad \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{z}_1 - \sqrt{\mathfrak{z}_1^2 - 1},$$

$$= \frac{1}{i}(z - \sqrt{z^2 - 1}), \qquad = \frac{1}{i}(z_1 - \sqrt{z_1^2 - 1}),$$

bez. gleich*)

$$\frac{(2\mathfrak{t})^{-n}}{\sqrt{1-\mathfrak{t}^2}}, \quad \text{und} \quad \frac{(2\mathfrak{t}_1)^{n+1}}{\sqrt{1-\mathfrak{t}_1^2}}.$$

Aus der Additionsformel von **Laplace**

$$P^n(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)$$

$$= 2\sum_{m=0}^{m=n}{}' (-1)^m \frac{[1 . 3 \ldots (2n-1)]^2}{(n+m)!\,(n-m)!} P_m^n(x)\, P_m^n(x_1) \operatorname{cosin} m\varphi$$

folgt für $x = 0$, $x_1 = 0$, $\varphi = 0$:

$$2\sum_{m=0}^{m=n}{}' (-1)^m [P_m^n(0)]^2 \frac{[1 . 3 \ldots (2n-1)]^2}{(n+m)!\,(n-m)!} = P^n(-1) = (-1)^n.$$

Also wird, wenn Y^n das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der rechten Seite von (68) bezeichnet:

$$Y^n = (-1)^n \frac{(2\mathfrak{t})^{-n}(2\mathfrak{t}_1)^{n+1}}{\sqrt{1-\mathfrak{t}^2}\sqrt{1-\mathfrak{t}_1^2}}.$$

Die Reihe convergirt daher, so lange abs $\mathfrak{t}_1 <$ abs $\mathfrak{t}$. Es ist aber abs $\mathfrak{t}$ = abs $(z - \sqrt{z^2 - 1})$; d. h. *die Reihe* (68) *ist gültig, wenn z im Innern einer Ellipse liegt, die durch z_1 geht, und deren Brennpunkte sich in den Punkten* $+ 1$ *und* $- 1$ *befinden;* dies ist dieselbe Bedingung, welche bei der Entwicklung des Herrn **Heine** nach Functionen P_0^n und Q_0^n auftritt.

---

*) Vgl. **Heine**, l. c. Theil I, S. 232.

Es ist bemerkenswerth, dass für $b = 0$ auch das System der Curven (14) in ein System confocaler Ellipsen übergeht. In der That erhält man aus (11) für $b = 0$, $c = 1$, $\log \varrho = \tau$

$$z^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{cosin} 2\tau i \operatorname{cosin} 2\omega - \sin 2\tau i \sin 2\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{cosin} 2(\tau i + \omega)\right] = \operatorname{cosin}^2(\tau i + \omega),$$

also die Transformation $z = \underline{+} \operatorname{cosin}(\tau i + \omega)$, aus welcher in bekannter Weise für $\tau = \text{Const.}$ die Schaar der Ellipsen hervorgeht:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2}\right)^2} = 1.$$

Macht man somit den Grenzübergang $b = 0$, so behält dabei das System (14) seine Bedeutung für die Beurtheilung der Convergenz von (39); dies ist nicht der Fall für $b = c$; denn hier geht (14) über in

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{und} \quad xy = 0,$$

während die entstehende Heine'sche Entwicklung wieder in confocalen Ellipsen convergirt.*) Es liegt dies daran, dass für $b = 0$ die Grenzwerthe der asymptotischen Werthe von K_s^n und F_s^n wesentlich identisch sind mit den asymptotischen Werthen der Grenzwerthe, d. i. der Functionen P_m^n und Q_m^n, wie man sofort erkennt, wenn man in (28a) und (29) $\zeta = it$, $\varkappa = 1$ setzt.

An die Gleichung (68) kann man nun alle diejenigen Erörterungen anknüpfen, zu welchen in §§ V., VI. und VII. die Gleichung (39) Veranlassung gab; man hat dabei nur alles auszuscheiden, was sich auf die Ovale der Curven (14) und die Curve (16) bezieht; denn letztere hat sich hier auf die Linie $C'C$ zusammengezogen. Insbesondere müssen sich alle möglichen *Nullentwicklungen* aus den Gleichungen (51) und (61) ableiten lassen. Dieselben werden hier:

(69)
$$P_\nu^n(\sqrt{1-z^2})$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{\mu}{}' C_\mu^m P_\mu^m(\sqrt{1-z^2})\int Q_\mu^m(\sqrt{1-z_1^{\,2}})\, P_\nu^n(\sqrt{1-z_1^{\,2}})\, dz_1,$$

(69a)
$$Q_\nu^n(\sqrt{1-z^2})$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=n}^{m=\infty}\sum_{\mu}{}' C_\mu^m Q_\mu^m(\sqrt{1-z^2})\int P_\mu^m(\sqrt{1-z_1^{\,2}})\, Q_\nu^n(\sqrt{1-z_1^{\,2}})\, dz_1,$$

$$C_\mu^m = (-1)^{m+\mu}\frac{1.3.5\ldots(m+\mu-1).1.3.5\ldots(m-\mu-1)}{2.4\ldots(m+\mu).2.4\ldots(m-\mu)},$$

---

*) Vergl. oben die letzte Anmerkung zu Nr. 20.

die Summe nach μ verstanden, wie bei (68), alle Integrale in positivem Sinne über eine Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1 geführt. Die Gleichung (69) gilt in der ganzen Ebene, die Gleichung (69a) ebenfalls, ausgenommen die gerade Verbindungslinie von $+1$ mit -1.

Die Integrale, welche in diesen Gleichungen als Coefficienten auftreten, kann man auf folgende Weise auswerthen. Zunächst hat man, wie in (50):

$$\int P_\nu^n(\sqrt{1-z_1^2})\, Q_\mu^m(\sqrt{1-z_1^2})\, dz_1 = 0 \tag{70}$$

für

$$m > n,$$

oder

$$m \gtrless n, \quad m+n \text{ ungerade.}$$

Es fallen also in (69) *und* (69a) *alle Glieder aus, für die $m+n$ ungerade ist.* Um das Integral, für $m < n$ und $m+n$ gerade, zu finden, denken wir uns P_ν^n und Q_μ^m (wo $n-\nu$ und $m-\mu$ gerade Zahlen sind) nach Potenzen von $\sqrt{(1-z^2)-1} = iz$ entwickelt; es ist:*)

$$P_\nu^n(\sqrt{1-z^2}) = i^n z^n F\left(-\frac{n+\nu}{2},\ -\frac{n-\nu}{2},\ -\frac{2n-1}{2},\ z^{-2}\right)$$

$$= i^n \left\{ z^n + \sum_{r=1}^{r=\tau} \frac{(n+\nu)(n+\nu-2)\dots(n+\nu-2r+2)(n-\nu)(n-\nu-2)\dots(n-\nu-2r+2)}{2^r\cdot 1.2.3\dots r.(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2r+1)} (-1)^r z^{n-2r} \right\}$$

$$= i^n \sum_{r=0}^{r=\tau} a_{r,\nu}^n z^{n-2r}, \qquad \text{wo} \quad \tau = \frac{n-\nu}{2},$$

$$Q_\mu^m(\sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{(iz)^{m+1}} F\left(\frac{m+1-\mu}{2},\ \frac{m+1+\mu}{2},\ \frac{2m+3}{2},\ z^{-2}\right)$$

$$= (-i)^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{z^{m+1}} \\ + \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(m-\mu+1)(m-\mu+3)\dots(m-\mu+2r-1)(m+\mu+1)(m+\mu+3)\dots(m+\mu+2r-1)}{2^r.1.2.3\dots r.(2m+3)(2m+5)\dots(2m+2r+1)} \\ \cdot \dfrac{1}{z^{m+2r+1}} \end{array} \right\}$$

$$= (-i)^{m+1} \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{r,\mu}^m z^{-m-2r-1}.$$

Setzt man diese Werthe in das Integral ein, macht die Substitution $z' = z^{-1}$, zieht den Integrationsweg auf einen unendlich kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte $z' = 0$ zusammen, so ist das Integral offenbar gleich $2\pi i$ multiplicirt in die Grösse, welche man als Coefficienten von z'^{-1} findet, wenn man die Multiplication von P_ν^n in Q_μ^m ausführt und noch mit z'^2 dividirt. Es ergiebt sich so die Gleichung:

---

*) Vgl. Heine, l. c. Theil I, S. 218.

$$\begin{aligned}(71)\qquad &\int P_\nu^n(\sqrt{1-z^2})\, Q_\mu^m(\sqrt{1-z^2})\, dz \\ &= 2\pi(-1)^\tau (a_{\tau,\nu}^n b_{0,\mu}^m + a_{\tau+1,\nu}^n b_{1,\mu}^m + \cdots + a_{0,\nu}^n b_{\tau,\mu}^m),\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die Zahlen $n-m$, $n-\nu$, $m-\mu$ gerade sind; hier ist $\tau = \frac{1}{2}(n-m)$; die Grössen a und b sind als Coefficienten der eben angegebenen Entwicklungen definirt; das Integral der linken Seite ist in positivem Sinne über eine Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1 geführt.

Durch Umformung der linken Seite von (71) findet man ein bemerkenswerthes bestimmtes Integral. Es ist:

$$\int P_\nu^n(\sqrt{1-z^2})\, Q_\mu^m(\sqrt{1-z^2})\, dz = \int P_\nu^n(\mathfrak{z})\, Q_\mu^m(\mathfrak{z}) \frac{\mathfrak{z}\, d\mathfrak{z}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}};$$

das Integral der rechten Seite ist über die Ellipse mit den Brennpunkten $+1$, -1 zu führen, in welche der Integrationsweg*) der linken Seite bei der Transformation $\mathfrak{z} = \sqrt{1-z^2}$ übergeht, und zwar auch in positivem Sinne. Der Integrationsweg der rechten Seite kann zusammengezogen werden auf eine um die Linie von $+1$ nach -1 gezogene Schleife; man erhält, da $\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}$ sein Zeichen ändert beim Umgange um einen dieser Punkte:

$$= \int_{-1}^{+1} P_\nu^n(\mathfrak{x}) \left[Q_\mu^m(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}) + Q_\mu^m(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})\right] \frac{\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}}{\sqrt{1-\mathfrak{x}^2}}.$$

Hier steht in der Klammer diejenige Grösse, welche man als Werth von $2\,Q_\mu^m(\mathfrak{x})$ definirt, wenn $\mathfrak{x}$ reell und abs $\mathfrak{x} < 1$ ist (l. c. S. 220). *Sonach folgt aus* (71):

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^n(x)\, Q_\mu^m(x) \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi(-1)^\tau \sum_{r=0}^{r=\tau} a_{\tau-r,\nu}^n b_{r,\mu}^m, \quad n \geqq m.$$

Hier sind zunächst $n-m=2\tau$, $n-\nu$, $m-\mu$ als gerade Zahlen vorausgesetzt, aber die Formel bleibt gültig, wenn $n-m$ gerade, aber $n-\nu$ und $m-\mu$ oder eine dieser Zahlen ungerade sind; denn die benutzten Entwicklungen für P_ν^n und Q_μ^m gelten dann auch noch; allerdings bricht dann die Reihe für P_ν^n nicht mehr ab, aber die weiteren Glieder kommen für uns doch nicht in Betracht. Ist $m = n$, so hat man insbesondere:

---

*) Dass derselbe bei der Transformation $\mathfrak{z} = \sqrt{1-z^2}$ in der That wieder eine Ellipse wird, folgt daraus, dass abs $(\mathfrak{z} - \sqrt{\mathfrak{z}^2-1}) =$ abs $(z - \sqrt{z^2-1})$.

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^n(x)\, Q_\mu^n(x) \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Freiburg i. Br., den 10. October 1881.

Nachtrag.

Erst jetzt kommen mir die beiden Aufsätze in die Hand, welche Herr Weierstrass im August 1880 und im Februar 1881 in den Monatsberichten der Berliner Akademie veröffentlicht hat (und zwar die französische Uebersetzung derselben, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Série II, t. V, p. 157); ihr Inhalt veranlasst mich, den vorstehenden Untersuchungen noch einige Bemerkungen anzufügen.

Herr Weierstrass zeigt a. a. O., dass eine Reihe, selbst wenn ihre einzelnen Glieder rationale Functionen des Arguments sind, in verschiedenen, von einander getrennten Gebieten convergiren und in diesen Gebieten verschiedene Functionen darstellen kann (d. h. Functionen, von denen die eine nicht die stetige Fortsetzung der andern ist und welche nicht verschiedene Zweige einer und derselben mehrdeutigen Function darstellen). Ein einfaches Beispiel ergiebt sich, indem eine Reihe aufgestellt wird, welche gleich $+1$ ist für alle z, deren reeller Theil positiv ist, gleich -1 für alle z, deren reeller Theil negativ ist; und diese Reihe wird benutzt, complicirtere Functionen der verlangten Eigenschaft zu construiren. In der spätern Note theilt der Verfasser sodann einen Brief des Herrn Tannery mit, in dem noch einfachere Beispiele der Art angegeben werden.

Es scheint mir bemerkenswerth, dass einige der oben besprochenen Entwicklungen nach Lamé'schen Functionen ebenfalls Beispiele für das von Herrn Weierstrass besprochene Vorkommniss liefern. So haben wir in § VII., Nr. 21., Gleichung (60) eine Entwicklung nach Lamé'schen Functionen erster Art von der Classe K (also *ganzen* Functionen) kennen gelernt, welche gleich $+K_t^n(z)$ ist, wenn der Punkt im Innern derjenigen Schleife der Curve (16) liegt, die von der positiven X-Axe durchsetzt wird; dieselbe Reihe war dagegen gleich $-K_t^n(z)$, wenn sich der Punkt z im Innern der andern Schleife der Curve (16) befindet.

Ein anderes Beispiel giebt die in § VI., unter 2), besprochene Entwicklung nach Functionen $K_s^m(z)$. Dieselbe convergirt in einem Ovale $\mathfrak{O}$ einer Curve des Systems (14) und stellt in diesem Ovale eine gegebene Function $f(z)$ dar. Da aber die Convergenz nur abhängt von dem absoluten Betrage der durch (2) definirten Function ζ, so convergirt dieselbe Reihe auch in demjenigen Ovale $\mathfrak{O}'$, durch welches $\mathfrak{O}$ zu einer Curve (14) ergänzt wird. Es fragt sich, welche Function in diesem Ovale $\mathfrak{O}'$ durch die angegebene Entwicklung dargestellt wird.

Um hierauf zu antworten, bemerken wir, dass

$$\int\limits_{\mathfrak{O}} \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\, dz_1 = 0$$

ist, wenn $f(z_1)$ im Innern von $\mathfrak{O}$ holomorph ist, und wenn z ausserhalb $\mathfrak{O}$ liegt; unter dem Integralzeichen steht nämlich dann eine Function, die im *ganzen* Innern von $\mathfrak{O}$ holomorphen Charakter hat. Ist insbesondere z ein Punkt im Innern von $\mathfrak{O}'$, so kann man unter dem Integralzeichen den Factor $(z_1 - z)^{-1}$ nach Functionen $K_s^n(z)$ mittelst (39) entwickeln; durch gliedweise Integration folgt dann sofort:

Die unter 2) *in* § VI. *besprochene Reihe, welche eine Function* $f(z)$ *im Innern eines Ovals* $\mathfrak{O}$ *darstellt, convergirt auch noch in dem Ovale* $\mathfrak{O}'$, *durch welches* $\mathfrak{O}$ *zu einer Curve des Systems* (14) *ergänzt wird, und ergiebt als Summe den Werth Null für Punkte* z *im Innern dieses Ovals* $\mathfrak{O}'$.

Da der Punkt $-z$ in $\mathfrak{O}'$ liegt, sobald z sich in $\mathfrak{O}$ befindet, und da K^n eine gerade oder ungerade Function ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so bestehen also die beiden Gleichungen:

$$(\alpha)\quad \begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^m\, K_s^m(z) \int\limits_{\mathfrak{O}} f(z_1)\, F_s^m(z_1)\, dz_1, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} (-1)^m C_s^m\, K_s^m(z) \int\limits_{\mathfrak{O}} f(z_1)\, F_s^m(z_1)\, dz_1. \end{aligned}$$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man eine Entwicklung von $f(z)$, in der allein die geraden Functionen K vorkommen; subtrahirt man die zweite von der ersten, so entsteht eine Entwicklung, welche allein nach ungeraden Functionen fortschreitet. Macht man insbesondere $f(z) = K_t^n(z)$, so wird man auf die Gleichungen (60) zurückgeführt, wie mit Hülfe von (41) nach Früherem leicht zu bestätigen ist. *Beide Entwicklungen gelten in* $\mathfrak{O}$; *ist* $f(z)$ *eine gerade Function, so ist* $f(z)$ *durch erstere Entwicklung in beiden Ovalen dargestellt; die zweite Entwicklung dagegen giebt in* $\mathfrak{O}$ *die Function* $f(z)$, *in* $\mathfrak{O}'$ *die Function* $-f(z)$; *umgekehrt ist es, wenn* $f(z)$ *eine ungerade Function ist.* Der Fall $f(z) = K_t^n(z)$ giebt das zuerst erwähnte Beispiel.

Die zweite der eben angegebenen Gleichungen giebt uns eine Nullentwicklung für das Innere von $\mathfrak{O}$; dieselbe muss nach unseren allgemeinen Sätzen eine Folge der in § VII. aufgestellten Nullentwicklungen sein. Um dies hier zu zeigen, genügt es nachzuweisen, dass die beiden Entwicklungen von $f(z)$, welche bez. nach geraden und ungeraden Functionen K fortschreiten, vermöge der in § VII. aufgestellten Formeln in einander übergeführt werden können. Dies aber lässt sich in der That sofort bewerkstelligen; zu dem Zwecke geht man von der Entwicklung nach geraden K aus; ersetzt alle geraden K mittelst (60) durch ungerade K, vertauscht die Summationsordnung in der entstehenden Doppelreihe und kehrt endlich zu einer einfachen Reihe zurück, indem man auf die einzelnen Glieder nochmals die Darstellung von $f(z)$ durch gerade K anwendet. Die Gleichungen (60) sind hierbei nicht in der ursprünglichen Form anzuwenden, sondern in der Gestalt, wie sie aus (α) folgen, wenn man dort $f(z) = K_t''(z)$ setzt und dann addirt bez. subtrahirt; mittelst (41), (58a), (60a) und (60b) sind sie leicht direct in diese Gestalt überzuführen.

Freiburg i. Br., den 26. October 1881.

Zur Theorie der Flächentransformationen.

Von

A. V. **Bäcklund** in Lund.

Jede Transformation, die eine jede Fläche in eine bestimmte Fläche und umgekehrt die letztere Fläche wiederum nur in die erstere verwandelt, ist eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation. In meiner Abhandlung im IX. Bande dieser Annalen habe ich dies bewiesen. Eine gewisse Classe von Transformationen, die von einer Fläche zu unendlich vielen Flächenschaaren führen, habe ich in dem XI. und XIII. Bande dieser Annalen besprochen, nämlich die Classe, die aus denjenigen Flächentransformationen besteht, die durch je drei Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} X &= F(z, x, y, p, q, \cdots),\\ Y &= F_1(\qquad\qquad\qquad),\\ Z &= F_2(\qquad\qquad\qquad) \end{aligned}$$

begründet sind. Jede Transformation, die zu dieser Classe gehört, ist dadurch ausgezeichnet, dass sie eine jede Fläche des Gebietes (xyz) in nur eine Fläche in (XYZ), dagegen eine Fläche des letzteren Gebietes in unendlich viele Flächen des anderen umformt. Später, im XVII. Bande dieser Annalen, habe ich solche Transformationen erörtert, die eine jede Fläche jedes der Gebiete (xyz), (XYZ) in partielle Differentialgleichungen 1. O. umformen. Dieselben sind durch je drei Gleichungen:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q) = 0,\\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,\\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Unter ihnen sind gewisse von den nächstvorher genannten Transformationen enthalten, die ich besonders umständlich im XI. Bande dieser Annalen behandelt habe (Bd. XVII d. A., p. 308). Transformationen, die durch mehr als drei Gleichungen zwischen z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q bestimmt werden, werden im Allgemeinen keine Flächentransformationen für die ganzen Gebiete (xyz), (XYZ). Ist die Anzahl der die Transformation bestimmenden Gleichungen vier, so existiren jedoch weit umfassende Flächenschaaren, für welche die Transformation eine Flächentransformation wird (Bd. XVII d. A., p. 313). Eine specielle Transformation dieser Art ist die durch die vier Gleichungen:

$$X = x, \quad Y = y,$$
$$f(Z, z, x, y, p, q, P, Q) = 0, \quad \varphi(Z, z, x, y, p, q, P, Q) = 0$$

ausgedrückte. Die Aufgabe, diejenigen Flächen zu bestimmen, die von dieser Transformation wiederum in Flächen verwandelt werden, ist mit der Aufgabe äquivalent, die Lösungen

$$z = F(x, y), \quad p = F'(x), \quad q = F'(y),$$
$$Z = \Phi(x, y), \quad P = \Phi'(x), \quad Q = \Phi'(y)$$

von $f = 0$, $\varphi = 0$ zu bestimmen. Auf die Erledigung dieser Aufgabe bezogen sich die Erörterungen der 5. und 6. Nr. meiner Abhandlung im XVII. Bande dieser Annalen. Ich gehe hier wieder auf die Charakterisirung dieser Flächenschaaren ein und betrachte so auch einige Specialfälle der Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$.

In dem Bezirke, in dem eine durch vier Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q$ bestimmte Transformation eine Flächentransformation wird, ist sie im Allgemeinen eine eindeutige Flächentransformation. Aber es giebt Fälle, in denen sie unendlich-deutig wird, entweder in der Art, dass sie eine jede Fläche eines der Gebiete (xyz), (XYZ) des fraglichen Bezirkes in eine bestimmte Fläche des anderen, jede Fläche dieses letzteren Gebietes in unendlich viele des ersteren verwandelt, oder in der Art, dass sie jede Fläche jedes der Gebiete in unendlich viele Flächen umformt. Auf eine Transformation dieses letzten Charakters hat Lie in einer Abhandlung über die Flächen von constanter Krümmung (im Archiv für Mathematik und Naturwissenschaft, Bd. 5, Christiania 1880) aufmerksam gemacht. Er war auf dieselbe geführt worden durch das Studium einer neuerdings von Bianchi gegebenen Methode, um aus einer gegebenen Fläche von constanter Krümmung neue derartige Flächen zu erzeugen. Ich habe versucht, im Anschlusse an meine allgemeineren Sätze, am Ende der vorliegenden Abhandlung Einiges dieser von Bianchi und Lie herrührenden Theorie kurz auseinanderzusetzen.

Der dritte Paragraph beschäftigt sich mit einigen speciellen Flächentransformationen von der Gattung (α).

§ 1.

Verschiedenes über die durch zwei Gleichungen zwischen z, z', x, y und den ersten Derivirten von z, z' in Bezug auf x, y analytisch definirte Figur.

1. Zwei Flächenelemente, die z, x, y, p, q bez. z', x, y, p', q' zu Parametern haben, sollen, falls die Parameterwerthe $(z', z, x, y, p, q, p', q')$ die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

befriedigen, zwei sich entsprechende Elemente dieses Gleichungssystemes heissen. Zu zwei beliebig gewählten, sich entsprechenden Elementen des Systems können unendlich viele Flächenelemente hinzugefügt werden, die jenen unendlich benachbart sind, mit ihnen bez. vereinigt liegen und überdies einander entsprechende Elemente des Systems (1) bilden. Wenn nämlich (z, x, y, p, q), (z', x, y, p', q') die Parameter der zwei ersten Elemente sind, und für $dz, dz', dp, dq, dp', dq'$ irgend welche Werthe, die den Gleichungen:

$$\text{(a)} \quad dz = pdx + qdy, \quad dz' = p'dx + q'dy, \quad df = 0, \quad d\varphi = 0$$

genügen, gesetzt werden, so werden $(z + dz,\ x + dx, \cdots, q + dq)$, $(z' + dz',\ x + dx, \cdots, q' + dq')$ eben Parameter zweier Elemente der genannten Art. Zu jedem solchen Inbegriffe von zwei sich entsprechenden Paaren von vereinigt liegenden Elementen gehört weiter ein und im Allgemeinen nur *ein* Werthsystem von (r, s, t, r', s', t'), das zu gleicher Zeit einer Lösung: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ von (1) als Werthsystem der zweiten Derivirten von F und Φ zugehört. Es ist dieses Werthsystem dasjenige, welches die folgenden sechs Gleichungen befriedigt:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} dp = rdx + sdy, & dp' = r'dx + s'dy, & [f\varphi]_{zxp} = 0, \\ dq = sdx + tdy, & dq' = s'dx + t'dy, & [f\varphi]_{z'xp'} = 0, \end{cases}$$

von denen die zwei letzten die Bedingungen dafür liefern, dass jene Werthe von r, s, t, r', s', t' überhaupt einer Lösung von (1) zukommen. Hieraus ist aber zu schliessen, *dass man durch irgend zwei Streifen, deren Flächenelemente einander entsprechende Elemente des Systems* (1) *bilden*, *immer ein und im Allgemeinen nur ein Flächenpaar:* $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ *hindurchlegen kann*, *das eine Lösung von* (1) *darstellt.*

Die Uebereinstimmung dieses Satzes mit dem Satze S. 291 meiner Abhandlung im XVII. Bande dieser Annalen ist offenbar. Es heisst dort, dass durch jeden Streifen von Elementen $(z'xyp'q')$ eine einfach unendliche Schaar von Integralen: $z' = \Phi(x, y)$ geht. Nun giebt es, wie aus (1) und den Gleichungen (a) einleuchtet, einfach unendlich viele Streifen von solchen Elementen $(zxypq)$, die den Elementen $(z'xyp'q')$ eines gegebenen Streifens entsprechen. Nach dem eben Auseinandergesetzten muss ein jeder jener ∞^1 Streifen im Verein mit dem gegebenen ein Flächenpaar: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ bestimmen, das eine Lösung von (1) bildet. Also kommt zu dem gegebenen Streifen von Elementen $(z'xyp'q')$ im Ganzen eine einfach unendliche Schaar von durch denselben hindurchgehenden Integralflächen: $z' = \Phi(x, y)$, — wie vormals von mir am citirten Orte angemerkt war.

Wir können das hier Entwickelte auch so formuliren: *Durch irgend ein Curvenpaar, das durch drei Gleichungen* $z = f(x)$, $z' = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ *darzustellen ist, geht ein ganz bestimmtes Flächenpaar, das eine Lösung von* (1) *bildet.* Die Gleichungen (1) bestimmen nämlich zusammen mit den zwei ersten der Gleichungen (a) die Parameter p, q, p', q' von einander entsprechenden Flächenelementen, welche, sich an die beiden Curven anschliessend, Streifen bilden, die nach dem Vorangehenden die Flächen des fraglichen Paares unzweideutig bestimmen.

Oder, wenn wir z, z', x, y als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4 (von vier Dimensionen) auffassen (d. A. Bd. XVII, p. 289), können wir sagen: *Durch jede* M_1^0 *geht eine ganz bestimmte Integral-*M_2^0 *von* (1).

2. Es giebt aber einander entsprechende Paare von vereinigt liegenden Elementen von (1), zu denen unendlich viele Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t') im obigen Sinne zugeordnet werden. Die zwei Elemente $(zxypq)$, $(z'xyp'q')$ der beiden Paare sind sogar ganz beliebig aus den Elementen von (1) auszuwählen. Man kann nämlich die Verhältnisse dx, dy, dp, dq so bestimmen, dass der Büschel von (r, s, t), der ausgedrückt ist durch die zwei ersten unter einander stehenden Gleichungen (b), der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ gänzlich zugehört, und dass zu gleicher Zeit der Büschel von (r', s', t'), der die beiden nächsten unter einander stehenden Gleichungen (b) befriedigt, — diese Gleichungen auf das dem Elemente $(z + dz \cdots q + dq)$ entsprechende Element $(z' + dz' \cdots q' + dq')$ angewandt, — in der Gleichung $[f\varphi]_{zxp} = 0$ ganz enthalten ist. Für $\frac{dy}{dx}$ muss zu dem Ende die folgende quadratische Gleichung gelten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right)\\ -\frac{dy}{dx}&\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q'}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q'} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right)\\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial q'}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial q'}\right) = 0, \end{aligned}$$

und zwischen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ muss eine Gleichung bestehen, die aus $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ durch Elimination von r, s, t vermittelst (b) und unter Berücksichtigung der zuletzt aufgeschriebenen Gleichung (2) für $\frac{dy}{dx}$ hervorgeht.

Ein jedes dieser ∞^1 möglichen Werthsysteme von $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ bestimmt zusammen mit einem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus (2) ein Flächenelement $(z+dz, x+dx, \cdots, q+dq)$, das mit dem Elemente $(zxypq)$ ein Paar bildet, welches in Verein mit seinem entsprechenden Paare auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise ∞^1 Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t') bestimmt.

Wir sehen somit, *dass es auf jedem Flächenpaare:* $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, *das eine Lösung von* (1) *bildet, zwei Schaaren von einander entsprechenden Streifenpaaren giebt, längs derer dieses Flächenpaar unendlich viele andere Flächenpaare berührt, die ebenfalls Lösungen von* (1) *bilden.**)

S. 290, 291, Bd. XVII d. A. habe ich gezeigt, dass die Flächen $z' = \Phi(xy)$ [oder $z = F(x, y)$], welche die einen Theile der Lösungen von (1) bilden, zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 3. O., deren erste Derivirte sich auf nur drei Gleichungen reduciren, als Integrale genügen. Die Integralflächen solcher Paare von partiellen Differentialgleichungen 3. O. sind aus je zwei Schaaren von Charakteristiken zusammengesetzt (d. A. Bd. XIII, pag. 91—94). Diejenigen der eben genannten Berührungsstreifen, die auf der Fläche $z' = \Phi(x, y)$ [oder $z = F(x, y)$] liegen, bilden eben die Charakteristiken jenes Paares von Gleichungen 3. O. Die Charakteristiken dieses zu (1) gehörigen Gleichungspaares werden aber überdies Streifen, längs derer für die Integralflächen Berührung schon von der 1. O. möglich ist.

Fassen wir z, z', x, y als Punktcoordinaten in R_4 auf, so haben wir aus dem jetzt Entwickelten zu schliessen, *dass auf jeder Integral-*M_2^0 *von* (1) *zwei Schaaren von* M_1^0 *verlaufen, längs derer jene* M_2^0 *von unendlich vielen anderen Integral-*M_2^0 *desselben Gleichungspaares* (1) *berührt wird.* Diese M_1^0 mit ihren Büscheln von je ∞^1 Tangentenebenen nenne ich kurz Charakteristikenstreifen*) oder kürzer sie sowohl als die M_1^0 selbst Charakteristiken von (1). *Durch eine Charakteristik kann man nicht, wie durch jede andere* M_1^0, *blos eine, sondern* ∞^∞ *Integral-*M_2^0 *von* (1) *legen.*

---

*) Wenn $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$; $z = F^{(1)}(x, y)$, $z' = \Phi^{(1)}(x, y)$ zwei solche sich berührende Paare bilden, und überdies die beiden Flächen $z = F(x, y)$, $z = F^{(1)}(x, y)$ sich nach ihrer Berührungscurve osculiren, so müssen auch die zwei Flächen $z = \Phi(x, y)$, $z' = \Phi^{(1)}(x, y)$ nach ihrer Berührungscurve sich osculiren. Denn einem Werthe von (r, s, t), der der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ genügt, entspricht ein einziger Werth von (r', s', t') vermittelst dreier der Gleichungen: die ersten Derivirten von f und φ in (1) in Bezug auf x, y gleich Null.

Die Charakteristiken sind die einzigen M_1^0 von dieser Eigenschaft.

3. S. 296, Bd. XVII d. A. habe ich bewiesen, dass die allgemeinste Gleichung $x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$, die mit (1) ∞^3 Integral-M_2^0 gemein hat, durch eine lineare partielle Differentialgleichung 2. O. definirt ist. Hieraus folgt, dass es eine und im Allgemeinen nur *eine* Gleichung: $x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$ giebt, die erstens von allen denjenigen Werthsystemen von (x, y, p, q, p', q'), die durch irgend zwei (zu $f = 0$, $\varphi = 0$ hinzugefügte) Gleichungen zwischen diesen Grössen ausgeschieden werden, befriedigt wird, und zweitens für diese selben Werthsysteme einer beliebigen linearen Relation zwischen den Differentialquotienten von x (oder χ) genügt. Man kann zu diesem Satze auf einem anderen Wege gelangen, den ich hier angeben will. Aus ihm kann man sodann rückwärts schliessen, dass die Gleichung für χ eine partielle Differentialgleichung 2. O. sein muss.

Wir haben erstens, wenn wir die Gleichungen (10) in Bd. XVII d. A. p. 291:

$$[f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0$$

für die ∞^4 hier besonders in Frage gestellten Werthsysteme von $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ anwenden wollen, für die Verhältnisse der Differentialquotienten von ψ gewisse Werthe einzuführen, die in folgender Weise zu bestimmen sind. ψ ist die Function $x - \chi(y, p, q, p', q')$, frei von z, z', welche Grössen wir uns überall vermittelst der Gleichungen (1) herauseliminirt denken. Schreiben wir die beiden zu (1) beliebig hinzugefügten Gleichungen in x, y, p, q, p', q' unter der Form:

$$x - F(p, q, p', q') = 0, \quad y - \Phi(p, q, p', q') = 0,$$

so haben wir die fraglichen Werthe von

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial x}, \ldots, -\frac{\partial\psi}{\partial q'} : \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

d. i.

$$\frac{\partial x}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial q'}$$

eindeutig bestimmt durch die supponirte lineare Relation zwischen diesen Differentialquotienten und durch die folgenden Gleichungen (d. A. Bd. XIII, p. 413):

$$F'(p) - \frac{\partial x}{\partial y}\Phi'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} = 0, \ldots, F'(q') - \frac{\partial x}{\partial y}\Phi'(q') - \frac{\partial x}{\partial q'} = 0.$$

---

*) Zwei unendlich benachbarte M_1^0 begründen einen Streifen auf jeder durch dieselben gelegten M_2^0.

Aus jenen Gleichungen (10) d. A., Bd. XVII, kommen wir nachher für ein jedes der in Rede stehenden Werthsysteme von $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ zu einem bestimmten Werthsysteme von (r', s', t'), und hernach aus den ersten Derivirten von $f = 0$, $\varphi = 0$ zu einem ebenfalls ganz bestimmten Werthsysteme von (r, s, t).

Die durch

$$pdx + qdy = dz, \;\cdots,\; rdx + sdy = dp, \;\cdots,\; s'dy + t'dx = dq'$$

dargestellten Werthe der Differentiale von z, z', p, q, p', q' befriedigen von selbst, auf Grund der obigen Gleichungen (10) d. A., Bd. XVII, die Gleichungen $df = 0$, $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$. Wegen der durch die Gleichungen $F'(p) - \frac{\partial x}{\partial y}\,\Phi'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} = 0$, etc., gegebenen Ausdrücke für $\frac{\partial x}{\partial p}$ etc., d. i. $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ etc. geben die zwei Gleichungen:

$$d(x - F) = 0, \quad d(y - \Phi) = 0$$

nur eine neue Gleichung ab. Diese Gleichung, die wir bestehen lassen, giebt für $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten Werth in $z, z', x, y, p, q, p', q'$. Entsprechend diesem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und den daraus folgenden Werthen von $\frac{dp}{dx}\left(= r + s\frac{dy}{dx}\right), \cdots, \frac{dq'}{dx}\left(= s' + t'\frac{dy}{dx}\right)$ werden die ∞^4 Elemente $(zz'xypqp'q')$, welche die Gleichungen erfüllen:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad x = F, \quad y = \Phi,$$

zu ∞^3 völlig bestimmten $M_1{}^0$ zusammengeordnet. Eine jede dieser $M_1{}^0$ bestimmt nach der 1. Nr. eine für $f = 0$, $\varphi = 0$ gemeinsame Integral-$M_2{}^0$, die auch Integral einer Gleichung $\psi (\equiv x - \chi) = 0$ der oben genannten Eigenschaft wird. So haben wir im Ganzen ∞^3 $M_2{}^0$, die den Gleichungen (1) genügen und eine gewisse Gleichung $\psi \equiv x - \chi = 0$ von der oben angezeigten Eigenschaft so bestimmen, dass sie auch ihr als Integrale zugehören. Daher ist, wie kurz vorher gesagt, die Gleichung $\psi = 0$ durch die genannten Bedingungen vollständig bestimmt.

4. Gleichungen $\psi \equiv x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$ dieses Charakters bilden eben die Gesammtheit aller Integrale einer partiellen Differentialgleichung 2. O. Im Bd. XVII d. A. habe ich erklärt, wie man diese Gleichung aufzustellen hat, und ausserdem die Existenz von intermediären Integralen, jedes ausgedrückt durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O., nachgewiesen. In dieser Nr. behandle ich den Fall eines ersten Integrals, ausgedrückt durch eine partielle Differentialgleichung 1. O. $\Omega = 0$, dieser linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ.

Betrachten wir zunächst eine einfach unendliche Schaar von Lösungen $\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda) = 0$*) der partiellen Differentialgleichung 1. O. $\Omega = 0$. Ihr Umhüllungsgebilde heisse $\Psi = 0$. Diese Gleichung ist auch eine Lösung von $\Omega = 0$, und hat daher, wie eine jede Lösung dieser Gleichung, ∞^3 Integral-M_2^0 gemeinsam mit (1). Auf irgend einer M_2^0, die (1) und der Gleichung $\psi^0 \equiv \psi(x, y, p, q, p' q', \lambda^0) = 0$ als Integral genügt, wird durch die Gleichung $\psi^{(1)} \equiv \psi^0 + d\lambda \psi'(\lambda^0) = 0$ ein Streifen ausgeschieden. Derselbe gehört auch der Gleichung $\Psi = 0$ zu, weil diese die Gleichungen $\psi(\lambda) = 0$ umhüllt. Es sind für die Elemente**) des Streifens

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial q'},$$

bez. proportional

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial q'}.$$

Daher werden durch $\Psi = 0$ in Verein mit (1) bestimmte Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t') den Elementen des Streifens zugeordnet, und zwar dieselben wie durch $\psi^0 = 0$ in Verein mit (1). Folglich muss durch den genannten Streifen eine für (1) und für $\Psi = 0$ (d. A. Bd. XVII, Nr. 6., 7.) gemeinsame Integral-M_2^0 sich hindurchlegen lassen. Dies muss eine andere M_2^0 sein als die vorhin betrachtete, weil sonst $\Psi = 0$ dieselben ∞^3 Integral-M_2^0 gemeinsam mit (1) haben würde als $\psi^0 = 0$. Indem wir eine andere Schaar von ∞^1 Lösungen $\psi = 0$, welche die nämlichen zwei Gleichungen $\psi^0 = 0$, $\psi^{(1)} = 0$ enthalten, herausnehmen, finden wir eine andere Lösung $\Psi' = 0$ als Umhüllungsgebilde der Letzteren. So finden wir auch eine neue, eine dritte Integral-M_2^0 von (1), — nämlich eine für (1) und $\Psi' = 0$ gemeinsame Integral-M_2^0, — die durch den betrachteten Streifen hindurchgeht. In dieser Weise erkennen wir, dass durch jenen Streifen ∞^∞ Integral-M_2^0 von (1) hindurchgehen, *und der Streifen ist somit* (*Nr.* 2.) *eine Charakteristik von* (1)***).

---

*) Die Grössen z, z' sollen vermittelst (1) herauseliminirt gedacht werden.

**) Ich bezeichne kurz die M_2^0-Elemente $(zz'xypqp'q')$ (d. A. Bd. XVII, p. 287), die an eine M_1^0 sich anschliessen, als Elemente eines an diese M_1^0 sich schliessenden Streifens.

***) Weiter sehen wir Folgendes. Weil der nun betrachtete Streifen eine Charakteristik von (1) ist, so müssen die ersten Derivirten von (1) befriedigt werden von ∞^1 der Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t'), die durch die Gleichungen des Streifens: $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, $dp' = r'\,dx + s'\,dy$, $dq' = s'\,dx + t'\,dy$ den Elementen desselben zugeordnet werden, nämlich von dem durch die zwei ersten Gleichungen bestimmten Büschel von (r, s, t), vereint mit den, den einzelnen Werthsystemen (r, s, t) dieses Büschels, eindeutig, vermittelst der Derivirten der Gleichungen (1), die auf Grund von $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ auf drei von einander unabhängige Gleichungen sich reduciren, entsprechenden

Eine vollständige Lösung von $\Omega = 0$ hat fünf arbiträre Constanten. Sie ist also von der Form:

$$\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5) = 0,$$

und kann insbesondere linear in Bezug auf die λ sein, wenn $\Omega = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung 1. O. ist. Ich betrachte jetzt eine in der hingeschriebenen vollständigen Lösung enthaltene Gleichung: $\psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0$, nebst allen ∞^3 ihr unendlich benachbarten Gleichungen derselben Schaar, die ein und dasselbe Element $(xypqp'q')$ enthalten:

$$\text{(c)} \quad \psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) + d\lambda_1 \psi'(\lambda_1^0) + d\lambda_2 \psi'(\lambda_2^0) + \cdots + d\lambda_5 \psi'(\lambda_5^0) = 0,$$

und daneben eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0$, die ebenfalls dasselbe Element $(xypqp'q')$ besitzt. Nach dem eben Auseinandergesetzten muss ein jeder Schnitt zwischen dieser Integral-M_2^0 und irgend einer Gleichung (c) eine Charakteristik von (1) bilden. Vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ gehen nur zwei Streifen aus, die auf der Integral-M_2^0 verlaufen und den Gleichungen (1) als Charakteristiken zugehören. (Nr. 2.) Sämmtliche Gleichungen (c) müssen dieselbe Charakteristik ergeben; denn, wenn zwei dieser Gleichungen, etwa:

$$\begin{aligned} &\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) + d\lambda_1^0 \psi'(\lambda_1^0) + \cdots + d\lambda_5^0 \psi'(\lambda_5^0) = 0, \\ &\psi(\qquad\qquad) + d\lambda_1' \psi'(\quad) + \cdots + d\lambda_5' \psi'(\quad) = 0, \end{aligned}$$

verschiedene Charakteristiken lieferten, so müsste die Gleichung:

$$\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) + \frac{d\lambda_1^0 + \mu d\lambda_1'}{1+\mu} \psi'(\lambda_1^0) + \cdots + \frac{d\lambda_5^0 + \mu d\lambda_5'}{1+\mu} \psi'(\lambda_5^0) = 0$$

einen dritten derartigen Streifen ergeben, und also würden von $(zz'xypqp'q')$, — den ∞^1 Werthen von μ entsprechend, — ∞^1 Streifen

---

Werthsystemen von (r', s', t'). Die Elemente $(zz'xypqp'q')$ des Streifens gehören der Gleichung $\psi^{(1)} = 0$ zu, und es genügt daher, eine der Gleichungen

$$\frac{d\psi^{(1)}}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi^{(1)}}{dy} = 0,$$

— in denen für r', s', t' ihre eben erwähnten, durch die ersten Derivirten von (1) gelieferten Werthe in r, s, t eingeführt werden, — anzuwenden, um ein Werthsystem von (r, s, t, r', s', t') zu erhalten, das den Gleichungen (1) und $\psi^{(1)} = 0$ gleichzeitig genügt. Aber dann muss nach Nr. 6., 7. d. A., Bd. XVII eine Integral-M_2^0 von (1) und $\psi^{(1)} = 0$ sich durch jenen Streifen hindurchlegen lassen. Indem wir in gleicher Weise mit den anderen Gleichungen der ersten (beliebig herausgewählten) einfach unendlichen Schaar von Lösungen

$$\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda) = 0$$

verfahren, schliessen wir, dass die oben erwähnte Integral-M_2^0 von $\Psi = 0$ ein osculatorisches Umhüllungsgebilde von ∞^1 Integral-M_2^0 der ∞^1 von $\Psi = 0$ umhüllten Lösungen $\psi(\lambda) = 0$ bilden müsste.

ausgehen, die sämmtlich auf derselben Integral-M_2^0 verliefen und Charakteristiken von (1) wären, was für ein beliebiges Element $(zz'xypqp'q')$ von (1) unmöglich ist*). Also schliesslich: durch die Gleichungen:

$$\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0, \quad \psi'(\lambda_1^0)d\lambda_1 + \psi'(\lambda_2^0)d\lambda_2 + \cdots + \psi'(\lambda_5^0)\,d\lambda_5 = 0,$$

wo drei der Verhältnisse $\frac{d\lambda_1}{d\lambda_5}, \frac{d\lambda_2}{d\lambda_5}, \frac{d\lambda_3}{d\lambda_5}, \frac{d\lambda_4}{d\lambda_5}$ arbiträr sind, wird eine und dieselbe Charakteristik von (1) ausgedrückt. Oder, da die genannten Gleichungen eine Charakteristik von $\Omega = 0$ definiren, *die Charakteristiken von $\Omega = 0$ werden jetzt Charakteristiken von* (1).

Hieraus folgt weiter, dass vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) nur *eine* für $\Omega = 0$ charakteristische Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$ ausgeht. Denn, betrachten wir irgend ein Integral $\psi^0 = 0$ von $\Omega = 0$, eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi^0 = 0$ und irgend einen Streifen dieser Integral-M_2^0, der keine Charakteristik von (1) bildet. Durch diesen Streifen können wir ∞^∞ andere Lösungen $\psi' = 0$ von $\Omega = 0$ legen. Der Schnitt zwischen jener M_2^0 und irgend einer zu $\psi^0 = 0$ unendlich benachbarten der Lösungen $\psi' = 0$ muss, nach dem Vorangehenden, ganz aus Charakteristiken von (1) und von $\Omega = 0$ bestehen. In demselben Schnitte ist auch der genannte Streifen einbegriffen. Er ist aber kein charakteristischer Streifen für das Gleichungssystem (1). Darum müssen alle die durch die Elemente $(zz'xypqp'q')$ des Streifens hindurchgehenden Charakteristiken von $\Omega = 0$, die auf der M_2^0 liegen, der letztgenannten Gleichung $\psi' = 0$ und sonach allen jenen Gleichungen $\psi' = 0$ zu gleicher Zeit zugehören. Wir betrachten weiter irgend ein Element $(zz'xypqp'q')$ des Streifens, und eine Lösung $\psi'' = 0$, die dieses Element, aber keine anderen Elemente des Streifens enthält, und die zu $\psi^0 = 0$ unendlich benachbart ist. Auch $\psi'' = 0$ muss die von $(zz'xypqp'q')$ ausgehende Charakteristik von $\Omega = 0$, die auf der M_2^0 verläuft, enthalten. Durch jene Charakteristik von ($\Omega = 0$ und) (1) geht eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi'' = 0$**). Indem wir von dieser M_2^0 in derselben Weise räsonniren wie von der vorigen, sehen wir, dass alle Lösungen $\psi = 0$ von $\Omega = 0$, die das nämliche Element $(zz'xypqp'q')$ besitzen, eine und dieselbe Charakteristik von (1) und $\Omega = 0$ gemeinsam enthalten. *Wir finden also zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von* (1) *nur eine einzige Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$, die eine für* [(1) *und*] *$\Omega = 0$ charakteristische Reihe wird.*

---

*) Ich sehe nämlich von den Fällen ab, wo in den Gleichungen (1) $f = F(z, z', x, y, \varphi)$ ist, oder wo in den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ zu gleicher Zeit p, q oder p', q' fehlen.

**) Siehe den Anfang der dritten Note dieser Nummer.

Ich habe von dem Falle absehen können, dass durch das Element $(zz'xypqp'q')$ unendlich viele Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi^0 = 0$ hindurchgehen. Denn dies kann nicht für ein beliebiges Element von (1) und ein beliebiges Integral $\psi^0 = 0$ von $\Omega = 0$ eintreffen. Diejenigen Gleichungen $\psi = 0$ nämlich, die zu einem besonderen Systeme (1) in einer solchen Beziehung stehen würden, dass zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) und von $\psi = 0$ ∞^1 Werthe von r, s, t zugehören, werden *wenigstens zwei* partielle Differentialgleichungen 1. O. befriedigen.

Wenn aber die von irgend einem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) ausgehenden charakteristischen Streifen von $\Omega = 0$ an eine und dieselbe einfache Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$ sich anschliessen, die also bestimmt ist durch fünf Gleichungen zwischen

$$z, z', x, y, p, q, p', q' : \psi = C, \quad \psi' = C', \cdots, \psi^{IV} = C^{IV},$$

so ist jene Gleichung $\Omega = 0$ *eine lineare partielle Differentialgleichung* 1. *O.* Alsdann kann man durch eine beliebige vierfach unendliche Mannigfaltigkeit, dargestellt durch (1) und durch

$$F(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \quad \Phi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0,$$

ein ganz bestimmtes Integral: Funct. $(\psi, \psi', \cdots, \psi^{IV}) = 0$ von $\Omega = 0$ legen. Gelten nun für die vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ ausgehende, für (1) und für $\Omega = 0$ gemeinsame Charakteristik die Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$, $r' = as + b$, $s' = a's + b'$, $t' = a''s + b''$, so haben wir, indem wir für r, s, t, r', s', t' diese Werthe und für $dz, dz', dp, \cdots, dq'$ die Werthe: $dz = p\,dx + q\,dy$, $dz' = p'dx + q'dy$, $dp = r\,dx + s\,dy$, $\cdots$, $dq' = s'dx + t'dy$ in die Gleichungen $dF = 0$, $d\Phi = 0$ einführen, ganz bestimmte Werthe von $r, s, \cdots, t'$, $dy : dx$. Die Differentiale von (1) sind, wegen der obigen Werthe von $r, s, \cdots, t'$, von selbst erfüllt. Mit Anwendung der jetzt erhaltenen Werthe von $r, s, \cdots, t'$, $dy : dx$ bestimmt man zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ unserer vierfachen Mannigfaltigkeit: (1) und $F = 0$, $\Phi = 0$, einen gewissen Integralstreifen von (1), dessen sämmtliche Elemente der genannten vierfachen Mannigfaltigkeit zugehören. So dass diese vierfache Mannigfaltigkeit in eine völlig bestimmte Schaar von ∞^3 Integralstreifen von (1) sich zerlegen lässt. Die ∞^3 Integral-M_2^0 von (1), die nach der 1. Nr. durch diese Streifen hindurchgehen, befriedigen auch die Gleichung: Funct. $(\psi, \psi', \cdots, \psi^{IV}) = 0$, von der vorausgesetzt war, dass sie ein Integral von $\Omega = 0$ ist, und sie sind alle von Charakteristiken von $\Omega = 0$ erzeugt.

Wir erkennen an einem Beispiele die Möglichkeit eines solchen, *durch eine lineare partielle Differentialgleichung* 1. *O. ausgedrückten*, ersten Integrals der partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ. Eine partielle Differentialgleichung 2. O. in R_3 von der Form:

$$F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$$

ist ein specieller Fall eines Gleichungssystems (1) (d. A., Bd. XVII, Nr. 32). Wenn sie zu einer Gleichung 3. O. in einer solchen Beziehung steht, dass zu jedem Elemente $(xypqrst)$ der Gleichung 2. O. eine für diese Gleichung und die Gleichung 3. O. gemeinsame Charakteristik existirt, so bilden diese Charakteristiken ein System von genau der Eigenschaft des obigen Systems Charakteristiken von $\Omega = 0$. Diejenigen Gleichungen der 2. und 3. O., die aus einem Gleichungspaare $f_1(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, $f_2(x, y, p, q, r, s, t) = 0$ mit gemeinsamen Charakteristiken und ∞^∞ gemeinsamen Integralflächen vermittelst einer Flächentransformation:

$$X = F_1(x, y, p, q, r, s, t), \quad Y = F_2(x, y, p, q, r, s, t),$$
$$P = \Phi_1(x, y, p, q, r, s, t), \quad Q = \Phi_2(x, y, p, q, r, s, t)$$

hergeleitet werden (siehe d. A., Bd. XIII, p. 76), bilden ein specielles System dieser Art.

5. Wie beschaffen ist das Bild im Raume (xyz) der Gleichung $\Omega = 0$? Durch $\Omega = 0$ soll jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) eine Charakteristik zugeordnet werden, also auch, wie früher bemerkt, demselben Elemente eine bestimmte einfach unendliche Schaar (Büschel) von Werthen von (r, s, t, r', s', t'). Durch die Gleichungen (1) werden p', q' bestimmt in Function von z', z, x, y, p, q. Also wird, vermittelst $\Omega = 0$, jedem Flächenelemente $(zxypq)$ eine Schaar von einfach unendlich vielen, den Werthen von z' entsprechenden, einfachen Büscheln von (r, s, t) zugeordnet. Die Gesammtheit aller dieser, auf den ∞^5 Flächenelementen des Raumes (xyz) befindlichen Werthschaaren von (r, s, t) wird durch eine Gleichung $F(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ repräsentirt. Sie stellt, wenn r, s, t als Punktcoordinaten eines Raumes R' gedeutet werden, eine Linienfläche in diesem Raume dar. Sie wird nun das Bild von $\Omega = 0$.

Diese partielle Differentialgleichung 2. O. $F = 0$ muss überdies mit den zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 3. O., für welche die einen Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen von (1) gemeinsame Integrale werden, ∞^∞ Integralflächen gemein haben, in der Art, dass von jedem Flächenelemente ∞^1 für alle drei Gleichungen gemeinsame Charakteristiken ausgehen. Wenn zwei Elemente $(zxypqrst)$ zweier unendlich benachbarter Charakteristiken vereinigt liegen, liegen diese letzteren selbst in ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt.

6. Die Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen von (1) brauchen nicht immer ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. zu bilden. Wenn z. B. in den beiden Gleichungen (1) die Grösse z' fehlt, so stellen die Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O.

$[f\varphi]_{z'xp'} = 0$, aus welcher man sich p', q' vermittelst (1) eliminirt zu denken hat, eben jene Theile von Lösungen von (1) dar. Zu jedem Integrale $z = F(x, y)$ hat man jetzt ∞^1 entsprechende Functionen $z' : \int (p'dx + q'dy) = z'$.

Wenn sowohl z' als z in beiden Gleichungen (1) fehlen, werden sowohl die Theile $z = F(x, y)$ als die Theile $z' = \Phi(x, y)$ der Lösungen von (1) Integrale von partiellen Differentialgleichungen 2. O., nämlich von den Gleichungen: $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$, $[f\varphi]_{zxp} = 0$, — aus der ersten p', q', aus der zweiten p, q vermittelst (1) eliminirt. Eine jede Lösung von (1) hat alsdann die Form: $z = F(x, y) +$ eine arb. Const., $z' = \Phi(x, y) +$ eine arb. Const.

§ 2.

Von der durch die zwei Gleichungen (1) begründeten Transformation gewisser Flächenschaaren.

7. Jede der zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, die eine Lösung von (1) bilden, wird im Allgemeinen durch zwei lineare partielle Differentialgleichungen 3. O. dargestellt. Die beiden Gleichungen einer Lösung repräsentiren zwei Flächen resp. der Räume (xyz), (xyz'). Zwischen ihnen besteht ein eindeutiges Entsprechen (d. A. Bd. XVII, Nr. 22.), und noch mehr, es besteht zwischen den Elementen $(zxypqrst)$, $(z'xyp'q'r's't')$ der beiden einander entsprechenden Flächen ein eindeutiges Entsprechen, nämlich so, dass jedem Werthsysteme von (z, x, y, p, q, r, s, t) dasjenige Werthsystem von $(z', x, y, p', q', r', s', t')$ entspricht, das durch Elimination aus (1), $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ und irgend drei der Gleichungen: $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ resultirt. Es existirt folglich jetzt eine Transformation vom Raume (xyz) zum Raume (xyz'), die für alle Integralflächen eines gewissen Paares linearer partieller Differentialgleichungen 3. O. eine Flächentransformation ist, und bei der ausserdem die Berührung 2. O. erhalten bleibt. Dass es keine specielle Berührungstransformation der 2. O. giebt, die für den ganzen Raum (xyz) eine Flächentransformation ist, habe ich im IX. Bd. d. A.*) bewiesen; ich habe auch daselbst angemerkt, dass es keine derartige Transformation giebt, die alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung**) wiederum in Flächen überführt, und für den Fall einer partiellen Differentialgleichung 2. O. den Grund hierfür nachgewiesen (a. a. O. p. 312, Nr. 10.). Dass aber für Systeme mehrerer Differentialgleichungen derartige Transformationen

---

*) Siehe auch d. A., Bd. XI, p. 213.

**) D. A., Bd. IX, p. 306. — (Betreffend die Transformationen der partiellen Differentialgleichungen 1. O. siehe besonders § 5. der citirten Abh.) — Für Räume stattfinden können, haben wir jetzt gesehen. Ich will nun versuchen, diesen Umstand ausführlich zu erklären.

Betrachten wir erstens *eine* partielle Differentialgleichung der m. O. $F=0$, und nehmen wir an, dass es eine Transformation giebt, welche die Integralflächen derselben wiederum in Flächen, insbesondere Integralflächen, die in einem Punkte eine Berührung von der m. O. eingehen, wiederum in Flächen mit Berührung von der m. O. überführt, so sehen wir Folgendes: Wenn C eine beliebige Integralfläche und p irgend einen Punkt derselben bedeutet, und man bezeichnet mit p_1, p_2 die Werthe der ersten, mit $p_{k_1 k_2}$ diejenigen der zweiten, $\cdots$ mit $p_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ $(k_1, k_2, \cdots, k_n = 1$ oder $2)$ diejenigen der n^{ten} Differentialquotienten von z, die C im Punkte p zugehören, so hat man ein Werthsystem von $p_{k_1 k_2 \ldots k_{m+1}}$ bestimmt durch die $m+3$ Gleichungen

$$\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m} = p_{k_1 h_2 \ldots k_m 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}\, dy, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

wenn man mit $p_{k_1 k_2 \ldots k_m} + \delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ die Werthe der m^{ten} Differentialquotienten von z bezeichnet, die im Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ einer Integralfläche C' zugehören, die zu C unendlich benachbart ist und mit ihr in dem genannten Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ eine Berührung von der $m-1$. O. hat. Dieses Werthsystem von $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z gehört einer Integralfläche C'' von $F=0$ an, die

---

von zwei Dimensionen gestaltet sich die Sache anders. Betrachten wir zum Beispiel das Gleichungssystem (d. A., Bd. XVII, p. 297):

$$f_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right) = 0, \quad \varphi_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right) = 0.$$

Indem wir aus diesen Gleichungen und der Gleichung $[f_0 \varphi_0]_{zx\frac{dz}{dx}} = 0$ die Grössen $z, \frac{dz}{dx}$ eliminiren, bekommen wir eine Gleichung 2. O. für z'. Eine zweite Gleichung 2. O., eine Gleichung für z, erhalten wir aus $[f_0 \varphi_0]_{z'x\frac{dz'}{dx}} = 0$ durch Elimination von $z', \frac{dz'}{dx}$ vermittelst $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Zwischen je zwei Integralcurven derselben Gleichungen: $z' = \Phi(x)$, $z = F(x)$, die zusammen eine Lösung von $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ bilden, besteht ein eindeutiges Entsprechen, und dies ist besonders mit den Elementen $\left(z'x\frac{dz'}{dx}\right)$, $\left(zx\frac{dz}{dx}\right)$ der beiden Gleichungen 2. O. der Fall. Hier existirt also eine Transformation, die keine Transformation von beliebigen Curven der Ebene (zx) wiederum in Curven ist, die aber alle Integralcurven der einen der genannten Gleichungen 2. O. eindeutig in die Integralcurven der anderen Gleichung 2. O. überführt. (Vgl. d. A., Bd. IX, p. 300.) Sie ist aber eigentlich nicht als Berührungstransformation zu charakterisiren, da sie nur die ∞^2 Integralcurven der Gleichungen 2. O. betrifft, von denen im Allgemeinen keine zwei sich berühren.

mit C im Punkte p und mit C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ eine Berührung von der m. O. besitzt. Nun führt die angenommene Transformation unsere drei Flächen C, C', C'' über in drei Flächen Γ, Γ', Γ'', von denen die letzte mit den zwei ersten, einander unendlich benachbarten Flächen Γ, Γ' in zwei unendlich benachbarten Punkten eine Berührung von der m. O. eingeht. Jene zwei unendlich benachbarte Flächen Γ, Γ' müssen aber dann eine Berührung von der $m - 1$. O. mit einander eingehen, so dass die angenommene Transformation je zwei unendlich benachbarte Integralflächen C, C' von $F = 0$, die eine Berührung von der $m - 1$. O. mit einander haben, in zwei ähnliche Flächen Γ, Γ' umformt.

Nun kann man zwei Integralflächen von $F = 0$ construiren, die einander unendlich benachbart von der 2. O. sind und Berührung von der $m - 2$. O. mit einander haben, und sodann eine dritte Integralfläche, die jenen beiden unendlich benachbart von der ersten Ordnung ist und mit ihnen in zwei unendlich benachbarten Punkten eine Berührung von der $m - 1$. O. eingeht. Dies liegt darin, dass die Gleichungen: $\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} = p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 2}\, dy$, $F = 0$ für alle unendlich kleinen Werthe von $\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}$ durch Werthe von $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ befriedigt werden können. Nach der eben gemachten Bemerkung werden diese drei Flächen in drei neue derartige Flächen verwandelt. Also muss unsere Transformation je zwei Integralflächen, die einander unendlich benachbart von der 2. O. sind und in einem Punkte Berührung von der $m - 2$. O. besitzen, in zwei ähnliche Flächen verwandeln. Indem wir dasselbe Räsonnement weiter verfolgen, kommen wir schliesslich zu dem Satze, dass je zwei Integralflächen von $F = 0$, die eine Berührung von der 1. O. besitzen und unendlich benachbart von der $m - 1$. O. sind, vermittelst der genannten Transformation in eben derartige Flächen umgeformt werden.

Aber im IX. B. d. A. habe ich bewiesen, dass, wenn von den Flächen eines unendlichen Systems, das den ganzen Raum wenigstens viermal erfüllt, je zwei, die einander unendlich benachbart sind und eine Berührung von der ersten Ordnung eingehen, durch eine Transformation in ähnliche Flächen verwandelt werden, die Transformation eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation ist, die für den ganzen Raum eine Flächentransformation wird.*) Zwar habe ich nicht besonders hervorgehoben, dass, wenn die sich berührenden Flächen unendlich benachbart von der r. O. sind, man durch meinen Beweis in erster Hand zu Paaren von Flächen gelangt, die unendlich benachbart von der $r - 1$. O. sind und sich berühren, und dass man sodann von den letzteren Paaren Paare von Flächen bekommt, die unendlich benachbart von der $r - 2$. O. sind und sich berühren, u. s. w.; — aber dies erhellt von selbst, wenn man (d. A. Bd. IX, p. 310) statt Flächensysteme, die den ganzen Raum erfüllen, Systeme von Flächen betrachtet, die alle einander unendlich benachbart sind.

---

*) Ich nehme die Gelegenheit wahr, eine Lücke in dem p. 311, Bd. IX d. A. geführten Räsonnement auszufüllen. Es wird dort bewiesen, dass die beiden Flächenschaaren $f(z, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}) = 0$, $\varphi(z', x', \ldots, x'_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}) = 0$, die in der Art einander zugeordnet sind, dass je zwei Flächen $f(\lambda) = 0$, $f(\lambda + d\lambda) = 0$, die sich berühren, zwei ebenfalls sich berührende Flächen $\varphi(\lambda) = 0$, $\varphi(\lambda + d\lambda) = 0$ entsprechen, vollständige Lösungen (jetzt z, x, z', x' arbiträre Constanten) einer

Die angenommene Transformation der partiellen Differentialgleichung m. O. $F = 0$ kann deshalb nichts Anderes sein als eine gewöhnliche Berührungstransformation, die alle Flächen des Raumes umfasst und bei der schon Berührung von der 1. O. invariant bleibt.

8. Betrachten wir aber ein System von *zwei* partiellen Differentialgleichungen der m. O. $F = 0$, $\Phi = 0$, deren erste Derivirte auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen sich reduciren, und nehmen wir an, dass eine Transformation existirt, die sämmtliche ∞^∞ gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen in Flächen, insbesondere Integralflächen, die eine Berührung von der m. O. haben, in Flächen mit Berührung wiederum von der m. O. überführt, so finden wir erstens, dass wenn C eine Integralfläche bedeutet, (x, y) einen Punkt derselben, und C' eine Integralfläche, die zu C unendlich benachbart ist und mit ihr im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ eine Berührung von der $m - 1$. O. eingeht, man immer Werthe von $p_{k_1 k_2 \ldots k_{m+1}}$ bestimmen kann, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

---

und derselben partiellen Differentialgleichung 1. O. $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}, \pi_1, \ldots, \pi_{n+1}) = 0$ sind. Daraus wird weiter gefolgert, dass irgend zwei Flächen $f = 0$, die sich berühren, zwei Flächen $\varphi = 0$, die sich berühren, entsprechen müssen. Um aber hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Flächen $f = 0$, $\varphi = 0$ in der Weise, wie dies durch eine gewöhnliche Berührungstransformation geschieht, auf einander bezogen sein müssen, ist es vielleicht am einfachsten, folgende Ueberlegung anzustellen. Einer *beliebigen* Gleichung $U(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$ entspricht eine gewisse Integral-M_{n+1} von $\Phi = 0$, erzeugt von ∞^n Charakteristiken dieser Gleichung. Dieselbe M_{n+1} ist ein Umhüllungsgebilde von ∞^n Integralen $\varphi = 0$. Die Werthe der für sie geltenden Constanten (z', x') sind bestimmt durch eine Gleichung $V(z', x_1', \ldots, x_n') = 0$. Die Flächenelemente $(z\,x\,p)$, $(z'\,x'\,p')$ von $U = 0$, $V = 0$ entsprechen einander eindeutig, nach dem was vorher bewiesen wurde, und deshalb müssen *je zwei* vereinigt liegenden Flächenelementen $(z\,x\,p)$ zwei ebenfalls vereinigt liegende Flächenelemente $(z'\,x'\,p')$ entsprechen. Deswegen u. s. w.

[Ich hatte früher, statt dieses Räsonnements, ein anderes, das dem auf p. 300 der citirten Abhandlung geführten völlig ähnlich ist, angewandt. Wenn man nämlich eine (beliebige) Fläche in $(z\,x)$ als Umhüllungsgebilde aller derjenigen Schaaren von Flächen $f = 0$ betrachtet, die sie stationär berühren, so ist leicht ersichtlich, dass die entsprechenden Flächen $\varphi = 0$ eine Fläche in $(z'\,x')$ umhüllen, deren Flächenelemente den Flächenelementen der Fläche in $(z\,x)$ entsprechen.]

$$\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m} = p_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}\, dy,$$

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0,$$

so oft $p_{k_1 k_2 \ldots k_m} + \delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ die der Integralfläche C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ zugehörigen Werthe der $m$ten Differentialquotienten von z bedeuten, — denn dann ziehen sich die vier letzten der eben aufgeschriebenen Gleichungen zu einer einzigen neuen Gleichung zusammen. Folglich muss auch in diesem Falle unsere Transformation je zwei unendlich benachbarte sich in der $m - 1$. O. berührende Integralflächen C, C' in neue solche Flächen umformen.

Bezeichnen jetzt C, C' zwei unendlich benachbarte Integralflächen, die im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ eine Berührung von der $m - 2$. O. besitzen, so muss man, wenn eine dritte Integralfläche existiren soll, die C im Punkte (x, y) und C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ in der $m - 1$. O. berührt, Werthe von den $m + 1$ Grössen $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ bestimmen können, die den $m + 2$ Gleichungen: $\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} = p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 2}\, dy$, $F = 0$, $\Phi = 0$ genügen. Aber für allgemeine Werthe von δp, dx, dy ist das unmöglich. Nun kann es geschehen, wie im Falle einer gemeinsamen *ersten* Integralschaar (mit einer arbiträren Constanten) von $F = 0$, $\Phi = 0$, dass eine vollständige Schaar von Integralflächen in solche ∞^1 Gruppen von Flächen sich spalten lässt, dass die δp, die einer Integralfläche C' zugehören, welche in derselben Gruppe wie C enthalten ist, die durch Elimination von $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ aus den oben aufgeschriebenen Gleichungen resultirende Relation befriedigen. Dann führt unsere Transformation je zwei Integralflächen einer und derselben Gruppe, die unendlich benachbart von der 2. O. sind und mit einander eine Berührung von der $m - 2$. O. haben, in zwei Flächen mit Berührung ebenfalls von der $m - 2$. O. über. Aber eine solche Vertheilung der Flächen einer vollständigen Integralschaar findet nicht nothwendig für alle solche Systeme wie das von $F = 0$, $\Phi = 0$ gebildete statt. Demnach braucht unsere Transformation nicht nothwendig die zwei vereinigt liegenden Elemente $(zxyp_1 \ldots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}})$, $(z + dz_1 \ldots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} + \delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}})$ von C in (x, y) resp. C' in $(x + dx,\ y + dy)$*) in ebenfalls vereinigt liegende derartige Elemente zu überführen**). Unsere Transformation braucht daher um so weniger eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation zu sein.

---

*) Diese Elemente liegen vereinigt, weil sie auf einer und derselben Fläche, wenn auch nicht auf einer Integralfläche, construirt werden können.

**) Dass es auch im Allgemeinen keine Integralfläche giebt, die mit C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ und mit C in irgend einem Punkte $(x + d'x,\ y + d'y)$

Die Zahl der arbiträren Constanten einer vollständigen Lösung des Systemes $F = 0$, $\Phi = 0$ muss auf eine Zahl reducirt werden können, die kleiner ist als die Zahl der ersten, zweiten, … bis $m - 1$sten Differentialquotienten von z, vermehrt um 2; denn es gilt folgender Satz: *Wenn von den Flächen zweier k-fach unendlicher Systeme je zwei Flächen des einen Systems, die einander unendlich benachbart sind*

Berührung von der $m-1$. O. besitzt, erläutern wir am besten durch ein Beispiel. Seien zwei lineare partielle Differentialgleichungen 3. O. vorgelegt, deren erste Derivirte zu drei von einander unabhängigen Gleichungen sich zusammenziehen, in welchem Falle die vorgelegten Gleichungen sich nothwendig auf die folgende Form bringen lassen müssen:

$$u + Bv + Cw + E = 0,$$
$$v + Bw + C\varpi + E' = 0,$$

(wo B, C, E, E' Functionen von z, x, y, p, q, r, s, t sind)

so ist die Bedingung dafür, dass die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta r &= u\,dx + v\,dy, \\ \delta s &= v\,dx + w\,dy, \\ \delta t &= w\,dx + \varpi\,dy, \\ u + Bv + Cw + E &= 0, \\ v + Bw + C\varpi + E' &= 0 \end{aligned}$$

zusammen bestehen, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \delta r - dr & dx & dy & 0 & 0 \\ \delta s - ds & 0 & dx & dy & 0 \\ \delta t - dt & 0 & 0 & dx & dy \\ 0 & 1 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

wenn dr, ds, dt irgend welche für das Stattfinden jener Gleichungen mögliche Werthe von δr, δs, δt bedeuten. Nach Wegschaffung eines gemeinsamen Factors $C\,dx^2 - B\,dx\,dy + dy^2$ nimmt aber jene Bedingungsgleichung die einfache Gestalt an:

$$\delta r - dr + B(\delta s - ds) + C(\delta t - dt) = 0,$$

welche Gleichung unabhängig ist von dx, dy.

Dies beweist, dass, wenn C, C' zwei unendlich benachbarte Integralflächen sind, die sich im Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ berühren, und $(r+dr,\ s+ds,\ t+dt)$ die der Fläche C zugehörigen zweiten Differentialquotienten von z in jenem Punkte, $(r + \delta r,\ s + \delta s,\ t + \delta t)$ die der Fläche C' zugehörigen in demselben Punkte bedeuten, nur für specielle Flächen C' der fraglichen Relation genügt werden kann. Hieraus folgt weiter, dass es im Allgemeinen keine Integralfläche giebt, die mit C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ und mit C in irgend einem unendlich benachbarten Punkte eine Berührung von der 2. O. hat. Irgend zwei unendlich benachbarte Integralflächen C, C', die sich berühren, werden daher von einer Berührungstransformation 2. O., welche die Integralflächen der partiellen Gleichungen 3. O. betrifft, im Allgemeinen nicht wiederum in sich berührende Flächen verwandelt.

und eine Berührung der r. O. mit einander eingehen ($k = 2 +$ *der Anzahl der ersten, zweiten, ... bis r-ten Differentialquotienten von* z), *durch irgend eine Transformation in zwei Flächen von eben derselben Beschaffenheit des anderen Systems umgeformt werden, so ist sicher die Transformation eine gewöhnliche* (*Lie'sche*) *Berührungstransformation.* — Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem Beweise des oben citirten Satzes im IX. B. d. A. p. 311 zu führen.

Ziehen wir besonders den Fall der zwei Gleichungen 3. O.:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0$$

[d. A. B. XVII, p. 290] in Betracht. Wir haben, wie oben angemerkt, eine Transformation, bei der Berührung 2. O. erhalten bleibt, und welche die Integralflächen der Gleichungen wiederum in Flächen überführt. Nun ist diese Transformation durch die Gleichungen: $x' = x$, $y' = y$ zusammen mit den Gleichungen: $z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$, $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$ einer Lösung von (1) vollständig bestimmt. Aber jene zwei vierfach unendlichen Flächenschaaren sind allgemeiner Art, und zwei sich berührende Flächen der Schaar: $z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechen demnach nicht zwei sich berührenden Flächen der anderen Schaar, wie es sein müsste, wenn die Transformation eine Berührungstransformation wäre.

9. Nunmehr erledigt sich leicht die Frage, ob es möglich ist, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen der 3. O.

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0$$

ein gemeinsames erstes Integral mit einer arbiträren Constanten zulassen. Sollte dies eintreffen, so müsste die vorhandene Transformation zwischen jenen Gleichungen und den zwei:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0,$$

nach dem eben Auseinandergesetzten, eine solche sein, die je zwei unendlich benachbarte sich berührende gemeinsame Integralflächen eines der ersten Integrale der zwei ersten Gleichungen in zwei einander berührende gemeinsame Integralflächen der zwei letzten verwandelte. Oder es müssten auch die letzteren Gleichungen ein gemeinsames erstes Integral mit einer arbiträren Constanten, entsprechend dem vorher für die zwei ersteren Gleichungen angenommenen derartigen Integrale, besitzen, also müsste die in Frage stehende Transformation eine gewöhnliche Berührungstransformation sein. Nun lauten zwei der für diese Transformation geltenden Gleichungen so: $x' = x$, $y' = y$, und es muss demnach eine dritte Gleichung der Transformation von der

Form sein: $z' = F(z, x, y)$. Dies zeigt an, dass die beiden Gleichungen (1) sich jetzt in die Form:

$$f(z', z, x, y) = 0, \quad \varphi(z', z, x, y, p, q, p', q') = 0$$

bringen lassen müssten. Aber dann ist $[f\varphi]_{z'xp'} = \frac{df}{dx}\varphi'(p') + \frac{df}{dy}\varphi'(q')$, und in der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ fehlen also die Grössen r, s, t. Die Gleichungen $\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0$, $\Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0$ können also jetzt zu keinen Gleichungen 3. O. Anlass geben. *Niemals können daher die in Frage gestellten zwei partiellen Differentialgleichungen der 3. O. ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten gemein haben.*

10. Eine eindeutige Transformation zwischen den beiden Räumen (xyz), (xyz') wird nur dann durch die Gleichungen (1) bestimmt, wenn diese auf zwei Paare partieller Differentialgleichungen 3. O. in (xyz) resp. (xyz') führen. Wenn eines der in Nr. 6. betrachteten Systeme (1) vorliegt, gestaltet sich die Transformation anders. Sie kann keine eindeutige Transformation werden, denn entweder führt sie eine jede Integralfläche einer gewissen partiellen Differentialgleichung 2. O. ($[f\varphi]_{z'xp'} = 0$) in eine einfach unendliche Schaar von Integralflächen eines Systems zweier partieller Differentialgleichungen 3. O. $\left(\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \ \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0\right)$, eine jede der letzteren Flächen in eine bestimmte Fläche der ersteren über, oder sie ergiebt zu jeder Integralfläche einer gewissen partiellen Differentialgleichung der 2. O. ($[f\varphi]_{z'xp'} = 0$) ∞^1 entsprechende Integralflächen einer anderen partiellen Differentialgleichung 2. O. ($[f\varphi]_{zxp} = 0$), und vice versa. Man hat nun auch, im Falle dass in den Gleichungen (1) die Variable z' fehlt, für jedes Element $(z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t)$, das der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ genügt, ∞^1 entsprechende Elemente $(z'\,x\,y\,p'\,q')$, jedes mit einem bestimmten Werthsysteme von (r', s', t'); jedem Elemente $(z'xyp'q'r's't')$ entspricht dagegen ein einziges Werthsystem von (z, x, y, p, q, r, s, t) (oder einige Werthsysteme derselben). Im Falle dass in (1) sowohl z' als z fehlen, entsprechen jedem Elemente $(z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t)$ einer partiellen Differentialgleichung 2. O. $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ ∞^1 Elemente $(z'xyp'q'r's't')$ einer anderen partiellen Differentialgleichung der 2. O. $[f\varphi]_{zxp} = 0$, und umgekehrt, jedem Elemente $(z'\,x\,y\,p'\,q'\,r'\,s'\,t')$ der letzteren Gleichung ∞^1 Elemente $(z\,x\,y\,p\,q\,r\,s\,t)$ der ersteren.

Die jetzt von den Gleichungen (1) begründete Transformation ist in dem Bezirke, in dem sie eine Flächentransformation ist, eine mehrdeutige (unendlich-deutige) Flächentransformation. Von einer Verallgemeinerung derselben soll in Nr. 15. gehandelt werden.

§ 3.

Herleitung einiger specieller Systeme von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

11. In der 23. Nr. meiner Abhandlung im XVII. B. d. A. ist die durch drei allgemeine Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

definirte Flächentransformation besprochen worden, und in der 24. Nr. besonders der Fall behandelt, wo die Transformation jeden Streifen einer vorgelegten vierfach unendlichen Schaar in eine einfach unendliche Flächenschaar verwandelt. Es kann aber auch die Transformation so eingerichtet werden, dass sie jeden Integralstreifen des Paares von Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(z, x, y, p, q) = C, \\ \varphi(\qquad\qquad) = C', - \end{cases}$$

wo C, C' arbiträre Constanten bezeichnen, — in eine Flächenschaar umformt. Die Integralstreifen von (4) sind dargestellt durch die Gleichungen:

$$(5) \quad dz - p dx - q dy = 0, \quad \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = 0.$$

Ein beliebiges Flächenelement $(z\,x\,y\,p\,q)$ bestimmt erstens gewisse Werthe von C, C' in (4) und weiter ∞^1 Richtungen $(dy : dx)$, deren jede in Verein mit dem genannten Elemente, auf Grund von (5), einen Büschel von (r, s, t) liefert. Die Gleichungen desselben haben die Form: $r dx + s dy = \mu dx$, $s dx + t dy = \nu dx$, wo μdx, νdx, selbst von dx, dy abhängen. Dieser Büschel giebt zu einem Flächenelemente $(z + p dx + q dy,\ x + dx, \ldots,\ p + \mu dx,\ q + \nu dx)$ Anlass, welches einem von $(zxypq)$ ausgehenden Integralstreifen von (4) zugehört. Führt man jetzt in die Bedingungsgleichung für die Involution der zwei dem Streifen entsprechenden partiellen Differentialgleichungen 1. O. [d. A. Bd. XVII, p. 307, Gl. (19)]:

$$\frac{dF_1}{dx} [F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx} [F_3 F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx} [F_1 F_2]_{z'x'p'} = 0$$

für $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ die Werthe μ, ν, die in Bezug auf $dy : dx$ von der Form sind: $\alpha + \beta \frac{dy}{dx}$, ein, und verlangt, dass dieselbe unabhängig von den besonderen Werthen von $dy : dx$ bestehen soll, so müssen F_1, F_2, F_3 zwei Gleichungen erfüllen. F_1 darf beliebig genommen werden, F_2, F_3

sind dann durch jene zwei Gleichungen zu bestimmen, damit die Transformation (3) alle Integralstreifen des Systems (4), (5) in Flächenschaaren umformt.

Fragen wir, wie die Figur in r' beschaffen ist, die aus jenen Flächenschaaren besteht, so brauchen wir uns nur Folgendes aus Nr. 24. d. A., B. XVII zu vergegenwärtigen. Jedem Elemente $(zxypq)$ entspricht eine Schaar von ∞^1 Streifen in r', die kurz mit S' bezeichnet sein mögen. Ebenso wie von jedem Flächenelemente in r ∞^∞ Integralstreifen von (4) ausgehen, so gehen durch jeden Streifen S' ∞^∞ Flächen unserer Flächenschaaren in r'. Zu jedem Flächenelemente in r gehören ∞^1 Büschel (5) von (r, s, t), die auf ebenso vielen mit dem Elemente vereinigt liegenden Flächenelementen von Integralstreifen von (4) führen. Dementsprechend liegt jeder Streifen S' vereinigt mit ∞^1 anderen solchen Streifen. Bemerken wir weiter, dass jedem Flächenelemente in r' ∞^2 Flächenelemente in r entsprechen, unter denen nur einige gewisse die Gleichungen $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, — wenn C_0, C_0' (irgend welche) bestimmte Werthe der willkürlichen Parameter C, C' in (4) bezeichnen, — befriedigen, so sehen wir ein, dass ∞^2 Streifen S', entsprechend den verschiedenen Werthen von C, C', durch ein beliebiges Element $(z'\,x'\,y'\,p'\,q')$ hindurchgehen. Die Figur, die aus denjenigen Büscheln von $(r'\,s'\,t')$, die diesen S' zugehören, zusammengesetzt ist, wird daher durch zwei Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} F(z', x', y', p', q', r', s', t') = C, \\ \Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = C' \end{cases}$$

ausgedrückt. C, C' sind hier dieselben wie in (4). Weil, wie schon bemerkt, durch jeden Streifen S', der einem Elemente von $f = C_0$, $\varphi = C_0'$ entspricht, ∞^∞ Flächen hindurchgehen, die den Integralstreifen dieser Gleichungen $f = C_0$, $\varphi = C_0'$ entsprechen, und die also Integralflächen unserer Figur (6) sind, so werden jene Streifen S' gemeinsame Charakteristiken der beiden Gleichungen 2. O. in (6).

Wir gewinnen diese Gleichungen (6) einfach so: Durch Differentiirung von (3), z, x, y, p, q dabei als Constanten betrachtet, und durch nachherige Elimination von dx', dy' werden zwei Gleichungen in $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q', r', s', t'$ gewonnen. Indem wir aus diesen zwei Gleichungen, den Gleichungen (3) und (4), z, x, y, p, q eliminiren, bekommen wir die fraglichen Gleichungen (6). *Diese zwei partiellen Differentialgleichungen der 2. O. sind, nach dem eben Auseinandergesetzten, so mit einander verbunden, dass von jedem Elemente* $(z'\,x'\,y'\,p'\,q'\,r'\,s'\,t')$ *ein Streifen ausgeht, der zur selben Zeit eine Charakteristik einer Gleichung* $F = C_0$ *und einer Gleichung* $\Phi = C_0'$ *bildet. Diese Streifen ordnen sich zu* ∞^∞ *gemeinsamen Integralflächen von* $F = C_0$, $\Phi = C_0'$ *zusammen. Von den ersten Derivirten von* F *und* Φ *in Bezug auf*

x', y' ist daher die eine eine algebraische Folge der drei anderen. Noch mehr, jene Charakteristiken, die eben die obigen Streifen S' sind, werden Berührungsstreifen von der 1. O., so dass es ∞^∞ gemeinsame Integral-Flächen zweier Gleichungen $F = C$, $\Phi = C'$ giebt, — wo C, C' ganz beliebige Constanten bedeuten, — die längs eines Streifens S' eine Berührung von der 1. O. besitzen. Die gemeinsamen Integralflächen von $F = C_0$, $\Phi = C_0'$ ordnen sich zu Schaaren von je ∞^1 Flächen zusammen, jede Schaar einem Integralsteifen von $f(z,x,y,p,q) = C_0$, $\varphi(z,x,y,p,q) = C_0'$ entsprechend.

12. Die drei Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} F_1(z,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, z',\, x_1',\, x_2',\, x_3',\, p_1',\, p_2',\, p_3') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

einer Mannigfaltigkeitstransformation eines Raumes von vier Dimensionen können in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass sie eine Transformation begründen, die einen jeden Integralstreifen (Integral-M_1) des Systems:

$$(8)\quad \begin{cases} f(z,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, p_1,\, p_2,\, p_3) = C, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C', \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C'', \\ \chi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C''' \end{cases}$$

in eine für zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. gemeinsame zweifach unendliche Integralschaar verwandelt. Denn hierzu hat man nur zwei partiellen Differentialgleichungen für F_1, F_2, F_3 zu genügen. — Diese Gleichungen gewinnt man so: Die Bedingung dafür, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O., die einem Streifen entsprechen, involutorisch sind, hat eine mit der Gleichung (19) in d. A. B. XVII, p. 307 ähnliche Form. Nun führt man blos für dx_3, dp_1, dp_2, dp_3 ihre aus (8) herzuleitenden Werthe in dx_1, dx_2 [$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$ gesetzt] ein, und setzt sodann die Coefficienten für dx_1, dx_2 einzeln gleich Null. Damit hat man die beiden gesuchten Gleichungen für F_1, F_2, F_3. — Die Figur in r', d. i. in dem Raume ($x_1'\, x_2'\, x_3'\, z'$), die aus jenen Flächenschaaren besteht, die also dem Systeme (8) entspricht, lässt sich folgendermassen charakterisiren. Jedem Flächenelemente ($z\, x\, p$) entspricht eine Schaar von ∞^2 M_2*) und deren Enveloppen, alle diese M_2 erzeugt von gewissen (charakteristischen) M_1. (Siehe d. A. B. XI, p. 430.) Weil einem beliebigen Flächenelemente ($z'\, x'\, p'$) ein gewisses Flächenelement

---

*) Diese M_2 Mannigfaltigkeiten von je ∞^2 vereinigt liegenden Flächenelementen ($z'\, x'\, p'$) bildend.

$(z\,x\,p)$ der vier Gleichungen: $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$ entspricht, und in diesem Elemente sich ∞^1 Richtungen (dx_1, dx_2, dx_3) für Integralstreifen derselben Gleichungen: $f = C_0$, etc. finden, so muss eine jede dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechende M_2, die das Element $(z'\,x'\,p')$ enthält, mit jeder von ∞^1 unendlichen benachbarten M_2 auf je einer M_3 liegen. Nun wird jedem Elemente $(z'\,x'\,p')$ durch diejenigen M_2, die dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechen, eine Schaar von ∞^2 Werthsystemen von p'_{ik} zugeordnet, und weil, wie eben bemerkt, irgend eine M_2 zusammen mit ∞^1 unendlich benachbarten auf je einer M_3 liegt, müssen alle diese ∞^2 Werthe von p'_{ik}, aber nur diese, derjenigen Figur in r', die dem Systeme $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$ entspricht, zugehören. Deshalb muss diese Figur durch vier partielle Differentialgleichungen der 2. O. algebraisch definirt sein. Wir haben durch die folgenden Gleichungen diejenigen Werthe von p'_{ik} gegeben, die eine der dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechende M_2 einem ihrer Flächenelemente zuordnet:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_2'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1'} + p_1'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'} + p_2'\frac{\partial F_i}{\partial z'} + \frac{\partial F_i}{\partial p_1'}\left(p'_{12} + p'_{11}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) +$$

$$+ \frac{\partial F_i}{\partial p_2'}\left(p'_{22} + p'_{21}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_3'}\left(p'_{32} + p'_{31}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_3'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1'} + p_1'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'} + p_3'\frac{\partial F_i}{\partial z'} + \frac{\partial F_i}{\partial p_1'}\left(p'_{13} + p'_{11}\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) +$$

$$+ \frac{\partial F_i}{\partial p_2'}\left(p'_{23} + p'_{21}\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_3'}\left(p'_{33} + p'_{31}\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) = 0.$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Indem wir $\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}$, $\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}$ eliminiren, erhalten wir vier Gleichungen, die für diejenigen Werthe der p'_{ik} gelten, die vermittelst der M_2, die dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechen und ein und dasselbe Element $(z'\,x'\,p')$ enthalten, dem letzteren Elemente zugeordnet werden. Folglich bestimmt man einfach durch Elimination von z, x, p aus diesen vier Gleichungen in $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', \cdots, p'_{11}, p'_{12}, \cdots, p'_{33}$, den Gleichungen (7) und (8) diejenigen Gleichungen, welche die dem Systeme (8) entsprechende Figur in r' definiren. Diese Gleichungen werden vier partielle Differentialgleichungen der 2. O. für z':

$$\begin{aligned} F(z', x_1', \cdots, p_i', \cdots, p'_{ik}, \cdots) &= C, \\ \Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) &= C', \\ \Psi(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) &= C'', \\ X(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) &= C''', \end{aligned}$$

unter C, C', C'', C''' die früher in (8) eingehenden arbiträren Constanten verstanden.

Je vier Gleichungen: $F = C_0$, $\Phi = C_0'$, $\Psi = C_0''$, $X = C_0'''$ *besitzen* ∞^∞ *gemeinsame charakteristische* M_2 *und unbegrenzt unendlich viele gemeinsame intermediäre Integrale, jedes durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen* 1. *O. ausgedrückt.* Diese intermediären Integrale entsprechen den Integralstreifen von je vier Gleichungen (8): $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$.

13. Wir betrachten schliesslich eine solche durch vier Gleichungen:

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} F_1(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3') & = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0 \end{array}\right.$$

bestimmte Transformation, die eine jede Integral-M_2 des Gleichungssystems:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{ll} f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) & = C, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad) & = C', \\ \psi(\qquad\qquad\qquad) & = C'' \end{array}\right.$$

in ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in r' überführt. Die Bedingung hierfür drückt sich durch drei Gleichungen für F_1, F_2, F_3, F_4 aus. — Diese Gleichungen gewinnt man so: Man stellt die Bedingung auf dafür, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O., die einer M_2 entsprechen, in Involution liegen. Diese Bedingung hat eine mit der Gleichung (26) in d. A., Bd. XVII, p. 312 ähnliche Form. Man setzt für die in den Symbolen (12) etc. eingehenden $\frac{\partial p_1}{\partial x_2}$, etc., ihre Werthe in $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ aus (10) ein, und drückt alsdann aus, dass die fragliche Gleichung unabhängig von $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ stattfinden soll. — Die Figur in r', die dem Systeme (10) entspricht, ist aus denjenigen M_3 zusammengesetzt, die nach (9) den Integral-M_2 von (10) entsprechen. Zu einem beliebigen Flächenelemente $(z'x'p')$ werden durch diese M_3 $\infty^3 \cdot \infty^2$ Werthsysteme von p_{ik}' zugeordnet. Also umfasst unsere Figur nur ∞^5 der ∞^6 einem beliebigen $(z'x'p')$ zugehörenden Werthsysteme $(z'x'p'p_{ik}')$ des Raumes R'. *Man findet sie näher bestimmt durch vier partielle Differentialgleichungen der* 2. *O.:* $F = 0$, $\Phi = C$, $\Psi = C'$, $X = C''$, *die jene* ∞^∞ *involutorischen Gleichungspaare, die den Integral-*M_2 *von* (10) *entsprechen, zu gemeinsamen intermediären Integralen besitzen.*

§ 4.

Von der durch vier Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q'$ zu begründenden Transformation.

14. Die Transformation, die durch vier Gleichungen:

$$(11) \qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

definirt ist, ist im Allgemeinen nur für ein von gewissen zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. bestimmtes Gebiet eine Flächentransformation. Dies habe ich an p. 313 d. A., Bd. XVII bewiesen. Unter Umständen kann jedoch dieses Gebiet enger werden. Aber, ehe ich hierauf eingehe, will ich meinen früheren Beweis des erwähnten Satzes in einer etwas umgestalteten Form kurz reproduciren.

Wir denken uns zunächst die Transformation (11) durch Auflösung nach x', y', p', q' auf die Form gebracht:

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = f_1(z', z, x, y, p, q), \\ y' = f_2(\qquad\qquad), \\ p' = \varphi_1(\qquad\qquad), \\ q' = \varphi_2(\qquad\qquad), \end{cases}$$

und nachher jedes Paar von einander entsprechenden Flächen, $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ durch z, z', x, y dargestellt, etwa so: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$. Die Differentialquotienten $\Phi'(x)$, $\Phi'(y)$ bezeichne ich mit π, $\varkappa$. Man hat dann:

$$(13) \qquad \pi = p' \frac{dx'}{dx} + q' \frac{dy'}{dx}, \quad \varkappa = p' \frac{dx'}{dy} + q' \frac{dy'}{dy},$$

wo:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{df_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + p \frac{\partial f_1}{\partial z} + r \frac{\partial f_1}{\partial p} + s \frac{\partial f_1}{\partial q} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial z'} = \frac{d' f_1}{dx} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial z'},$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{df_2}{dx} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + p \frac{\partial f_2}{\partial z} + r \frac{\partial f_2}{\partial p} + s \frac{\partial f_2}{\partial q} + \pi \frac{\partial f_2}{\partial z'} = \frac{d' f_2}{dx} + \pi \frac{\partial f_2}{\partial z'},$$

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{df_1}{dy} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + q \frac{\partial f_1}{\partial z} + s \frac{\partial f_1}{\partial p} + t \frac{\partial f_1}{\partial q} + \varkappa \frac{\partial f_1}{\partial z'} = \frac{d' f_1}{dy} + \varkappa \frac{\partial f_1}{\partial z'},$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{df_2}{dy} = \frac{\partial f_2}{\partial y} + q \frac{\partial f_2}{\partial z} + s \frac{\partial f_2}{\partial p} + t \frac{\partial f_2}{\partial q} + \varkappa \frac{\partial f_2}{\partial z'} = \frac{d' f_2}{dy} + \varkappa \frac{\partial f_2}{\partial z'}.$$

Die Gleichungen (13) gehen dann in die folgenden über:

$$(14) \qquad \begin{cases} f \equiv \pi\left(1 - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial z'} - \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z'}\right) - \varphi_1 \frac{d' f_1}{dx} - \varphi_2 \frac{d' f_2}{dx} = 0, \\ \varphi \equiv \varkappa\left(1 - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial z'} - \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z'}\right) - \varphi_1 \frac{d' f_1}{dy} - \varphi_2 \frac{d' f_2}{dy} = 0, \end{cases}$$

und die Bestimmung der Flächenpaare: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ wird äquivalent mit der Bestimmung von Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \overline{\Phi}(x, y)$ dieses Gleichungssystems $f = 0$, $\varphi = 0$.

Für die Herstellung dieser Lösungen verfahren wir ganz, wie wir in der 5. Nr. der Abh. im XVII. Bd. d. A., p. 285, in Betreff der Herstellung der Lösungen eines Systems von zwei Gleichungen zwischen z, x, y, p, q, z', p', q' verfahren haben. Wir müssen durch die fraglichen Lösungen die Gleichung $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$ befriedigen. Diese Gleichung wird, wegen der speciellen Form der vorliegenden Gleichungen (14) in Bezug auf r, s, t, frei von den dritten Differentialquotienten u, v, w, ϖ von z. Desshalb werden die zwei Gleichungen:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'x\pi} = 0, \quad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'x\pi} = 0$$

partielle Differentialgleichungen nur von der 3. O. in Bezug auf z, und eine Elimination von z', π, $\varkappa$ zwischen den Gleichungen (14), der Gleichung $[f(\varphi)]_{z'x\pi} = 0$ und den zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen führt also auf zwei partielle Differentialgleichungen 3. O. zur Bestimmung der Gleichungen $z = F(x, y)$. Diese Gleichungen 3. O. sind so beschaffen, dass ihre ersten Derivirten in Bezug auf x, y sich auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen reduciren. [Dies geht in derselben Weise hervor wie der ähnliche Satz in Bezug auf die Gleichungen (7) auf p. 290 d. A., Bd. XVII.] Aber darum gestatten jene Gleichungen 3. O. ∞^{∞} gemeinsame Integralflächen. Alle diese Integrale gehören unserem Gleichungssysteme (14) als die einen Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen $z = F(x, y)$, $z' = \overline{\Phi}(x, y)$ desselben an. Jedes der Integrale: $z = F(x, y)$ ergiebt durch Elimination von z', π, $\varkappa$ aus den drei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$ diejenige Gleichung: $z' = \overline{\Phi}(x, y)$, die zusammen mit $z = F(x, y)$ eine Lösung von (14) bildet. Vermittelst (12) verwandelt man sie leicht in eine Gleichung $z' = \Phi(x', y')$. Alle solche Gleichungspaare wie $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ repräsentiren zwei Flächen, die von der Transformation (12) in einander verwandelt werden. Jene Flächen entsprechen einander eindeutig. Es existirt auch eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen $(zxypqrst)$, $(z'x'y'p'q'r's't')$ derselben. Desshalb müssen nicht nur, wie gezeigt, die Flächen $z = F(x, y)$ zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. genügen, sondern auch die entsprechenden Flächen $z' = \Phi(x', y')$ müssen zwei partiellen Differentialgleichungen ebenfalls von der 3. O. als Integrale zugehören. Die erwähnte Beziehung von Elementen $(zxypqrst)$, $(z'x'y'p'q'r's't')$ ist als gegeben aufzufassen durch eine Berührungstransformation der 2. O., die jene zwei Paare von Gleichungen 3. O. in einander überführt. Sie ist aber keine Berührungstransformation der

1. O., keine gewöhnliche (**Lie**'sche) Berührungstransformation (nach Nr. 8.).

Sie würde aber eine Berührungstransformation 1. O. werden, falls eines der Paare von Gleichungen 3. O. ein erstes Integral mit einer arbiträren Constanten gestattete (vgl. Nr. 8.). Aber in solchem Falle würde die Transformation (12), — die jetzt eben die Berührungstransformation wäre, eine jede Fläche in eine Fläche überführen, und von einem Systeme von partiellen Differentialgleichungen, das die Flächen definirte, die sich wieder in Flächen transformiren lassen, könnte nun keine Rede sein (vgl. Nr. 9.).

15. Wenn z' in den Gleichungen (12) fehlt, so fehlt z' auch in den Gleichungen (14) und in der Gleichung $[f\varphi]_{z'\kappa\pi}=0$. Die Bestimmung der Gleichungen $z=F(x,y)$ wird alsdann durch eine partielle Differentialgleichung der 2. O. bewirkt, die sich durch Elimination von π, κ zwischen den genannten Gleichungen (14) und der Gleichung $[f\varphi]_{z'\kappa\pi}=0$ ergiebt. Jeder der Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht vermöge (12) ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen der 1. O. in r', oder deren Integralflächen: $z'=\Phi(x',y',C)$. Jedem Elemente $(zxypqrst)$ jener partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht nunmehr eine Schaar von ∞^1 Elementen $(z'x'y'p'q'r's't')$. Dagegen brauchen nicht einem der letzteren Elemente ∞^1 der ersteren zu entsprechen. Einer Fläche $z'=\Phi(x',y')$ entspricht im Allgemeinen nur eine Fläche $z=F(x,y)$. Die Flächen $z'=\Phi(x',y')$ befriedigen im Allgemeinen ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen der 3. O. Wenn aber in den Gleichungen (12) nicht nur z' sondern auch z fehlt, so hat man nicht nur für die Flächen $z=F(x,y)$ eine partielle Differentialgleichung von der 2. O., sondern auch für die Flächen $z'=\Phi(x',y')$ eine partielle Differentialgleichung derselben 2. O. Jedem Elemente $(zxypqrst)$ bez. $(z'x'y'p'q'r's't')$ einer dieser Gleichungen 2. O. entspricht eine ganze Schaar von ∞^1 derartigen Elementen der anderen Gleichung. Jeder Integralfläche $z=F(x,y)$ entsprechen ∞^1 Integralflächen $z'=\Phi(x',y')$, und jeder der letzteren Flächen ∞^1 der ersteren.

16. Wenn in unseren Transformationsgleichungen z' fehlt, so erhält man die Flächen in r', die einer Integralfläche $z=F(x,y)$ der bezüglichen Gleichung 2. O. entsprechen, durch blosse Quadraturen. Man führe nämlich in die Gleichungen (12) für z, p, q die Werthe $F(x,y)$, $F'(x)$, $F'(y)$ resp. ein, und erhält alsdann zuerst nach Elimination von x, y : $p'=\psi_1(x',y')$, $q'=\psi_2(x',y')$, und hierauf die Gleichung der entsprechenden Flächenschaar durch Ausführung der Quadratur:

$$z'=\int(\psi_1(x',y')\,dx'+\psi_2(x',y')\,dy').$$

17. Aber, im Allgemeinen, wenn die Transformation (11) irgend eine Fläche $z = f(x, y)$ des Gebietes r in ∞^1 Flächen des Gebietes r' verwandelt, so werden die letzteren Flächen *nicht* durch blosse Quadraturen erhalten. Man hat nämlich in erster Hand, wenn man in (11) $z = f(x, y)$, $p = f'(x)$, $q = f'(y)$ substituirt und x, y eliminirt, zwei partielle Differentialgleichungen der 1. O.:

$$(15) \qquad A(z', x', y', p', q') = 0, \quad B(z', x', y', p', q') = 0,$$

die der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen und nach der für die Transformation gemachten Voraussetzung involutorisch sind. Ihre gemeinsamen Integralflächen mögen für den Augenblick mit $C, C', C'', \ldots$ bezeichnet werden. Einem jeden Elemente $(z\,x\,y\,p\,q)$ der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen ∞^1 Elemente $(z'\,x'\,y'\,p'\,q')$, von denen eines auf C, eines auf C', u. s. w. liegt. Diese letzteren Elemente können nun als einander entsprechende Elemente der Flächen C, C', C'' u. s. w. aufgefasst werden. Zwei unendlich benachbarten Elementen der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen ∞^1 Paare von vereinigt liegenden Elementen $(z'x'y'p'q')$, von denen eines zu C, eines zu C', u. s. w. gehört. Desshalb müssen je zwei vereinigt liegenden Elementen von (15) ∞^1 Paare von vereinigt liegenden Elementen derselben Gleichungen (15) entsprechen. Eine infinitesimale Berührungstransformation des Gleichungssystems (15) in sich selbst, die eben als Punkttransformation betrachtet werden kann, muss sich also folgenderweise ergeben: Indem man die Gleichungen (11) differentiirt, und dabei die Grössen z, x, y, p, q als Constanten betrachtet, erhält man $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta p'$, $\delta q'$ proportional gewissen determinirten Functionen von z', x', y', p', q', z, x, y, p, q. Es werden z, x, y, p, q, p', q' vermöge (11) und der Gleichungen: $z = f(x,y)$, $p = f'(x)$, $q = f'(y)$ eliminirt. So bekommt man die fragliche Transformation ausgedrückt durch Gleichungen der Form:

$$\delta x' = \varepsilon\psi A', \quad \delta y' = \varepsilon\psi B', \quad \delta z' = \varepsilon\psi C', \quad \delta p' = \varepsilon\psi D', \quad \delta q' = \varepsilon\psi E',$$

wo $A', B', \ldots, E'$ die eben aus (11) und $z = f(x, y)$ hergeleiteten ganz bestimmten Functionen von x', y', z'; ψ eine noch unbekannte Function derselben Grössen und ε eine unendlich kleine Constante bedeuten. ψ hat man aber folgenderweise zu bestimmen. Die fragliche Transformation soll (d. A., Bd. XV, p. 51) durch eine Function Φ:

$$(16) \qquad \Phi = \psi(A'p' + B'q' - C')$$

bestimmt sein, und man muss

$$\delta p' = -\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + p'\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right), \quad \delta q' = -\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'} + q'\frac{\partial\Phi}{\partial '}\right)$$

haben. Die zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + p'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = -\psi D', \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y'} + q'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = -\psi E',$$

in die man sich für p', q' ihre Werthe aus (15) oder (11) eingeführt zu denken hat, werden zwei partielle Differentialgleichungen 1. O. für ψ. Wird ϖ statt $\log \psi$ gesetzt, so nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$(17)\quad \begin{cases} u \dfrac{\partial \varpi}{\partial x'} + v \dfrac{\partial \varpi}{\partial y'} + w \dfrac{\partial \varpi}{\partial z'} = 1, \\ u' \dfrac{\partial \varpi}{\partial x'} + v' \dfrac{\partial \varpi}{\partial y'} + w' \dfrac{\partial \varpi}{\partial z'} = 1, \end{cases}$$

wo u, v, w, u', v', w' ganz bestimmte Functionen von x', y', z' sind. Diese zwei Gleichungen müssen eine Lösung ϖ gemein haben, denn es muss nach dem nächstvorher Erörterten eine durch (16) charakterisirte infinitesimale Punkttransformation der Gleichungen (15) existiren. Und eine solche Transformation giebt ϖ stets in der Form: $\varpi = \varpi(x', y', z')$ $+$ eine arb. Funct. von φ, wenn $\varphi = C$ die Gleichung der Schaar von Integralflächen von (15) bedeutet.

Desshalb, wenn die erste der Gleichungen (17) durch $A(\varpi) = 1$, die zweite durch $B(\varpi) = 1$ kurz bezeichnet wird, muss von den drei Gleichungen

$$A(\varpi) = 1, \quad B(\varpi) = 1, \quad A(B(\varpi)) - B(A(\varpi)) = 0$$

die letzte mit den zwei ersteren stets zugleich erfüllt sein.

Demnach erhält man einen Werth von ϖ und hierauf von ψ, vermittelst der Formel $\varpi = \log \psi$, erst durch Integration einer Differentialgleichung (mit einem arbiträren Parameter)

$$\alpha(x,y)\,dx + \beta(x,y)\,dy = 0.$$

Die Bestimmung einer infinitesimalen Berührungstransformation, welche die Integralschaar unserer involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O. in sich überführt, ist somit im Allgemeinen mit denselben Schwierigkeiten behaftet wie die Bestimmung jener Integralschaar selbst. Auch ist unsere Frage in keiner wesentlichen Weise verschieden von der von der Bestimmung der Lösungen von irgendwelchen zwei involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O., da man ja immer zwei Gleichungen:

$$F_1(z, x, y, z', x', y', p', q') = 0, \quad F_2(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0$$

beliebig hinschreiben kann, die mit den vorgelegten partiellen Differentialgleichungen eben ein System (11) ausmachen.

18. Die Involutionsbedingung für die beiden einer Fläche $z = f(x,y)$ vermittelst (11) entsprechenden partiellen Differentialgleichungen 1. O. lautet nach d. A. Bd. XVII, p. 312, Gleichung (26), so:

$$(34)\,[F_1 F_2]_{z'x'p'} + (42)\,[F_1 F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1 F_4]_{z'x'p'}$$
$$+ (12)\,[F_3 F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4 F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2 F_3]_{z'x'p'} = 0,$$

wo $[F_m F_n]_{z'x'p'}$ das gewöhnliche Involutionszeichen, (mn) der Kürze wegen statt

$$\frac{dF_m}{dx}\,\frac{dF_n}{dy} - \frac{dF_m}{dy}\,\frac{dF_n}{dx}$$

($m, n = 1, 2, 3, 4$) geschrieben ist. Ist die Transformation (11) von der Form:

$$(18)\qquad \begin{cases} x' = f_1(z, x, y, p, q), \\ y' = f_2(\qquad\qquad), \\ p' = f_3(\qquad\qquad), \\ q' = f_4(\qquad\qquad), \end{cases}$$

so nimmt jene Bedingungsgleichung die einfachere Gestalt an:

$$(13) + (24) = 0.$$

Sie wird eine partielle Differentialgleichung der 2. O.:

$$(19)\qquad Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

wo $A, B, \cdots, E$ Functionen von x, y, z, p, q sind. *Sie ist die allgemeinste Gleichung 2. O. jener Form*, denn wenn $A, B, \cdots, E$ gegeben sind, so hat man, was für Functionen von x, y, z, p, q sie auch sein mögen, nur vier Gleichungen, deren bekannte Glieder $\frac{A}{E}$, $\frac{B}{E}$, $\frac{C}{E}$, $\frac{D}{E}$ sind, zur Bestimmung der vier Functionen f_1, f_2, f_3, f_4. Das Flächensystem in r', das den Integralflächen jener partiellen Gleichung 2. O. entspricht, wird durch zwei partielle Differentialgleichungen der 3. O., von deren ersten Derivirten in Bezug auf x', y' die eine eine algebraische Folge der drei andern ist, gegeben. *Das Integralsystem dieses Gleichungspaares wird folglich, nach der* 16. *Nummer, durch Lösung einer partiellen Differentialgleichung* 2. *O.* (19) *und Ausführung von Quadraturen erhalten.*

19. *Fehlt z in den Functionen f der Gleichungen* (18) *so fehlt z auch in den Functionen $A, B, \cdots, E$ der Gleichung* (19), und statt des erwähnten Paares von Gleichungen 3. O. hat man, wie in Nr. 15. bemerkt wurde, eine partielle Differentialgleichung von der nämlichen Form wie (19). Sie wird insbesondere mit der Gleichung (19) selbst identisch ausfallen, wenn das Gleichungssystem (18) bei Vertauschung der accentuirten und unaccentuirten Buchstaben mit einander unverändert bleibt. Dann ist jene Gleichung (19) in der Weise ausgezeichnet, dass durch die genannte Transformation (18) jede Integralfläche derselben in ∞^1 andere Integralflächen umgeformt wird. Die Integralflächen der Gleichung ordnen sich in Folge dessen zu Paaren von je ∞^1 Flächen zusammen, wo die beiden Schaaren eines Paares so auf einander bezogen sind, dass sie durch die vorliegende Transformation in einander übergehen. Die Transformation ist, in so weit sie eine Flächentransformation bildet, eine eindeutige Transformation

zwischen Werthsystemen $(x\,y\,p\,q)$, $(x'\,y'\,p'\,q')$, ebenso wie zwischen $(x\,y\,p\,q\,r\,s\,t)$, $(x'\,y'\,p'\,q'\,r'\,s'\,t')$, u. s. w.

20. Einen anderen Fall, in dem die Flächen, für welche eine Transformation (11) eine Flächentransformation wird, eine partielle Differentialgleichung 2. O. erfüllen, muss ich auch erwähnen. Er bezieht sich auf die Theorie der Flächen von constanter Krümmung, wie diese neuerdings von Bianchi und Lie*) entwickelt worden ist. Bianchi's und Lie's Theorien verdanken ihren Ursprung dem Satze, dass die Fläche der Krümmungscentra (die Centrafläche) irgend einer Fläche, deren Hauptkrümmungsradien in einem Punkte eine von der Lage des Punktes unabhängige constante Differenz besitzen, eine Fläche von constanter Krümmung ist, oder richtiger, aus zwei Flächen von derselben constanten Krümmung besteht. Nun wird durch die Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} (x'-x)p+(y'-y)q-(z'-z)=0, \\ (x'-x)p'+(y'-y)q'-(z'-z)=0, \\ \qquad\qquad 1+pp'+qq'=0 \end{cases}$$

der Zusammenhang zwischen einer Fläche $z=f(x,y)$, $p=f'(x)$, $q=f'(y)$ und der allgemeinsten anderen Fläche $z'=\varphi(x',y')$, $p'=\varphi'(x')$, $q'=\varphi'(y')$ ausgedrückt, die zusammen mit der vorigen eine Centrafläche (irgend einer Fläche) bilden kann. Denn jene Gleichungen sagen nur aus, dass die Punkte der beiden Flächen $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ so zusammengeordnet werden können, dass sie Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen werden, und dass die Tangentenebenen der beiden Flächen in jenen Punkten auf einander senkrecht stehen. Je zwei zusammengehörige Punkte werden die beiden Hauptkrümmungscentra eines Punktes einer Fläche, welche die beiden Flächen $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ zur Centrafläche hat.

Jene Gleichungen (20) repräsentiren eine Flächentransformation (3)**). Fügen wir die Gleichung:

$$(21)\qquad (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{1}{a^2}$$

hinzu, so haben wir durch (20), (21) die Bedingung dafür ausgedrückt, dass das Flächenpaar $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ die Centrafläche einer

---

*) Lie: Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bdd. 4, 5 (Hefte 3). Kristiania, 1879, 1880. Bianchi's Untersuchungen kenne ich meistens nur aus den Arbeiten von Lie. — Die folgende Transformation (20), (21) ist von Lie als der analytische Ausdruck von Bianchi's Transformation der Flächen von constanter Krümmung angeführt.

**) Die Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen einer Fläche und ihrer Centrafläche ausdrücken, bestimmen eine Flächentransformation von der von mir im XI. Bde. d. A. p. 199, § 3. besprochenen Art.

Fläche bildet, für welche die Differenz der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte constant $= \frac{1}{a}$ ist $\left[\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}\right]$. Die vier Gleichungen (20), (21) sind von der Form (11). Um zu erkennen, für welche Flächen in $r(xyz)$ sie eine Flächentransformation begründen, haben wir erst die für den vorliegenden Fall geltende Form der am Anfange der 18. Nr. hingeschriebenen Involutionsgleichung aufzustellen. Man hat zu setzen:

$$[F_2F_2]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_1F_3]_{z'x'p'} = 1 + p^2 + q^2, \quad [F_1F_4]_{z'x'p'} = 0,$$
$$[F_1F_3]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_2F_4]_{z'x'p'} = -\frac{2}{a^2}, \quad [F_3F_4]_{z'x'p'} = 0,$$
$$(24) = 2(1 + p^2 + q^2)\,(1 + p'^2 + q'^2)\,\frac{y' - y}{p' - p},$$
$$(13) = -(rt - s^2)\,(1 + p'^2 + q'^2)\,\frac{y' - y}{p' - p},$$

und die fragliche Bedingungsgleichung nimmt dann folgende Form an:

$$(22) \qquad rt - s^2 + a^2(1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Sie ist unabhängig von z', x', y', p', q'. Alle Integralflächen derselben werden daher durch die Transformation (20), (21) in Schaaren von je ∞^1 Flächen verwandelt. Und weil das System der Transformationsgleichungen symmetrisch in Bezug auf die accentuirten und nichtaccentuirten Buchstaben ist, so müssen die transformirten Flächen, die in r', dieselbe Gleichung (22) erfüllen. Sie stellt aber die allgemeinste Fläche von der constanten Krümmung $\frac{1}{R'R} = -a^2$ dar. Deshalb werden die Flächen von dieser constanten Krümmung durch die Transformation (20), (21) in einander übergeführt; — wie gleich aus dem anfangs citirten Satze zu schliessen war.

Somit folgt (Nr. 17.), *dass man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variablen* (*und einem arbiträren Parameter*) *die* ∞^1 *Flächen zu bestimmen hat, die einer gegebenen Fläche von der constanten Krümmung* $-a^2$ *in der Art entsprechen, dass jede derselben mit der gegebenen Fläche eine Centrafläche einer Fläche* $\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}$ *bildet.* Aus jeder dieser ∞^1 Flächen gewinnt man in derselben Weise neue Flächen von constanter Krümmung, u. s. w. *So dass man durch fortgesetzte Integrationen von Differentialgleichungen mit zwei Variablen aus einer Fläche von constanter Krümmung unendlich viele andere als die* ∞^1 *erstgenannten Flächen von derselben constanten Krümmung muss herleiten können.**)

---

*) Nach Lie (siehe die oben citirten Arbeiten) erhält man in dieser Weise aus einer gegebenen Fläche ∞^∞ Flächen von constanter Krümmung. — Sind die geodätischen Curven der gegebenen Fläche bekannt, so erhält man, nach Bianchi und Lie, die neuen Flächen durch blosse Quadraturen.

Durch eine jede Transformation (11) wird ein Streifen in r in ∞^1 Streifen in r' umgeformt, welche die gemeinsamen Integrale derjenigen drei partiellen Differentialgleichungen 1. O. sind, die durch Elimination von x, y, z, p, q aus (11) und den Gleichungen des gegebenen Streifens entspringen. Ein Streifen einer Fläche der constanten Krümmung $-a^2$ wird also vermittelst der Transformation (20), (21) zu ∞^1 Streifen führen, die auf je einer der ∞^1, der vorgelegten Fläche entsprechenden Flächen verlaufen. Demzufolge wird jede *Charakteristik* von (22) in ∞^1 andere *Charakteristiken* derselben Gleichung verwandelt. Diese anderen sind aus der ersteren durch blosse Eliminationen zu gewinnen, falls die ∞^1 Flächen bekannt sind, die einer durch jene erste Charakteristik zu legenden Fläche von der constanten Krümmung $-a^2$ entsprechen.

Nun sind die Charakteristiken von (22) die Haupttangentencurven der Integralflächen der Gleichung. Folglich: *Aus einer Fläche von constanter Krümmung, deren Haupttangentencurven bekannt sind, leitet man durch die oben erwähnten Operationen* ∞ *andere Flächen derselben Krümmung mit ihren Haupttangentencurven her.*

21. Eine Consequenz des Vorangehenden, welche die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche von constanter Krümmung anbetrifft, möchte ich nicht unberührt lassen. Aus einer Fläche von constanter Krümmung leitet man, wir oben gezeigt, ∞^1 andere Flächen von derselben constanten Krümmung ab. Ich wähle eine von ihnen beliebig aus. Sie bildet mit der ersten Fläche die Centrafläche einer Schaar von Parallelflächen. Dieselben werden durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. bestimmt. Aber für die Integrale dieser Gleichungen ist eine infinitesimale Berührungstransformation bekannt, nämlich die Paralleltransformation. Deshalb werden jene Integralflächen durch blosse Quadraturen erhalten. Entsprechend den ∞^1 Flächen, die durch die Transformation (20), (21) aus der ersten Fläche von constanter Krümmung abgeleitet werden, erhält man in dieser Weise ∞^2 Flächen $\left(\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}\right)$, welche die erstere Fläche zur einen Schale ihrer Centraflächen besitzen. Sie bilden eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung 1. O., welche die allgemeinste Fläche definirt, für welche jene Fläche von constanter Krümmung einen Theil der Centrafläche bildet. Nun gilt aber stets folgender Satz: Wenn die Normalen einer zweifach unendlichen Schaar von Flächen einen Liniencomplex bilden, und wenn $f(x, y, z, \lambda) = 0$ ∞^1 von diesen Flächen darstellt, und dieselben keine Parallelflächen sind, so werden die auf diesen Flächen verlaufenden Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., welche die supponirte zweifach unendliche Flächenschaar zu Integralen hat, durch die Gleichungen bestimmt:

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad [f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2 = C[f'(\lambda)]^2,$$

wo C eine arbiträre Constante ist*).

Und weiter wissen wir, dass die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., deren Integralflächen eine gegebene Fläche zum einen Theil ihrer Centraflächen haben, so dass die Normalen jener

---

*) Ich habe diesen Satz aus meiner Abhandlung über Kugelcomplexe in der Jahresschrift der Universität Lund T. IX. entlehnt. Da er aber dort nur beiläufig, ohne Beweis angegeben worden ist, so schreibe ich hier den Beweis hin. Sei $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ die Gleichung einer Schaar von ∞^2 Flächen, deren Normalen einem gegebenen Liniencomplex zugehören, und seien λ, μ so gewählt, dass bei constantem λ jene Gleichung eine Schaar von Parallelflächen repräsentirt. Die einer Fläche $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ unendlich nahe liegende Parallelfläche wird durch Elimination von x, y, z zwischen $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ und den Gleichungen:

$$x' = x + \varepsilon \frac{f'(x)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}},$$

$$y' = y + \varepsilon \frac{f'(y)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}},$$

$$z' = z + \varepsilon \frac{f'(z)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}}$$

oder

$$x = x' - \varepsilon \frac{f'(x')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}},$$

$$y = y' - \varepsilon \frac{f'(y')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}},$$

$$z = z' - \varepsilon \frac{f'(z')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}}$$

(ε eine unendlich kleine Constante)

erhalten. Demnach hat man jene Parallelfläche ausgedrückt durch die Gleichung

$$f - \varepsilon \sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2} = 0,$$

wenn die Accente der Buchstaben x, y, z weggelassen werden. Andererseits ist die Gleichung dieser Parallelfläche von der Form:

$$f + d\mu f'(\mu) = 0.$$

Daher:

$$d\mu\, f'(\mu) = -\varepsilon \sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}.$$

Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., die unsere zweifach unendliche Flächenschaar zum vollständigen Integralsysteme hat, werden durch die Gleichung:

$$f'(\lambda) + cf'(\mu) = 0$$

bestimmt. Hier ist c eine arbiträre Constante. Wird nun für $f'(\mu)$ sein obiger Werth gesetzt, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2} = Cf'(\lambda),$$

womit der fragliche Satz bewiesen ist.

Flächen sämmtlich die gegebene Fläche berühren, also einen speciellen Liniencomplex bilden, Krümmungscurven auf den Integralflächen sind. Diese werden also in der genannten Weise aus den Integralflächen der partiellen Differentialgleichung 1. O. durch Differentiationen und Eliminationen erhalten.

Folglich leitet man aus den anfangs gewonnenen ∞^1 Flächenschaaren $\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}$ durch rein algebraische Operationen die eine Schaar der Krümmungscurven derselben ab. Hierauf erhält man weiter durch ebenfalls rein algebraische Operationen die ihnen entsprechenden ∞^2 geodätischen Curven der zuerst gewählten Fläche von constanter Krümmung. *Die geodätischen Curven einer Fläche von constanter negativer Krümmung lassen sich also durch Integration einer Differentialgleichung* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) =$ *einer arb. Constante (und nachherige Quadraturen) finden.*

[Ich verdanke es einer zufälligen Bemerkung von Lie über die geodätischen Curven der Flächen von constanter Krümmung, dass ich eine im Manuscripte eingeflossene darauf bezügliche Irrung hier habe beseitigen können.]

Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Während die Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen durch eine Reihe werthvoller Arbeiten eine grosse Ausdehnung erfahren hat, ist die Theorie der Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung bisher fast ganz unberücksichtigt geblieben. Dem Verfasser des vorliegenden Aufsatzes sind nur gelegentliche Bemerkungen über dieselben bekannt worden, während eine eigentliche Theorie derselben seines Wissens noch nicht gegeben ist. Im Folgenden soll ein Versuch zu einer ersten Theorie gemacht werden. Dabei beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, dass der Transformationsgrad eine ungerade Primzahl ist, wir suchen ferner nur die Theorie derjenigen Gleichungen zu entwickeln, welche die naturgemässe Verallgemeinerung der von Legendre, Jacobi, Hermite, Schröter u. a. in die elliptischen Functionen eingeführten Gleichungen sind, während wir einstweilen von einer Verallgemeinerung der reichhaltigen Theorien, die in neuester Zeit auf dem Gebiete der elliptischen Modulfunctionen entstanden sind, absehen.

Ferner sollen die Betrachtungen unabhängig von der Substitutionstheorie, wie sie Jordan in seinem bekannten Lehrbuche giebt, angestellt werden.

Als Moduln wählen wir nicht die von Rosenhain und Richelot gebrauchten, sondern die von Hermite in die Analysis eingeführten, auf deren Bedeutung neuerdings Borchardt aufmerksam gemacht hat, und zwar legen wir ein ganz bestimmtes System zu Grunde, dasjenige, welches aus den vier Thetafunctionen (5) (23) (4) (01) entspringt.

§ 1.

Sämmtliche Transformationen n^{ter} Ordnung — n eine ungerade Primzahl — lassen sich in $1 + n + n^2 + n^3$ nicht äquivalente Classen theilen, die so beschaffen sind, dass sämmtliche in einer Classe befindliche Systeme durch Transformationen auseinander abgeleitet werden können, deren Determinante die Einheit ist. Als Repräsentanten können und wollen wir folgende definiren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n' & i(\alpha n)+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n & i(\alpha n+1) & 0 & i'(\alpha n+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -i(\alpha n+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n & 0 & i(\alpha n+1) & i'(\alpha n+1) \\ 0 & n & i''(\alpha n+1) & i(\alpha n+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wobei

$$\alpha n \equiv -1 \text{ mod. } 8$$

ist.

Wir beschäftigen uns im Folgenden lediglich mit den auf diese Weise definirten Transformationen.

Seien v_1 und v_2 die Argumente der ursprünglichen Thetafunctionen, $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ die Moduln derselben, ferner:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

ein beliebiger der vorhin definirten Repräsentanten.

Wir setzen:

$$v_1' = \frac{n(c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22})}{N} v_1 - \frac{n(d_2 - a_2\tau_{11} - b_2\tau_{12})}{N} v_2,$$

$$v_2' = \frac{n(-c_3 + a_3\tau_{21} + b_3\tau_{22})}{N} v_1 - \frac{n(-d_3 + a_3\tau_{11} + b_3\tau_{12})}{N} v_2.$$

$$N\tau_{11}' = (cd)_{02} + (ac)_{02}\tau_{11} + 2(bc)_{02}\tau_{12} + (db)_{02}\tau_{22} + (ab)_{02}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),$$

$$N\tau_{12}' = (cd)_{12} + (ac)_{12}\tau_{11} + (2(bc)_{12} - n)\tau_{12} + (db)_{12}\tau_{22} + (ab)_{12}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),$$

$$N\tau_{22}' = (cd)_{31} + (ac)_{31}\tau_{11} + 2(bc)_{31}\tau_{12} + (db)_{31}\tau_{22} + (ab)_{31}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{21}),$$

$$N \;\;\;= (cd)_{23} + (ac)_{23}\tau_{11} + 2(bc)_{23}\tau_{22} + (db)_{23}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),$$

endlich:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = e^{\pi i \omega}\, \vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_\lambda$$

wobei:

$$\omega = (a_0 v_1 + b_0 v_2)(a_3 v_1 + b_3 v_2) + (a_1 v_1 + b_1 v_2)(a_2 v_1 + b_2 v_2)$$
$$+ \tau_{11}'(a_3 v_1 + b_3 v_2)^2 + 2\tau_{12}'(a_3 v_1 + b_3 v_2)(a_2 v_1 + b_2 v_2) + \tau_{22}'(a_2 v_1 + b_2 v_2)^2$$

ist.

Wir greifen eine bestimmte Π-Function heraus, die Function $\Pi(v_1, v_2)_5$, wir nehmen ferner zunächst nur den Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für denselben wird:

$$v_1' = nv_1, \quad v_2' = nv_2, \quad \tau_{11}' = n\tau_{11}, \quad \tau_{12}' = n\tau_{12}, \quad \tau_{22}' = n\tau_{22}.$$

Dann folgt aus den Untersuchungen von **Hermite**, dass $\Pi(v_1, v_2)_5$ eine homogene ganze Function n^{ten} Grades der Grössen $\vartheta(v_1, v_2)_5$, $\vartheta(v_1, v_2)_{23}$, $\vartheta(v_1, v_2)_4$, $\vartheta(v_1, v_2)_{01}$ ist, welche $\frac{n^2+1}{2}$ willkürliche Constanten linear enthält. Eine Bestimmung dieser Constanten hat **Brioschi** gegeben (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences tome 47, pag. 310 seq.) Es blieb bei derselben eine Lücke, welche von **Königsberger** ausgefüllt wurde. (Crelle 67, pag. 109 seq.) Wir setzen an Stelle von v_1, v_2 in der soeben definirten Gleichung der Reihe nach resp.:

$$v_1 + \frac{m}{n}, \quad v_2 + \frac{m'}{n}$$

wo m und m' die Werthe annehmen können:

$$m = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}; \; m' = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2},$$

$$m = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}; \; m' = -1, -2, \cdots, -\frac{n-1}{2},$$

$$m = 0, \; m' = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}; \; m = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}, \; m' = 0.$$

Dann ändern die Argumente der linken Seite sich lediglich um ganze Perioden. Hieraus folgt, dass die Verhältnisse der Constanten sich ausdrücken lassen als rationale Functionen der Grössen:

$$\vartheta\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)_i (i = 5, 23, 4, 01)$$

oder auch der Grössen

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)_5} \; (\varepsilon = 23, 4, 01).$$

Nach einem Satze von **Brioschi** ändern sich die Verhältnisse der Constanten in den Functionen $\Pi(v_1, v_2)_{23}$, $\Pi(v_1, v_2)_4$, $\Pi(v_1, v_2)_{01}$ nicht, nur die Reihenfolge wird eine andere.

Setzen wir daher:

$$\frac{\vartheta(0, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon}{\vartheta(0, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_5} = \varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$$

so ergiebt sich:

1. Die Functionen $\varphi(n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{21})_\varepsilon$ $(\varepsilon = 23, 4, 01)$ lassen sich darstellen als rationale Functionen der Grössen

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}\right)_5} \quad (\varepsilon = 23, 4, 01)$$

wo zu den vorhin definirten Werthen von m und m' noch das Werthepaar $m = 0$, $m' = 0$ hinzukommt.

Um die übrigen repräsentirenden φ-Functionen $\varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ zu erhalten, stellen wir folgende Betrachtung an.

Sämmtliche lineare Transformationen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung zerfallen nach dem Modul 2 in 720 Classen. Unter diesen 720 Classen giebt es zwei und nur zwei, für welche die Functionen $\vartheta(v_1, v_2)_5$, $\vartheta(v_1, v_2)_{23}$, $\vartheta(v_1, v_2)_4$, $\vartheta(v_1, v_2)_{01}$ von gewissen Factoren abgesehen in sich selbst übergehen (siehe des Verf. Arbeit über die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung Math. Ann. Bd. XVII). Es sind dieses die Classen, deren Transformationen

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix}$$

die Eigenschaft haben, dass entweder ist:

1) $\mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{d}_3 \equiv 1 \bmod. 2$ während die anderen Zahlen durch zwei theilbar sind, oder aber:
2) $\mathfrak{a}_0 \equiv \mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{d}_3 \equiv \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_3 \equiv 1 \bmod. 2$ während die anderen Zahlen durch zwei theilbar sind.

Fügen wir noch die erfüllbaren Bedingungen hinzu, dass

$$\mathfrak{a}_0 \mathfrak{d}_0 + \mathfrak{b}_0 \mathfrak{c}_0 \equiv 0 \bmod. 8,$$
$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \equiv 0 \bmod. 8,$$
$$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{b}_1 \equiv 0 \bmod. 4$$

ist, so folgt, dass die Quotienten $\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{23}}{\vartheta(v_1, v_2)_5}$, $\frac{\vartheta(v_1, v_2)_4}{\vartheta(v_1, v_2)_5}$, $\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{01}}{\vartheta(v_1, v_2)_5}$ für diese Transformationen in sich selbst übergehen. (Siehe d. V. Arbeit über die lineare Transformation d. Annalen Bd. XVII.)

Wir wollen nun in den Gleichungen, die wir für $\varphi(n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})_\varepsilon$ fanden, links und rechts setzen an Stelle von $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ resp. $\mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}, \mathfrak{t}_{22}$, wobei ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}\,\mathfrak{t}_{11} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{02} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{02}\tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{02}\tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{02}\tau_{22} + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{02}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),\\
\mathfrak{N}\,\mathfrak{t}_{12} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{12} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{12}\tau_{11} + (2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{12} - 1)\tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{12}\tau_{22} + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{12}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),\\
\mathfrak{N}\,\mathfrak{t}_{22} &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{31} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{31}\tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{31}\tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{31}\tau_{22} + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{31}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}),\\
\mathfrak{N} \quad &= (\mathfrak{c}\mathfrak{d})_{23} + (\mathfrak{a}\mathfrak{c})_{23}\tau_{11} + 2(\mathfrak{b}\mathfrak{c})_{23}\tau_{12} + (\mathfrak{d}\mathfrak{b})_{23}\tau_{22} + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{23})\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})
\end{aligned}$$

und zunächst die linken Seiten betrachten. Eine einfache Betrachtung zeigt erstens, dass die Repräsentanten $\varphi(n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$, dann übergehen in andere repräsentirende φ-Functionen, sie zeigt ferner, dass durch richtige Wahl der Transformationszahlen die Grössen $\varphi(n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$ in beliebige repräsentirende φ-Functionen übergeführt werden. Wir deuten dieselbe nur an.

Seien:

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_0' & u_1' & u_2' & u_3' \\ v_0' & v_1' & v_2' & v_3' \\ w_0' & w_1' & w_2' & w_3' \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}$$

zwei beliebige Repräsentanten, so findet stets eine Gleichung von der Form statt:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_0' & u_1' & u_2' & u_3' \\ v_0' & v_1' & v_2' & v_3' \\ w_0' & w_1' & w_2' & w_3' \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0' & \mathfrak{a}_1' & \mathfrak{a}_2' & \mathfrak{a}_3' \\ \mathfrak{b}_0' & \mathfrak{b}_1' & \mathfrak{b}_2' & \mathfrak{b}_3' \\ \mathfrak{c}_0' & \mathfrak{c}_1' & \mathfrak{c}_2' & \mathfrak{c}_3' \\ \mathfrak{d}_0' & \mathfrak{d}_1' & \mathfrak{d}_2' & \mathfrak{d}_3' \end{vmatrix}$$

wo die zweite Determinante rechts wiederum eine lineare Transformation darstellt, deren Zahlen den Zahlen der ersten Determinante links nach dem Modul 2 congruent sind, für welche ferner:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_0'\mathfrak{d}_0' + \mathfrak{b}_0'\mathfrak{c}_0' &\equiv 0 \text{ mod. } 8,\\
\mathfrak{a}_1'\mathfrak{d}_1' + \mathfrak{b}_1'\mathfrak{c}_1' &\equiv 0 \text{ mod. } 8,\\
\mathfrak{c}_0'\mathfrak{d}_1' &\equiv 0 \text{ mod. } 4 \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis geliefert.

Aehnlich einfach gestaltet sich die Untersuchung der rechten Seite. Nehmen wir ganz allgemein die Function:

$$\frac{\vartheta\left(\dfrac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \dfrac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)}{\vartheta\left(\dfrac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \dfrac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_5}$$

und setzen an Stelle von τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} die vorhin definirten Ausdrücke, so ist dieses gleichbedeutend damit, als ob auf die Function:

$$\frac{\vartheta(v_1, v_2)_\varepsilon}{\vartheta(v_1, v_2)_5}$$

die lineare Transformation:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_0 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_0 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{d}_0 & \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 \end{vmatrix}$$

angewendet wird, vorausgesetzt, dass:

$$v_1 = \frac{M + M_1\tau_{11} + M_2\tau_{12}}{n}, \quad v_2 = \frac{M' + M_1\tau_{21} + M_2\tau_{22}}{n}$$

und:

$$\begin{aligned} M &= m\mathfrak{d}_3 - m_1\mathfrak{d}_0 - m_2\mathfrak{d}_1 + m'\mathfrak{d}_2, \\ M' &= m\mathfrak{c}_3 - m_1\mathfrak{c}_0 - m_1\mathfrak{c}_1 + m'\mathfrak{c}_2, \\ M_1 &= - m\mathfrak{a}_3 + m_1\mathfrak{a}_0 + m_2\mathfrak{a}_1 - m'\mathfrak{a}_2, \\ M_2 &= - m\mathfrak{b}_3 + m_1\mathfrak{b}_0 + m_2\mathfrak{b}_1 - m'b_2 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

II. Eine jede repräsentirende Function $\varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ ist eine rationale Function der Grössen

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{22}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_5}.$$

Hierbei können die Zahlen m, m_1, m_2, m' zu gleicher Zeit Null sein. Ebenso folgt der:

Lehrsatz. Sämmtliche Potenzsummen

$$\sum_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha$$

sind rationale Functionen der Grössen

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_5}.$$

Dieselben bleiben für eine jede lineare Transformation ungeändert, für welche die Functionen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ ungeändert bleiben.

Dieser Lehrsatz bildet die Grundlage weiterer Betrachtungen.

Rostock, den 1. September 1881.

Ueber besondre Lagen zweier Tetraeder.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Der bekannte Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke, welcher aussagt, dass *die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier als entsprechend gesetzten Dreiecke auf einer Geraden liegen, wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, und umgekehrt*, ist auf den Raum in zweierlei Form übertragen worden. Die erste von Poncelet*) herrührende Uebertragung:

> *Wenn zwei Tetraeder einander so entsprechen, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt laufen, so liegen die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder in einer Ebene; und umgekehrt*,

kommt zwar in der äusseren Form dem Desargues'schen Satze am nächsten, ist jedoch eigentlich nur ein specieller Fall des allgemeineren, von Chasles**) herrührenden Satzes:

> *Wenn zwei Tetraeder einander so entsprechen, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken einem Hyperboloide angehören, so gilt dasselbe von den Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder; und umgekehrt.*

Von diesem letzten Satze existiren nun verschiedene analytische Beweise***); aber aus allen diesen geht, wie mir scheint, das eigentliche Wesen dieses Satzes nicht recht hervor. Dieser Satz ist nämlich, wie ich gefunden habe, ein specieller Fall des folgenden umfassenden Satzes:

> *Jeder Geraden, welche die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier als entsprechend gesetzten Tetraeder gleichzeitig schneidet,*

---

*) S. Poncelet, traité des propriétés projectives, art. 582.

**) S. Chasles, aperçu historique, Note XXXII.

***) S. Cayley, Quarterly Journal of Mathem. Vol. I, p. 10. Ferrers, ibid. p. 191. Salmon, ibid. p. 241. Weddle, Cambridge and Dublin mathematical Journal, Vol. VI, p. 123. Hermes, Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 56, p. 218, wo der Satz zuerst in obiger Form ausgesprochen ist.

entspricht eindeutig eine Gerade, welche die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder gleichzeitig schneidet, und umgekehrt.

Zu diesem Satze muss man kommen, wenn man erwägt, dass der Desargues'sche Satz mit der centrischen Collineation der Ebene zusammenhängt, und demgemäss ein analoger Zusammenhang der räumlichen Analoga dieses Satzes mit gewissen speciellen Collineationen des Raumes zu erwarten ist. Für den Poncelet'schen Satz nun ist dieser Zusammenhang natürlich derselbe wie für den Desargues'schen, nämlich der mit der centrischen Collineation des Raumes. Wie verhält es sich aber in dieser Beziehung mit dem Chasles'schen Satze?

Nun hat von speciellen Collineationen des Raumes ausser der centrischen bisher wohl nur die sogenannte geschaarte*) die besondere Aufmerksamkeit der Geometer erregt. In einer solchen Collineation giebt es bekanntlich zwei Axen, deren sämmtliche Punkte und Ebenen sich selbst entsprechen, so dass alle Verbindungslinien entsprechender Punkte und Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Räume diese beiden Axen schneiden. Eine solche Collineation aber ist eindeutig bestimmt, wenn drei Punkten A, B, C des einen Raumes drei Punkte A_1, B_1, C_1 des andern Raumes als entsprechend zugewiesen sind. In dieser Collineation muss nämlich das durch die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 gehende Hyperboloid sich selbst entsprechen, und eine Collineation, welche ein gegebenes Hyperboloid in sich selbst überführen soll, ist dadurch bestimmt, dass drei Punktepaare desselben als entsprechend gesetzt sind**). Sind also A, B, C, D und A_1, B_1, C_1, D_1 die Ecken der beiden hyperboloidisch liegenden Tetraeder (Chasles'scher Satz), so entspricht in derjenigen geschaarten Collineation, in welcher den Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1 entsprechen, dem Punkte D wohl ein Punkt der Geraden DD_1, aber im Allgemeinen nicht der Punkt D_1 selbst. Die hyperboloidische Lage zweier Tetraeder lässt sich also mit einer geschaarten Collineation im Allgemeinen nicht in Zusammenhang bringen.

Nun ist in der That die geschaarte Collineation des Raumes nicht diejenige, welche der allgemeinen am nächsten steht. Dies ist vielmehr diejenige, in welcher es nur eine Punktreihe (g) sich selbst entsprechender Punkte und demgemäss auch ein und nur ein Ebenenbüschel $[h]$ sich selbst entsprechender Ebenen giebt; offenbar schneiden alle Verbindungslinien entsprechender Punkte die Axe h und alle Schnittlinien entsprechender Ebenen die Axe g, so dass der dieser Collineation zugehörige Reye'sche Complex in zwei specielle lineare

---

*) S. Reye, Geometrie der Lage, 2. Aufl., II. Bd., p. 132. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, 3. Aufl., I. Bd., p. 44. Staudt, Beiträge, p. 63.

**) S. Zeuthen, Mathemat. Annalen, Bd. XVIII, p. 41.

Complexe zerfällt. Wir wollen diese Collineation die *axiale* nennen. Dann lässt sich zeigen, dass *es im Allgemeinen zwei axiale Collineationen giebt, welche vier gegebene Punkte A, B, C, D in vier andere A_1, B_1, C_1, D_1 überführen;* dieselbe Collineation führt dann gleichzeitig die Ebenen $\alpha = BCD$, $\beta = CDA$, $\gamma = DAB$, $\delta = ABC$ in die Ebenen $\alpha_1 = B_1C_1D_1$, $\beta_1 = C_1D_1A_1$, $\gamma_1 = D_1A_1B_1$, $\delta_1 = A_1B_1C_1$ über. Die Axe h einer solchen Collineation muss nämlich eine der beiden Geraden sein, welche die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gleichzeitig schneiden, und ebenso die zugehörige Axe g eine der beiden Geraden, welche die Geraden $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ gleichzeitig schneiden. Sind nun $\varkappa$ und λ irgend zwei Ebenen durch h, welche nicht durch A und A_1 gehen, so ist dadurch, dass man den Ebenen $\beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda$ die Ebenen $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varkappa, \lambda$ als entsprechend zuweist, eine der gesuchten axialen Collineationen bestimmt. Zunächst nämlich entspricht in dieser Collineation die Gerade $h = \varkappa\lambda$ sich selbst; da ferner der Punkt $A_1 = \beta_1\gamma_1\delta_1$ dem Punkte $A = \beta\gamma\delta$ entspricht, so entspricht auch die Ebene $hA = hA_1$ sich selbst, so dass es in dem Bündel $[h]$ drei sich selbst entsprechende Ebenen giebt. Es entspricht also jede Ebene des Büschels $[h]$ sich selbst, unsere Collineation ist also eine axiale. Weiter aber entsprechen den Geraden $\beta\gamma = DA$, $\gamma\delta = BA$, $\delta\beta = CA$ die Geraden $\beta_1\gamma_1 = D_1A_1$, $\gamma_1\delta_1 = B_1A_1$, $\delta_1\beta_1 = C_1A_1$, es entsprechen also, da die Ebenen $hD = hD_1$, $hB = hB_1$, $hC = hC_1$ sich selbst entsprechen, den Punkten D, B, C die Punkte D_1, B_1, C_1. Die Collineation ist also in der That eine der gesuchten; bei der Bestimmung derselben sind wir nun von einer Axe h ausgegangen, welche die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gleichzeitig schneidet, und wir wissen dann, dass die Schnittlinien entsprechender Ebenen, also auch die Geraden $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ die zweite Axe g der definirten axialen Collineation gleichzeitig schneiden. Es ist evident, dass der duale Ausgang von dieser Axe g zu derselben Collineation führt. Hiermit ist also das oben behauptete eindeutige Entsprechen der Geraden, welche AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, und derjenigen, welche $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ gleichzeitig schneiden, nachgewiesen. Je zwei einander dieser Art entsprechende Geraden sind die beiden Axen einer axialen Collineation, welche die Punkte A, B, C, D in die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 oder die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in die Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ überführt; solche Collineationen giebt es demnach im Allgemeinen zwei, einfach unendlich viel für die hyperboloidische Lage der beiden Tetraeder und doppelt unendlich viel für die perspectivische Lage derselben. Uebrigens ergiebt sich auch noch folgender besondere Satz, der insofern dem Desargues'schen Satze am meisten entspricht, als er, wie dieser für die beiden Dreiecke, für die beiden Tetraeder nur eine Bedingung erfordert, nämlich:

Wenn zwei Tetraeder einander so entsprechen, dass es nur eine Gerade giebt, welche die Verbindungslinien entsprechender Ecken derselben gleichzeitig trifft, so giebt es auch nur eine Gerade, welche die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder gleichzeitig trifft; und umgekehrt.

Allerdings kann keiner dieser Sätze in jeder Beziehung als Verallgemeinerung des Desargues'schen Satzes gelten. Denn es können z. B. zwei Tetraeder in keine der erwähnten speciellen Lagen auf alle mögliche, d. h. auf 24 Arten gebracht werden*). Immerhin aber dürften die vorstehenden Betrachtungen insofern von Interesse sein, als sie das eigentliche Wesen dieser Sätze, welches im Zusammenhange mit der axialen Collineation des Raumes besteht, hervortreten lassen.

Leipzig, Mitte October 1881.

---

*) S. Rosanes, Mathem. Annalen, Bd. II, p. 549. Schröter, ibid. p. 553.

Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung*).

Von

K. Nagel in Ossenheim.

Sind $x_1|x_2|x_3$ die homogenen Coordinaten eines Punktes der rationalen Curve vierter Ordnung, deren Gleichung gegeben ist durch:

$$x_1 = f_1(\lambda_1\lambda_2);\quad x_2 = f_2(\lambda_1\lambda_2);\quad x_3 = f_3(\lambda_1\lambda_2),$$

wo

$$f_i(\lambda_1\lambda_2) = a_i\lambda_1^4 + b_i\lambda_1^3\lambda_2 + c_i\lambda_1^2\lambda_2^2 + d_i\lambda_1\lambda_2^3 + e_i\lambda_2^4,\quad i = 1,2,3,$$

so entspricht ein Doppelpunkt der C^4 jedem Parameterpaar $(\varkappa\lambda)$, das dem System der 3 Gleichungen

$$\begin{vmatrix} f_2(\lambda_1\lambda_2) & f_2(\varkappa_1\varkappa_2) \\ f_3(\lambda_1\lambda_2) & f_3(\varkappa_1\varkappa_2) \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} f_3(\lambda_1\lambda_2) & f_3(\varkappa_1\varkappa_2) \\ f_1(\lambda_1\lambda_2) & f_1(\varkappa_1\varkappa_2) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(\lambda_1\lambda_2) & f_1(\varkappa_1\varkappa_2) \\ f_2(\lambda_1\lambda_2) & f_2(\varkappa_1\varkappa_2) \end{vmatrix} = 0$$

genügt, von denen die eine von den beiden andern nicht unabhängig ist.

Der Werth $(\varkappa = \lambda)$ ist illusorisch. Nach Division der Gleichungen durch $(\lambda_1\varkappa_2 - \varkappa_1\lambda_2)$ erhält man, wenn man nach symmetrischen Functionen von $(\varkappa\lambda)$ ordnet, sodann die Coefficienten

$$a_ib_k - a_kb_i = (a_ib_k)\quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3)$$

und die Grössen

$$\lambda_2\lambda_1 = x,\quad \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_1\lambda_1 = y,\quad \varkappa_2\lambda_2 = z$$

setzt:

$$\begin{aligned} &(a_2b_2)x^3+(a_2c_3)x^2y+(a_2d_3)xy^2+(a_2e_2)y^3+\{(b_2c_3)-(a_2d_3)\}x^2z+\{(b_2d_3)-2(a_2e_3)\}xyz \\ &\qquad +(b_2e_3)y^2z+\{(c_2d_3)-(b_2e_3)\}xz^2+(c_2e_3)yz^2+(d_2e_3)z^3=0, \\ &(a_3b_1)x^3+(a_3c_1)x^2y+\cdots \qquad =0, \\ &(a_1b_2)x^3+(a_1c_2)x^2y+\cdots \qquad =0. \end{aligned}$$

Componirt man das System dieser Gleichungen nach einander mit:

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,$

(2) $e_1,\ e_2,\ e_3,$

(3) $d_1,\ d_2,\ d_3$

und bezeichnet die Coefficienten: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

mit $(abc) = -(acb) = (bca) = -(bac) = (cab) = -(cba)$

---

*) Man vergleiche die Arbeit von **Brill**: Ueber rationale Curven vierter Ordnung, Math. Ann., Bd. XII, p. 90 ff.

so erhält man nach Division durch z die Gleichung:

$$\text{(I)}\quad (abc)x^2 + (abe)y^2 + (ade)z^2 + (ace)yz + \{(acd) - (abe)\}zx + (abd)xy = 0,$$

nach Division durch x die Gleichung:

$$\text{(III)}\quad (abe)x^2 + (ade)y^2 + (cde)z^2 + (bde)yz + \{(bcc) - (ade)\}zx + (ace)xy = 0,$$

schliesslich:

$$(2)\quad (abd)x^3 - (ade)y^3 - (bde)y^2z - (cde)yz^2 + (bcd)x^2z + (bde)xz^2 + (acd)x^2y + 2(ade)xyz = 0.$$

Durch Addition der mit y multiplicirten (III) zu Gleichung (2) ergiebt sich nach Division der Summe durch x die Gleichung:

$$\text{(II)}\quad (abd)x^2 + (ace)y^2 + (bde)z^2 + \{(bce) + (ade)\}yz + (bcd)zx + \{(acd) + (abe)\}xy = 0.$$

Ich löse das System der drei Gleichungen (I), (II), (III) nach x, y, z auf folgende Weise.

Wären $x|y|z$ die Coordinaten eines Punktes und den Gleichungen unseres Systems unterworfen, so wäre die Aufgabe, das obige System nach $x|y|z$ aufzulösen, gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Schnittpunkte dreier Kegelschnitte zu finden.

Eine Gerade, welche durch den Punkt $x|y|z$ geht, hat die Gleichung

$$\text{(IV)}\qquad ux + vy + wz = 0;$$

soll $x|y|z$ ein Schnittpunkt der 3 Kegelschnitte sein, so muss er auch den 3 Gleichungen (I), (II), (III) genügen.

Das Resultat der Elimination der 6 Potenzen und Producte der x, y, z aus (I), (II), (III) und aus den durch successive Multiplication mit x, y, z aus (IV) erhaltenen 3 Gleichungen ist die Determinante 3^{ten} Grades in u, v, w:

$$\begin{vmatrix} (abc) & (abe) & (ade) & (ace) & (acd)-(abe) & (abe) \\ (abd) & (ace) & (bde) & (bce)+(ade) & (bcd) & (ace) \\ (abe) & (ade) & (cde) & (bde) & (bce)-(ade) & (ade) \\ u & 0 & 0 & 0 & w & v \\ 0 & v & 0 & w & 0 & u \\ 0 & 0 & w & v & u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche in 3 lineare Factoren zerfällt, da Determ. $= 0$ die Gleichung des Strahlenbüschels der 3 Geraden ist, welche die gemeinschaftlichen Punkte der drei Kegelschnitte enthalten. Da die Coefficienten von u, v, w einer jeden Geraden die Coordinaten $x|y|z$ eines Schnittpunktes unserer Kegelschnitte sind, so liefert die eben aufgestellte Gleichung 3^{ten} Grades durch Zerlegung in ihre Factoren die 3 zusammengehörigen Werthe der symmetrischen Functionen der Parameterpaare $(\varkappa_1\lambda_1,\ \varkappa_1\lambda_2 + \varkappa_2\lambda_1,\ \varkappa_2\lambda_2)$ eindeutig und auf einmal.

Ossenheim bei Friedberg i. H., im October 1881.

Das Integral $\int\limits_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen.

Von

Enno Jürgens in Halle a. d. Saale.

Wenn man die Function $\int\limits_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ nach fallenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x entwickelt, so wird der Coefficient von $\frac{1}{x^\nu}$ das Integral $\int\limits_\alpha^\beta y z^{\nu-1}\,dz$, welches dann durch partielle Integration in einen von der Integration freien Theil und in $\int\limits_\alpha^\beta \frac{d^m y}{dz^m} z^{\nu+m-1}\,dz$ umgewandelt werden kann, so dass also umgekehrt jedes Integral von der Form $\int\limits_\alpha^\beta z^\mu \frac{d^m y}{dz^m}\,dz$ einem Coefficienten der genannten Reihenentwickelung vermehrt um einen Ausdruck, welcher nur von den Werthen der Function y und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen an den Grenzen der Integration und diesen Grenzen selbst abhängt, gleich wird. Genügt nun die Function y einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, so erhält man zwischen jenen Coefficienten eine recurrente Beziehung, indem man die Differentialgleichung mit einer Potenz von z multiplicirt und nach z zwischen den Grenzen α und β integrirt. Diese Beziehung enthält ausserdem nur noch einen Theil, der verschwindet, sowie die Werthe α und β zusammenfallen und der dann geschlossene Weg die Function y ungeändert lässt. Da aber bekanntlich unter dieser Voraussetzung, wenn noch gewisse Nebenbedingungen erfüllt sind, der Ausdruck $\int\limits_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ die auf die unabhängige Veränderliche x bezogene Function y wieder erzeugt, so genügt er derjenigen Differentialgleichung, welche aus der obigen durch Vertauschung von z und x entsteht; folglich werden auch in dem allgemeinen Falle des beliebigen geschlossenen oder nicht geschlossenen Integrationsweges beim Einsetzen der die Function $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{y\,dz}{x-z}$ darstellenden Reihenentwickelung in die linke Seite dieser Differentialgleichung alle Coefficienten sich wegheben, sobald die erwähnte recurrente Beziehung in Kraft tritt, und nur die ersten Coefficienten nebst einem von der Integration freien Ausdrucke übrig bleiben. Bei näherer Prüfung stellt sich das ganze Substitutionsresultat als eine rationale Function von x heraus, deren echt gebrochener Theil keine Integrale mehr enthält, während in der ganzen Function allerdings noch Integrale, jedoch nur als Constanten vorkommen.

Nachdem dieser Satz, welcher für die Differentialgleichung zweiter Ordnung bereits Heine (Borch. Journ. Bd. 60, pag. 259) als Ausgangspunkt interessanter Untersuchungen gedient hat, im § 1. dieser Abhandlung, wie angedeutet, und in § 2. auf einem anderen Wege hergeleitet worden ist, wird gezeigt, unter welchen Umständen das Substitutionsresultat der Null oder doch dem einfachsten Bruche $\frac{1}{x-a}$ gleich wird. Auf diese Weise ergeben sich einerseits Differentialgleichungen, welche wie die Differentialgleichung der Kugelfunctionen die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit besitzen, dass der Ausdruck $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{y\,dz}{x-z}$, wenn ein Integral der Differentialgleichung bekannt ist, sofort ein zweites liefert; andererseits erhält man für eine ausgedehnte Classe von linearen Differentialgleichungen ein bequemes Integrationsverfahren, wenn auf der rechten Seite eine rationale Function von x steht. Also kann auch diese Abhandlung als ein Beitrag zur Behandlung der linearen Differentialgleichungen, deren zweites Glied eine rationale Function ist, angesehen werden; denn die sonst üblichen Methoden der Variation der Constanten und der Darstellung durch ein vielfaches Integral leiden, wie es ihrer allgemeinen Gültigkeit wegen auch nicht anders möglich ist, an erheblicher Umständlichkeit und verwickelter Form des Resultates, und darum hat es Interesse, wenn für die einzelnen Classen von nicht homogenen Differentialgleichungen noch besondere Methoden abgeleitet werden.

§ 1.

Bei der Bezeichnung

$$a_\nu = \int_\alpha^\beta z^{\nu-1} y \, dz$$

ergiebt sich durch wiederholte partielle Integration die Formel

$$(1) \quad \int_\alpha^\beta z^\mu \frac{d^m y}{dz^m} dz = (-1)^m \mu \cdot \mu - 1 \cdots \mu - m + 1 \cdot a_{\mu-m+1}$$
$$+ \left[\frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} z^\mu - \mu \cdot \frac{d^{m-2} y}{dz^{m-2}} z^{\mu-1} + \mu \cdot \mu - 1 \cdot \frac{d^{m-3} y}{dz^{m-3}} z^{\mu-2} \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{m-1} \mu \cdot \mu - 1 \cdots \mu - m + 2 \cdot y z^{\mu-m+1} \right]_\alpha^\beta .$$

Genügt nun die Function y einer homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$(2) \qquad \varphi(z) y + \varphi_1(z) \frac{dy}{dz} + \cdots + \varphi_n(z) \frac{d^n y}{dz^n} = 0,$$

welche, wenn

$$\varphi_m(z) = a_{m0} + a_{m1} z + \cdots + a_{mr} z^r + \cdots$$

ist, kurz in der Form

$$\sum_m \sum_r a_{mr} z^r \frac{d^m y}{dz^m} = 0$$

geschrieben werden kann, so erhält man, indem man die Differentialgleichung mit $z^{k-1} dz$, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, multiplicirt und nach z zwischen den Grenzen α und β integrirt, unter Benutzung von (1) für die Grössen a_ν die folgende Recursionsformel:

$$(3) \quad \sum_m (-1)^m \sum_r a_{mr}\, r + k - 1 \cdot r + k - 2 \cdots r + k - m \cdot a_{r+k-m}$$
$$+ \sum_m \sum_r a_{mr} \left[\frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} z^{r+k-1} - r + k - 1 \cdot \frac{d^{m-2} y}{dz^{m-2}} z^{r+k-2} \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{m-1} r + k - 1 \cdot r + k - 2 \cdots r + k - m + 1 \cdot y z^{r+k-m} \right]_\alpha^\beta = 0.$$

Mit Hülfe der Grössen a_ν werde nun die Reihe

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{x^\nu}$$

gebildet; sie stellt für grosse Werthe von x die Entwickelung von folgender Function dar:

$$\sigma = \int_\alpha^\beta \frac{y \, dz}{x - z} .$$

Es soll untersucht werden, welches das Substitutionsresultat ist, wenn man in die Differentialgleichung (2) nach Vertauschung von z mit x die Function σ einsetzt. Wird dasselbe mit $D(\sigma)$ bezeichnet, so ist

$$D(\sigma)=\sum_m \varphi_m(x)\,\frac{d^m\sigma}{dx^m}$$

oder

$$D(\sigma)=\sum_m\sum_r\sum_\nu a_{mr}\,\nu\cdot\nu+1\cdots\nu+m-1\cdot\frac{a_\nu}{x^{\nu+m-r}}$$

oder

$$D(\sigma)=\sum_k\frac{1}{x^k}\sum_m(-1)^m\sum_r a_{mr}\,r+k-1\cdot r+k-2\cdots r+k-m\cdot a_{r+k-m}$$

Der Index k durchläuft hier alle ganzen Zahlen von dem kleinsten Werthe an, den $m-r+1$ überhaupt annimmt; für alle positiven Werthe gilt die Gleichung (3), folglich geht $D(\sigma)$ über in:

$$D(\sigma)=G(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}\sum_m\sum_r a_{mr}\Big[\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}}z^{r+k-1}-r+k-1\cdot\frac{d^{m-2}y}{dz^{m-2}}z^{r+k-2}$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}r+k-1\cdot r+k-2\cdots r+k-m+1\cdot y\,z^{r+k-m}\Big]_{\alpha}^{\beta},$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von x, nämlich denjenigen ganzen rationalen Bestandtheil, welcher beim Einsetzen von $\sum\limits_\nu \frac{a_\nu}{x^\nu}$ statt η in die linke Seite der Differentialgleichung

$$(4)\qquad \varphi(x)\eta+\varphi_1(x)\frac{d\eta}{dx}+\cdots+\varphi_n(x)\frac{d^n\eta}{dx^n}=0$$

auftritt, bedeutet.

Die beiden Summationen nach k und r lassen sich leicht ausführen; dadurch wird

$$(5)\quad D(\sigma)=G(x)+\sum_m\Big[\frac{d^{m-1}y}{dz^{m-1}}\varphi_m(z)\frac{1}{x-z}-\frac{d^{m-2}y}{dz^{m-2}}\frac{d}{dz}\Big(\varphi_m(z)\frac{1}{x-z}\Big)$$
$$+\frac{d^{m-3}y}{dz^{m-3}}\frac{d^2}{dz^2}\Big(\varphi_m(z)\frac{1}{x-z}\Big)+\cdots+(-1)^{m-1}y\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(\varphi_m(z)\frac{1}{x-z}\Big)\Big]_{\beta}^{\alpha}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Substitutionsresultat $D(\sigma)$ eine einfache rationale Function von x ist.

Wir haben damit folgenden Satz bekommen:

Wenn man in die linke Seite der Differentialgleichung (4) *für die abhängige Veränderliche den Ausdruck* $\int^{\beta}\frac{y\,dz}{x-z}$, *in welchem die Function*

y ein Integral der Differentialgleichung (2) *bedeutet, einsetzt, so ist das Resultat eine rationale Function von x.*

Es mag noch bemerkt werden, dass statt der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{x^\nu}$ jede andere Reihenentwickelung der Function σ hätte benutzt werden können; die Beschränkung, welche sich für die Lage der unabhängigen Veränderlichen x dabei anfangs ergiebt, fällt zum Schlusse immer fort, weil ja, wie Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen lehrt, eine analytische Function für ihren ganzen Gültigkeitsbereich einer Differentialgleichung genügt, wenn sie es für irgend ein zweifach ausgedehntes Stück desselben thut. Uebrigens wird im nächsten Paragraphen noch eine neue, von Reihenentwickelungen gänzlich unabhängige Herleitung gebracht.

§ 2.

Einen anderen Beweis erhält man durch Zusammenstellung des Differentialausdruckes

$$D(y; x) = \sum_m \varphi_m(x) \frac{d^m y}{dx^m}$$

mit seinem adjungirten

$$\mathfrak{D}(\eta; x) = \sum_m (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \big(\varphi_m(x)\, \eta\big).$$

Dann ist bekanntlich (vgl. Jacobi, Math. Werke, Bd. I, pag. 367) für unbestimmte Functionen y und η der Ausdruck $\eta D(y; x) - y\mathfrak{D}(\eta; x)$ ein vollständiges Differential, nämlich

$$\eta D(y; x) - y\,\mathfrak{D}(\eta; x) = \frac{d}{dx} P(y, \eta; x),$$

wenn man setzt

$$P(y, \eta; x) = \sum_m \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \varphi_m(x)\, \eta - \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} \frac{d}{dx} \big(\varphi_m(x)\, \eta\big) + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} y \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \big(\varphi_m(x)\, \eta\big).$$

Folglich ist, wenn die Function y der Differentialgleichung $D(y; x) = 0$ genügt,

$$- y\,\mathfrak{D}(\eta; x) = \frac{d}{dx} P(y, \eta; x)$$

und im Besonderen

$$(1) \qquad - y\,\mathfrak{D}\Big(\frac{1}{z-x}; x\Big) = \frac{d}{dx} P\Big(y, \frac{1}{z-x}; x\Big).$$

Andererseits ist

$$D\left(\frac{1}{z-x};\ z\right)-\mathfrak{D}\left(\frac{1}{z-x};\ x\right)=\sum_m \varphi_m(z)\,\frac{d^m}{dz^m}\,\frac{1}{z-x}-(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\varphi_m(x)}{z-x}$$

oder da

$$\frac{d^m}{dz^m}\,\frac{1}{z-x}=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{1}{z-x}$$

ist,

$$D\left(\frac{1}{z-x};\ z\right)-\mathfrak{D}\left(\frac{1}{z-x};\ x\right)=\sum_m (-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\varphi_m(z)-\varphi_m(x)}{z-x}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit y und führt der Kürze halber die Bezeichnung ein

$$\Psi=\sum_m (-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\varphi_m(z)-\varphi_m(x)}{z-x},$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (1)

$$y\,D\left(\frac{1}{z-x};\ z\right)=-\frac{d}{dx}\,P\left(y,\ \frac{1}{z-x};\ x\right)+y\,\Psi.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration

$$\int_\alpha^\beta y\,D\left(\frac{1}{z-x};\ z\right)dx=\left[P\left(y,\ \frac{1}{z-x};\ x\right)\right]_\beta^\alpha+\int_\alpha^\beta y\,\Psi\,dx.$$

Indem wir noch die Buchstaben x und z mit einander vertauschen und beachten, dass $\int_\alpha^\beta y\,D\left(\frac{1}{x-z};\ x\right)dz$ nichts anderes ist als die Grösse, welche in der vorigen Nummer mit $D(\sigma)$ bezeichnet wurde, können wir das hergeleitete Resultat folgendermassen aussprechen:

Wenn die Function y der Differentialgleichung

$$(2)\qquad \varphi(z)y+\varphi_1(z)\frac{dy}{dz}+\cdots+\varphi_n(z)\frac{d^ny}{dz^n}=0$$

genügt, und man setzt in die aus ihr durch Vertauschung von z und x hervorgehende Differentialgleichung

$$(3)\qquad \varphi(x)y+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\cdots+\varphi_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

für die abhängige Veränderliche das Integral $\int_\alpha^\beta\frac{y\,dz}{x-z}$ ein, so ist das Substitutionsresultat gleich

$$(4)\qquad \left[P\left(y, \frac{1}{x-z};\ z\right)\right]_{\beta}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} y \Psi\, dz,$$

wo

$$(5)\quad P\left(y, \frac{1}{x-z};\ z\right) = y\varphi_1(z)\,\frac{1}{x-z}$$

$$+ \frac{dy}{dz}\,\varphi_2(z)\,\frac{1}{x-z} - y\,\frac{d}{dz}\left(\varphi_2(z)\,\frac{1}{x-z}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\,\varphi_n(z)\,\frac{1}{x-z} - \frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}\,\frac{d}{dz}\left(\varphi_n(z)\,\frac{1}{x-z}\right) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} y\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\varphi_n(z)\,\frac{1}{x-z}\right),$$

$$(6)\quad \Psi = \frac{\varphi(x)-\varphi(z)}{x-z} - \frac{d}{dz}\,\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(z)}{x-z} + \cdots + (-1)^n\,\frac{d^n}{dz^n}\,\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(z)}{x-z}.$$

Der erste Theil ist eine echt gebrochene Function von x; der andere Theil ist eine ganze rationale Function von x, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung ganze rationale Functionen von x sind, und trägt bei der allgemeineren Annahme, dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der Nähe des Nullpunktes den Charakter ganzer Functionen von x haben, ebenfalls diesen Charakter.

§ 3.

Wir untersuchen, unter welchen Umständen der zweite Theil

$$G(x) = \int_{\alpha}^{\beta} y\,\Psi\, dz$$

wegfällt.

Zunächst ist klar, dass derselbe nicht vorhanden ist, wenn der Grad von $\varphi_m(x)$, den wir durch k_m bezeichnen, nicht grösser als m ist. Ueberhaupt erkennt man unmittelbar, dass der Grad der Function $G(x)$ nicht grösser als der grösste Werth, den für $m = 1, 2, \cdots, n$ die Zahl $k_m - m - 1$ annimmt, sein kann.

Wir setzen wieder

$$\varphi_m(x) = a_{m0} + a_{m1}\, x + \cdots + a_{mr}\, x^r + \cdots$$

Dann ist

$$\frac{\varphi_m(x) - \varphi_m(z)}{x-z} = a_{m1} + a_{m2}(x+z) + \cdots + a_{mr}(x^{r-1} + x^{r-2}z + \cdots + z^{r-1}) + \cdots,$$

also, wenn $m!$ das Product $1 \cdot 2 \cdots m$ bezeichnet,

$$\frac{d^m}{dz^m}\,\frac{\varphi_m(x)-\varphi_m(z)}{x-z}=a_{m\,m+1}m!+a_{m\,m+2}\Big(m!\,x+\frac{m+1!}{1!}\,z\Big)+\cdots$$
$$+a_{m\,m+s}\Big(m!\,x^{s-1}+\frac{m+1!}{1!}x^{s-2}z+\frac{m+2!}{2!}x^{s-3}z^2+\cdots$$
$$+\frac{m+s-1!}{s-1!}z^{s-1}\Big)\cdots$$

Folglich ist

$$(1)\quad \int\limits_\alpha^\beta y\Psi\,dz=\int\limits_\alpha^\beta y\,dz\sum_m(-1)^m\cdot m!\,\Big\{a_{m\,m+1}+a_{m\,m+2}\Big(x+\frac{m+1}{1}\,z\Big)+\cdots$$
$$+a_{m\,m+s}\Big(x^{s-1}+\frac{m+1}{1}x^{s-2}z+\frac{m+1\cdot m+2}{1\cdot 2}x^{s-3}z^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{m+1\cdot m+2\cdots m+s-1}{1\cdot 2\cdots s-1}z^{s-1}\Big)+\cdots\Big\}.$$

Wenn nun $\int\limits_\alpha^\beta y\,\Psi\,dz$ ganz unabhängig davon, was β und x ist, verschwinden soll, so müssen alle Coefficienten des nach Potenzen von x und z geordneten Ausdruckes Ψ Null sein. Denn durch Differentiation nach β ergiebt sich $y\cdot\Psi=0$ für jedes z bei beliebigem x, also $\Psi=0$ für jedes x und z. Folglich müssen dann für $s=1, 2, 3\cdots$ die Gleichungssysteme bestehen:

$$(2)\quad \begin{array}{llll}
a_{0s}-a_{1\,s+1} & +2!\,a_{2\,s+2} & -\cdots+(-1)^n n!\,a_{n\,n+s} & =0,\\
a_{0s}-2!\,a_{1\,s+1} & +3!\,a_{2\,s+2} & -\cdots+(-1)^n n+1!\,a_{n\,n+s} & =0,\\
a_{0s}-\frac{3!}{2!}\,a_{1\,s+1} & +\frac{4!}{2!}\,a_{2\,s+2} & -\cdots+(-1)^n\frac{n+2!}{2!}\,a_{n\,n+s} & =0,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\\
a_{0s}-\frac{s!}{s-1!}\,a_{1\,s+1} & +\frac{s+1!}{s-1!}\,a_{2\,s+2} & -\cdots+(-1)^n\frac{n+s-1!}{s-1!}\,a_{n\,n+s} & =0.
\end{array}$$

Das sind s lineare homogene Gleichungen in den $n+1$ Grössen $a_{0s}, a_{1\,s+1}, \cdots, a_{n\,n+s}$; fassen wir die s ersten von ihnen als die Unbekannten auf, so ist die Determinante des Gleichungssystems von Null verschieden, denn sie hat den Werth $(-1)^{\frac{s\cdot s-1}{1\cdot 2}}\cdot 1!\,2!\,3!\cdots s-1!$; folglich lassen sich die Gleichungen sämmtlich nur befriedigen, so lange $s<n$ ist.

Setzt man der Einfachheit wegen

$$x_1=a_{0s};\quad x_2=-a_{1\,s+1};\;\cdots\; x_{n+1}=(-1)^n n!\,a_{n\,n+s},$$

so geht das System, wenn l_i als Zeichen eines Binomialcoefficienten gebraucht wird, über in

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \quad + x_3 \qquad + \cdots + x_{n+1} &&= 0,\\
&x_1 + 2x_2 \quad + 3x_3 \qquad + \cdots + n + 1 \cdot x_{n+1} &&= 0,\\
&x_1 + 3_2 x_2 \quad + 4_2 x_3 \qquad + \cdots + (n+2)_2\, x_{n+1} &&= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_1 + s_{s-1} x_2 + (s+1)_{s-1} x_3 + \cdots + (n+s-1)_{s-1} x_{n+1} &&= 0.
\end{aligned}$$

Dasselbe ist äquivalent, wie man erkennt, wenn man jede Gleichung von der auf sie folgenden abzieht und dieses Verfahren wiederholt, dem Systeme

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \quad + x_3 \qquad + \cdots + x_{n+1} &&= 0,\\
&x_2 + 2x_3 \quad + 3x_4 \qquad + \cdots + n x_{n+1} &&= 0,\\
&x_3 + 3_2 x_4 \quad + 4_2 x_5 \qquad + \cdots + n_2 x_{n+1} &&= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_s + s_{s-1} x_{s+1} + (s+1)_{s-1} x_{s+2} + \cdots + n_{s-1} x_{n+1} &&= 0,
\end{aligned}$$

welches unmittelbar aufzulösen ist und für x_i den Werth liefert:

$$(-1)^{s+i-1} \cdot x_i = \sum_\lambda \lambda_{i-1} \cdot (\lambda - i)_{s-i}\, x_{\lambda+1},$$

$$\lambda = s,\ s+1,\ \cdots n.$$

Folglich ist

$$a_{i-1\ i-1+s} = \sum_\lambda (-1)^{\lambda-s} \lambda_{i-1} (\lambda - i)_{s-i} \frac{\lambda!}{i-1!} a_{\lambda\,\lambda+s},$$

wofür bequemer noch geschrieben werden kann:

$$a_{i\,i+s} = \sum_\lambda (-1)^{\lambda-s} \lambda_i^2 \cdot (\lambda - i)!\,(\lambda - i - 1)_{\lambda-s}\, a_{\lambda\,\lambda+s}, \tag{3}$$

wo

$$\lambda = s,\ s+1,\ \cdots,\ n$$

und der Index i jeden der Werthe $0, 1, 2, \cdots, s-1$ annimmt.

Wenn wir in dieser Formel der Zahl s der Reihe nach die Werthe $1, 2, \cdots, n$ ertheilen, so erhalten wir die allgemeinste Differentialgleichung, für welche ganz unabhängig von der Wahl des particulären Integrales y und der beiden Integrationsgrenzen α und β die ganze Function $G(x)$ identisch verschwindet; sie enthält $n(n+1)$ willkürliche Constanten.

Gehört aber die zu Grunde liegende Differentialgleichung nicht in die eben betrachtete Classe, so muss man, um die ganze Function $G(x)$ zum Verschwinden zu bringen, entweder das particuläre Integral y geeignet wählen oder statt der einen Grösse σ ein lineares homogenes Aggregat solcher Grössen einführen.

Die grösste unter den Zahlen $k_m - m - 1$ habe den Werth K und der Grad von $G(x)$ sei k; im Allgemeinen stimmen K und k überein, in sehr vielen Fällen jedoch ist k erheblich kleiner als K; so lange freilich die Integrationsgrenzen α und β unbestimmt bleiben, kann die Differenz, wie die Gleichungen (1) und (2) lehren, nicht über n hinausgehen, während dieses bei besonderen Werthen von α und β möglich ist.

Es sei

$$G(x) = g_0 + g_1 x + \cdots + g_k x^k.$$

Dann ist

$$g_i = \int_\alpha^\beta y \, dz \sum_m (-1)^m m! \, \{a_{m\,m+i+1} + (m+1)_1 \, a_{m\,m+i+2} z$$
$$+ (m+2)_2 \, a_{m\,m+i+3} z^2 + \cdots + (k_m - i - 1)_m \, a_{m\,k_m} z^{k_m - m - i - 1}\}.$$

Im Falle $k < n - 1$ kann man das Integral y so wählen, dass $G(x)$ wegfällt.

Denn wenn $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen bedeutet und zu η_i die Function

$$G^{(i)}(x) = g_0^{(i)} + g_1^{(i)} x + \cdots + g_k^{(i)} x^k$$

gehört, so braucht man nur die Constanten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ als Lösungen des Gleichungssystemes

$$g_0' c_1 + g_0'' c_2 + \cdots + g_0^{(n)} c_n = 0,$$
$$g_1' c_1 + g_1'' c_2 + \cdots + g_1^{(n)} c_n = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$g_k' c_1 + g_k'' c_2 + \cdots + g_k^{(n)} c_n = 0$$

zu bestimmen, damit für das Integral

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_n \eta_n$$

die Function $G(x)$ verschwindet.

Man sieht:

Mindestens für $n - k - 1$ particuläre Integrale y fällt der Ausdruck $G(x)$ fort.

Eleganter und bequemer ist noch das folgende von Heine angewandte Verfahren (l. c., pag. 263), welches dafür aber den Mangel hat nicht immer sämmtliche Integrale der gesuchten Art zu liefern.

Man ordne den Ausdruck Ψ nach Potenzen von z in die Reihe

$$\Psi = h_0 + h_1 z + \cdots + h_K z^K,$$

in welcher die h von z unabhängige Grössen, die aber noch ganze Potenzen von x enthalten, bezeichnen. Es ist nämlich

$$h_i = \sum_m (-1)^m m! \, \{a_{m\,m+i+1} + (m+1)_1 \, a_{m\,m+i+2} x + \cdots$$
$$+ (k_m - i - 1)_{k_m - i - 1 - m} \cdot x^{k_m - i - 1 - m}\}.$$

Nun ist

$$G(x) = \sum_{i=0}^{K} h_i \int_\alpha^\beta z^i y\, dz.$$

Setzt man daher

$$a_l^{(i)} = \int_\alpha^\beta z^i \eta_l\, dz$$

und bestimmt n Grössen $C_1, C_2, \cdots, C_n$ gemäss den Gleichungen

$$\begin{gathered} C_1 a_1^{(0)} + C_2 a_2^{(0)} + \cdots + C_n a_n^{(0)} = 0, \\ C_1 a_1^{(1)} + C_2 a_2^{(1)} + \cdots + C_n a_n^{(1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 a_1^{(K)} + C_2 a_2^{(K)} + \cdots + C_n a_n^{(K)} = 0, \end{gathered}$$

so wird $G(x)$ identisch Null, wenn man

$$y = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \cdots + C_n\eta_n$$

wählt.

Ein letztes Mittel die Function $G(x)$ zum Wegfall zu bringen besteht darin, statt σ den Ausdruck

$$\gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 + \cdots + \gamma_{k+2}\sigma_{k+2}$$

einzuführen, wo

$$\sigma_i = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{y\, dz}{x - z} \quad .$$

ist und die in Bezug auf x constanten Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{k+2}$ passend bestimmt werden müssen. Dieses Mittel ist dann von Werth, wenn es Systeme α_i, β_i giebt, für welche der bei der Substitution von $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{y\, dz}{x - z}$ in die linke Seite der Differentialgleichung (3) des § 2. auftretende echt gebrochene Theil fortfällt.

§ 4.

Ordnet man den Ausdruck $P\left(y, \frac{1}{x-z}; z\right)$ des § 2. nach Potenzen von $\frac{1}{x-z}$, so wird, wenn $\varphi_m^{(k)}(z)$ die k^{te} Ableitung von $\varphi_m(z)$ bedeutet,

$$(1)\quad P\left(y, \frac{1}{x-z}; z\right) = p_1(z)\frac{1}{x-z} - p_2(z)\frac{1}{(x-z)^2} + p_3(z)\frac{2!}{(x-z)^3} + \cdots + (-1)^{n-1} p_n(z)\frac{n-1!}{(x-z)^n},$$

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad p_i(z) = y\Big(\varphi_i(z) - i_1\,\varphi'_{i+1}(z) + (i+1)_2\,\varphi''_{i+2}(z) + \\
\cdots + (-1)^{n-i}(n-1)_{i-1}\,\varphi_n^{(n-i)}(z)\Big) \\
+ \frac{dy}{dz}\Big(\varphi_{i+1}(z) - i_1\,\varphi'_{i+2}(z) + (i+1)_2\,\varphi''_{i+3}(z) + \\
\cdots + (-1)^{n-i-1}(n-2)_{i-1}\,\varphi_n^{(n-i-1)}(z)\Big) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \frac{d^{n-i-1}y}{dz^{n-i-1}}\Big(\varphi_{n-1}(z) - i_1\,\varphi_n'(z)\Big) \\
+ \frac{d^{n-i}y}{dz^{n-i}}\cdot\varphi_n(z).
\end{aligned}
$$

Für z kommen nur die beiden Werthe α und β in Betracht.

Wenn zunächst α ein endlicher Werth ist, so sind die beiden Fälle, dass für denselben $\varphi_n(z)$ von Null verschieden oder gleich Null wird, zu unterscheiden.

(1) $\varphi_n(\alpha)$ ist nicht Null.

Da von der Differentialgleichung vorausgesetzt wird, dass ihre Coefficienten ganze rationale Functionen sind, so ist der Punkt α kein singulärer Punkt der Differentialgleichung. Ihre sämmtlichen Integrale sind daher in der Nähe des Punktes α eindeutig und stetig, und es giebt Integrale, die im Punkte α von der 0^{ten}, 1^{ten} … $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung Null werden. Damit die Glieder mit $\frac{1}{(x-\alpha)^n}$, $\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$, …, $\frac{1}{(x-\alpha)^{n-\nu}}$ fortfallen, ist erforderlich und hinreichend, dass $y, \frac{dy}{dz}, \cdots, \frac{d^\nu y}{dz^\nu}$ für $z=\alpha$ Null sind. Die grösste Vereinfachung tritt für dasjenige particuläre Integral y ein, welches neben seinen $(n-2)$ ersten Ableitungen für $z=\alpha$ Null wird; der Ausdruck P liefert für $z=\alpha$ dann bloss das *eine* Glied $\frac{A}{x-\alpha}$, wo die Constante A gleich dem Werthe von $\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\cdot\varphi_n(z)$ für $z=\alpha$ wird.

2) $\varphi_n(\alpha)$ ist Null.

Um beurtheilen zu können, ob und welche Glieder jetzt fortfallen, muss das Verhalten von y an der Stelle α untersucht werden. Ist y endlich, so sieht man z. B. sofort, dass das $\frac{1}{(x-\alpha)^n}$ enthaltende Glied wegfällt.

Wir wollen nun die Annahme machen, dass die Differentialgleichung sich an der Stelle α wie die von Herrn **Fuchs** behandelte Classe von Differentialgleichungen (**Borch.** Journ., Bd. 66, pag. 148) verhält, nämlich dass $\frac{(z-\alpha)^i\cdot\varphi_{n-i}(z)}{\varphi_n(z)}$ für $z=\alpha$ endlich bleibt.

Setzt man

$$(3) \qquad \left| \frac{(z-\alpha)^i \varphi_{n-i}(z)}{\varphi_n(z)} \right|_{z=\alpha} = \alpha_{n-i}$$

und bildet die Gleichung

$$(4) \quad r(r-1)\cdots(r-n+1) + r(r-1)\cdots(r-n+2)\,\alpha_{n-1} + r(r-1) \\ \cdots(r-n+3)\,\alpha_{n-2} + \cdots + r(r-1)\,\alpha_2 + r\alpha_1 + \alpha_0 = 0,$$

so giebt es nach den Untersuchungen des Herrn **Fuchs** ein Fundamentalsystem, für dessen Elemente die Wurzeln dieser Gleichung die Exponenten sind; d. h. zu jeder Wurzel r gehört ein Integral y, das an der Stelle α die Form annimmt:

$$(5) \quad y = (z-\alpha)^r \left\{ \psi_0(z) + \psi_1(z)\log(z-\alpha) + \cdots + \psi_\lambda(z)\,[\log(z-\alpha)]^\lambda \right\},$$

wo die Functionen $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\cdots$, $\psi_\lambda(z)$ in der Nähe von α eindeutig, endlich und stetig sind und für α nicht sämmtlich verschwinden.

Damit steht fest, von welcher Ordnung die Function y an der Stelle α Null wird: $(z-\alpha)^q \cdot y$ wird für $z=\alpha$ Null, wenn die reell zu nehmende Zahl q grösser als der reelle Theil von $-r$ ist. Ebenso erkennt man ohne Mühe, dass die i^{te} Ableitung von y im Allgemeinen zum Exponenten $r-i$ gehört, in allen Fällen aber $(z-\alpha)^{q+i} \cdot \frac{d^i y}{dz^i}$ an der Stelle α Null wird. Da nämlich

$$\frac{dy}{dz} = (z-\alpha)^{r-1} \left\{ r\psi_0(z) + \psi_1(z) + [r\psi_1(z) + 2\psi_2(z)]\log(z-\alpha) + \cdots \right. \\ \left. + [r\psi_{\lambda-1}(z) + \lambda\psi_\lambda(z)]\log^{\lambda-1}(z-\alpha) + r\psi_\lambda(z)\log^\lambda(z-\alpha) \right\} \\ + (x-\alpha)^r \left\{ \psi_0'(z) + \psi_1'(z)\log(z-\alpha) + \cdots + \psi_\lambda'(z)\log^\lambda(z-\alpha) \right\},$$

so gehört, wenn r nicht Null ist, $\frac{dy}{dz}$ zum Exponenten $r-1$; ist aber r gleich Null, so gehört $\frac{dy}{dz}$ nur dann zum Exponenten $r-1$, wenn Potenzen von $\log(z-\alpha)$ wirklich vorkommen und ihre Coefficienten $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)\cdots\psi_\lambda(z)$ nicht sämmtlich für $z=\alpha$ verschwinden, während sonst $\frac{dy}{dz}$ wie y zum Exponenten Null oder gar zu einem noch grösseren gehört. Für das Folgende ist die Bemerkung wesentlich: wenn in y keine Potenzen von $\log(z-\alpha)$ vorkommen und der Exponent r eine positive ganze Zahl ist, so gehört $\frac{d^i y}{dz^i}$ zum Exponenten $r-i$, so lange $i \leqq r$ ist; für $i > r$ aber bleibt $\frac{d^i y}{dx^i}$ endlich.

Es möge die positive ganze Zahl ν die Ordnung angeben, von welcher $\varphi_n(z)$ für α Null wird.

Die Functionen $\varphi_{n-1}(z), \varphi_{n-2}(z), \cdots, \varphi_{n-\nu+1}(z)$ werden dann für α bez. mindestens von der Ordnung $\nu-1, \nu-2, \cdots, 1$ Null. Ferner sind $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-\nu-1}$ Null; die Gleichung (4) hat daher die $n-\nu$ Wurzeln

$$0, 1, \cdots, n-\nu-1$$

und ihre übrigen ν Wurzeln sind, indem man $r-n+\nu$ gleich ϱ setzt, einfacher durch die beiden Gleichungen

$$r = \varrho + n - \nu,$$

$$(6) \quad \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\nu+1) + \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\nu+2)\alpha_{n-1} + \cdots$$
$$+ \varrho(\varrho-1)\alpha_{n-\nu+2} + \varrho\alpha_{n-\nu+1} + \alpha_{n-\nu} = 0$$

zu bestimmen.

Wir sind jetzt in der Lage die Bedingungen dafür aufzustellen, dass $P\left(y, \frac{1}{x-z}; z\right)$ für $z=\alpha$ verschwindet, indem für y entweder ein besonderes particuläres Integral genommen wird oder aber, was für unsere Zwecke von hauptsächlichem Werthe ist, indem die Wahl des Integrales y ganz beliebig bleibt.

Am einfachsten und günstigsten liegen die Verhältnisse im Falle $\nu = n$. Dann ist erforderlich und hinreichend, damit bei beliebiger Wahl von y $P\left(y, \frac{1}{x-z}; z\right)$ für $z=\alpha$ wegfalle, dass die Wurzeln der Gleichung (4) ihrem reellen Theile nach sämmtlich grösser als -1 sind; wir erhalten also weiter keine Bedingung als diejenige, welche schon von vornherein in der Einführung des Integrales $\int_\alpha^\xi \frac{y\,dz}{x-z}$ liegt.

Im Falle $\nu = n-1$ ist ein Exponent, nämlich der Exponent Null, bekannt; die übrigen sind durch (6) zu bestimmen. Ergeben sich dabei Exponenten, deren reeller Theil grösser als Null ist, so fällt für die zugehörigen Integrale P ganz fort, während dieses für alle Exponenten, deren reeller Theil kleiner als Null ist, nicht stattfindet. Für das zum Exponenten Null gehörige Integral bleibt bei dem Werthe α, den z hat, von P blos $p_1(z)\cdot\frac{1}{x-z}$ übrig. Um nicht zu umständlich zu werden, discutiren wir das Wegfallen auch dieses Gliedes nur unter der Annahme, dass das Integral keine Potenzen von $\log(z-\alpha)$ enthält; dann ist nämlich das Unendlichwerden der Ableitungen von y ausgeschlossen und $p_1(z)$ wird einfach gleich $y\cdot\left(\varphi_1(z) - \varphi_2'(z) + \varphi_3''(z) + \cdots + (-1)^{n-1}\varphi_n^{(n-1)}(z)\right)$, so dass auch hier P ganz wegfällt, wenn

$$\varphi_1(\alpha) - \varphi_2'(\alpha) + \varphi_3''(\alpha) + \cdots + (-1)^{n-1}\varphi_n^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Diese Gleichung hat aber zur Folge, dass der Exponent Null zweimal vorkommt. Denn da für $i < n - 1$

$$\alpha_{n-i} = \frac{\varphi_{n-i}^{(n-1-i)}(\alpha)}{(n-1-i)!} \cdot \frac{(n-1)!}{\varphi_n^{(n-1)}(\alpha)}$$

ist, mithin die Gleichung

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2!\,\alpha_3 + \cdots + (-1)^{n-2}(n-2)!\,\alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)! = 0$$

besteht, so wird den Gleichungen (6) durch $\varrho = -1$ oder $r = 0$ genügt.

Weil der Exponent Null noch ein zweites Mal auftritt, so wird in dem zweiten zu ihm gehörigen Integrale nothwendig ein Logarithmus zum Vorschein kommen und für dasselbe das Glied $p_1(\alpha)\frac{1}{x-\alpha}$ im Allgemeinen nicht fortfallen. Dies ist z. B. unmöglich, wenn die Differentialgleichung von der 2ten Ordnung ist. Denn dann hat man das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(z), \\ y_2 &= \psi_0(z) + \psi_1(z)\log(z-\alpha), \end{aligned}$$

wo $\psi_0(z)$ und $\psi_1(z)$ den Exponenten Null haben.

Bildet man nun für y gleich y_2 und z gleich α den Ausdruck $p_1(z)$, so hat man von $\frac{dy}{dz}$ nur den unendlich werdenden Theil $\frac{\psi_1(z)}{z-\alpha}$ beizubehalten und erhält für $p_1(\alpha)$ den Werth $\psi_1(\alpha)\cdot\varphi_2'(\alpha)$, welcher von Null verschieden ist.

Ganz ähnlich verhält es sich allgemein, wenn ν irgend einen von n verschiedenen Werth hat.

Bekannt sind die Exponenten $0, 1, \cdots, n-\nu-1$; die übrigen werden durch (6) geliefert. Sind unter diesen solche, deren reeller Theil grösser als $n-\nu-1$ ist, so fällt für die zugehörigen Integrale P ganz fort. Soll dieses auch für die zu den Exponenten $n-\nu-1, n-\nu-2, \cdots, 1, 0$ gehörigen und zugleich vom Logarithmus freien Integrale stattfinden, so ergeben sich als nothwendig und hinreichend folgende Systeme von Bedingungsgleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_{n-\nu}(\alpha) - \varphi'_{n-\nu+1}(\alpha) + \varphi''_{n-\nu+2}(\alpha) + \cdots + (-1)^\nu \varphi_n^{(\nu)}(\alpha) = 0, \\ \varphi_{n-\nu}(\alpha) - 2\varphi'_{n-\nu+1}(\alpha) + 3\varphi''_{n-\nu+2}(\alpha) + \cdots + (-1)^\nu (\nu+1)\,\varphi_n^{(\nu)}(\alpha) = 0, \\ \varphi_{n-\nu}(\alpha) - 3_1\varphi'_{n-\nu+1}(\alpha) + 4_2\varphi''_{n-\nu+2}(\alpha) + \cdots + (-1)^\nu (\nu+2)_2\,\varphi_n^{(\nu)}(\alpha) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \varphi_{n-\nu}(\alpha) - (n-\nu)_1\varphi'_{n-\nu+1}(\alpha) + (n-\nu+1)_2\varphi''_{n-\nu+2}(\alpha) + \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^\nu (n-1)_\nu\,\varphi_n^{(\nu)}(\alpha) = 0; \end{cases}$$

$$(8)\begin{cases} \varphi_{n-\nu-1}(\alpha) - \varphi'_{n-\nu}(\alpha) + \varphi''_{n-\nu+1}(\alpha) + \cdots + (-1)^{\nu+1}\varphi_n^{(\nu+1)}(\alpha) = 0, \\ \varphi_{n-\nu-1}(\alpha) - 2\varphi'_{n-\nu}(\alpha) + 3\varphi''_{n-\nu+2}(\alpha) + \cdots + (-1)^{\nu+1}(\nu+2)\,\varphi_n^{(\nu+1)}(\alpha) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_{n-\nu-1}(\alpha) - (n-\nu-1)_1\varphi'_{n-\nu}(\alpha) + (n-\nu)_2\varphi''_{n-\nu+2}(\alpha)\cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\nu+1}(n-1)_{\nu+1}\varphi_n^{(\nu+1)}(\alpha) = 0; \end{cases}$$

. . . .

. . . .

$$(9)\begin{cases} \varphi_2(\alpha) - \varphi_3'(\alpha) + \varphi_4''(\alpha) + \cdots + (-1)^{n-2}\varphi_n^{(n-2)}(\alpha) = 0, \\ \varphi_2(\alpha) - 2\varphi_3'(\alpha) + 3\varphi_4''(\alpha) + \cdots + (-1)^{n-2}(n-1)\,\varphi_n^{(n-2)}(\alpha) = 0; \end{cases}$$

$$(10)\qquad \varphi_1(\alpha) - \varphi_2'(\alpha) + \varphi_3''(\alpha) + \cdots + (-1)^{n-1}\varphi_n^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\alpha_{n-i} = \frac{\varphi_{n-i}^{(\nu-i)}(\alpha)}{\nu - i!} \cdot \frac{\nu!}{\varphi_n^{(\nu)}(\alpha)}$$

erkennt man, dass das erste System (7) mit dem doppelten Vorkommen der Exponenten $0, 1, \cdots, n-\nu-1$ gleichbedeutend ist, woraus sich weiter noch ergiebt, dass ν nicht kleiner als $\frac{n}{2}$ sein darf.

Die Annahme, dass es vom Logarithmus freie, zu den Exponenten $0, 1, \cdots, n-\nu_*-1$ gehörige Integrale giebt, ist im Allgemeinen erfüllt; insbesondere ist sie stets erfüllt (siehe meine Inauguraldissertation, Heidelberg 1873), wenn die Gleichung (4) keine ganzzahlige Wurzel grösser als $n-\nu-1$ besitzt. Andererseits bringt das Auftreten gleicher Exponenten nothwendig für einen Theil der Integrale Logarithmen mit sich.

Es gelten mithin die beiden Sätze:

I) *Wenn die Gleichung* (4) *die Wurzeln* $0, 1, \cdots, n-\nu-1$ *sämmtlich mehrfach besitzt, sonst aber nur Wurzeln, welche keine ganzen Zahlen sind und einen grösseren reellen Theil als* $n-\nu-1$ *haben, zulässt, wenn ausserdem die Gleichungen* (8), $\cdots$, (9), (10) *bestehen und für* y *eins der zu den Wurzeln der Gleichung* (4) *gehörigen Integrale gewählt wird, so fällt beim Einsetzen von* a *der ganze Ausdruck* P *immer fort ausser für die Integrale, welche zu den ganzzahligen Exponenten gehören und zugleich mit Logarithmen behaftet sind.*

II) *Im Falle* $\nu = n$ *fällt bei beliebiger Wahl von* y P *ganz fort, wenn der reelle Theil einer jeden Wurzel von* (4) *grösser als* -1 *ist.*

Es bleiben nun noch diejenigen singulären Punkte, in deren Nähe die Differentialgleichung nicht den vorausgesetzten Charakter hat, zu betrachten übrig. Da man aber für das Verhalten der Integrale an solchen Stellen noch keine genügend einfachen Kriterien kennt, so mögen hier nur einige allgemeine Bemerkungen Platz finden.

Der Ausdruck P fällt für $z = \alpha$ ganz weg, wenn y und seine $n - 1$ ersten Ableitungen an der Stelle α Null sind.

Wenn in der Nähe des Punktes α die Function y in eine unendlich viele negative Potenzen von $z - \alpha$ enthaltende Reihe entwickelt werden kann, so kommt es darauf an, den von α ausgehenden Theil des Integrationsweges passend zu bestimmen, damit sowohl das mit σ bezeichnete Integral einen Sinn behalte, wie auch der Ausdruck P verschwinde.

Das einfachste Beispiel hierfür bietet die Differentialgleichung

$$(z-\alpha)^2 \frac{dy}{dz} - y = 0.$$

Sie hat $e^{-\frac{1}{z-\alpha}}$ zum Integrale, und man braucht den Integrationsweg nur so zu wählen, dass im Anfang $z - \alpha$ positiv ist.

§ 5.

Ist α unendlich, so muss, damit σ einen Sinn behalte, y im Unendlichen entweder den bestimmten Werth Null haben oder doch für den ins Unendliche sich erstreckenden Theil des Integrationsweges Null werden. Der Ausdruck P wird dabei, wenn y von genügend hoher Ordnung Null wird, wegfallen; die Bedingungen sollen dafür aufgestellt werden.

Zur Untersuchung des Verhaltens einer Function im Unendlichen dient, wie bekannt, die Substitution

$$z = \frac{1}{t},$$

bei welcher

$$(-1)^m \frac{d^m y}{dz^m}$$

$$= t^{2m} \frac{d^m y}{dt^m} + m_1(m-1)_1 t^{2m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + m_2(m-1)_2 2!\, t^{2m-2} \frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} + \cdots$$

$$+ m_p(m-1)_p p!\, t^{2m-p} \frac{d^{m-p} y}{dt^{m-p}} + \cdots + m!\, t^{m+1} \frac{dy}{dt}$$

ist. Dadurch geht die Differentialgleichung (2) des § 2. über in

$$(1) \quad \sum_m (-1)^m \frac{d^m y}{dt^m} \Big[t^{2m} \varphi_m\left(\frac{1}{t}\right) - (m+1)_1 m_1 t^{2m+1} \varphi_{m+1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$+ (m+2)_2 (m+1)_2 2!\, t^{2m+2} \varphi_{m+2}\left(\frac{1}{t}\right) + \cdots$$

$$+ (-1)^p (m+p)_p (m+p-1)_p p!\, t^{2m+p} \varphi_{m+p}\left(\frac{1}{t}\right) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-m} n_m (n-1)_{m-1}\, n-m!\, t^{n+m} \varphi_n\left(\frac{1}{t}\right) \Big] = 0.$$

Bezeichnet man den Grad von $\varphi_n(z)$ mit $n+s$ und nimmt an, dass s eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, ferner dass $\varphi_m(z)$ höchstens vom Grade $m+s$ ist, so hat die Differentialgleichung (1) dieselbe für die Feststellung der Natur der Integrale bequeme Form, die wir im vorigen Paragraphen zu Grunde legten, was unmittelbar in die Augen springt, wenn man die Differentialgleichung mit $\mathfrak{t}^s$ multiplicirt und folgendermassen schreibt:

$$\sum_m (-1)^m \mathfrak{t}^m \frac{d^m y}{d\mathfrak{t}^m}\left[\mathfrak{t}^{m+s}\varphi_m\left(\frac{1}{\mathfrak{t}}\right)-(m+1)m_1\,\mathfrak{t}^{m+s+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{1}{\mathfrak{t}}\right)\cdots\right]=0.$$

Man kann daher ein Fundamentalsystem so wählen, dass seine Elemente zu Exponenten r, welche die Wurzeln einer leicht zu bildenden Gleichung sind, gehören; diese Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}
(2)\quad & (-1)^n a_{00+s}+(-1)^{n-1}r\left[a_{11+s}-2a_{22+s}+\cdots+(-1)^{m-1}m!\,a_{mm+s}\cdots\right] \\
& +(-1)^{n-2}r(r-1)\left[a_{22+s}-6a_{33+s}+\cdots\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left.+(-1)^{m-2}m_2(m-1)_1(m-2)!\,a_{mm+s}\cdots\right] \\
& +(-1)^{n-3}r(r-1)(r-2)\left[a_{33+s}-12a_{44+s}+\cdots\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left.+(-1)^{m-3}m_3(m-1)_2(m-3)!\,a_{mm+s}\cdots\right] \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& -r(r-1)\cdots(r-n+2)\left[a_{n-1\,n-1+s}-n(n-1)a_{nn+s}\right] \\
& +r(r-1)\cdots(r-n+1)a_{nn+s}=0.
\end{aligned}$$

Das zum Exponenten r gehörige Integral y hat für kleine Werthe von $\mathfrak{t}$ die Form:

$$y=\mathfrak{t}^r\left\{\psi_0(\mathfrak{t})+\psi_1(\mathfrak{t})\log(\mathfrak{t})+\cdots+\psi_\lambda(\mathfrak{t})\,[\log(\mathfrak{t})]^\lambda\right\}.$$

Führt man wieder z ein, so geht es über in

$$(3)\quad y=\frac{1}{z^r}\left\{\psi_0\left(\frac{1}{z}\right)-\psi_1\left(\frac{1}{z}\right)\log z+\cdots+(-1)^\lambda\psi_\lambda\left(\frac{1}{z}\right)[\log(z)]^\lambda\right\},$$

wo die Functionen $\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_\lambda$ nach fallenden Potenzen von z entwickelt keine positiven Potenzen enthalten, mindestens eine unter ihnen aber mit einem constanten Gliede beginnt.

Da der Fall, dass r Null oder negativ ist, überhaupt nicht in Betracht kommt, weil sonst, wie schon bemerkt, σ seine Bedeutung verliert, so gehört $\frac{d^i y}{dz^i}$ zum Exponenten $r+i$.

Fasst man nun den Ausdruck P, wie er in § 4. hingeschrieben ist, und insbesondere sein letztes Glied $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-z)^n}\cdot y\cdot\varphi_n(z)$ ins Auge, so erkennt man ohne Mühe, dass er dann und nur dann wegfällt, wenn der reelle Theil des Exponenten, zu dem y gehört, grösser als s ist.

Mithin gelten die beiden Sätze:

I. *Ist für* $m = n$ *der Grad von* $\varphi_m(z)$ *gleich* $n + s$, *für* $m = 0, 1, \cdots, n-1$ *aber höchstens gleich* $m + s$, *so fällt für ein unendlich grosses* α *der Ausdruck* P *bei beliebiger Wahl von* y *ganz weg, wenn die Wurzeln der Gleichung* (2) *ihrem reellen Theile nach sämmtlich grösser als* s *sind.*

II. *Wenn die eben für alle Wurzeln der Gleichung* (2) *gemachte Voraussetzung nur für einen Theil derselben zutrifft, so verschwindet* P *nur für diejenigen particulären Integrale, welche entweder selbst zu jenen Wurzeln gehören oder sich doch aus derartigen Integralen linear und homogen zusammensetzen.*

Bemerkenswerth ist der Umstand, dass einige Wurzeln von (2) von vornherein gegeben sind, wenn die Differentialgleichung zu der in § 3. eingeführten Classe gehört.

Wenn nämlich die Gleichungen (2) *des* § 3. *bestehen, so hat die Gleichung* (2) *dieses Paragraphen die* s *Lösungen* $1, 2, \cdots, s$.

Denn da in diesem Falle nach der in § 3. hergeleiteten Auflösungsformel (3)

$$a_{0s} = s!\,a_{s2s} - (s+1)!\,s_1\,a_{s+1\,2s+1} + \cdots + (-1)^{m-s}\,m!\,(m-1)_{m-s}\,a_{m\,m+s} + \cdots$$

oder

$$\frac{a_{0s}}{s!} = a_{s2s} - (s+1)_1\,s_1\,a_{s+1\,2s+1} + \cdots + (-1)^{m-s}\,m_s(m-1)_{s-1}(m-s)!\,a_{m\,m+s} + \cdots,$$

also das $s + 1^{\text{te}}$ Glied der Gleichung einfach $(-1)^{n-s}\,r(r-1)\cdots$ $\cdots(r-s+1)\frac{a_{0s}}{s!}$ ist und dieselbe Rechnung offenbar auch für alle vorhergehenden Glieder gilt, so wird dann der erste Theil der Gleichung sehr einfach; sie lautet, wenn man noch mit $(-1)^n$ dividirt:

$$\begin{aligned}
&a_{0\,0+s}\left(1 - r + \frac{r(r-1)}{1.2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \cdots + (-1)^s\,\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2\ldots s}\right)\\
&+ (-1)^{s+1}\,r(r-1)\cdots(r-s)\,[a_{s+1\,2s+1} - (s+2)_1(s+1)_1\,a_{s+2\,2s+2}\\
&\qquad\qquad + (s+3)_2(s+2)_2\,2!\,a_{s+3\,2s+3}\cdots]\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (-1)^{n-1}\,r(r-1)\cdots(r-n+2)\,[a_{n-1\,n-1+s} - n_1(n-1)_1\,a_{n\,n+s}]\\
&+ (-1)^n\,r(r-1)\cdots(r-n+1)\,a_{n\,n+s} = 0.
\end{aligned}$$

Es ist aber leicht einzusehen, dass dieser Gleichung in der That die Lösungen $1, 2, \cdots, s$ zukommen. Nach dem Satze (II) bleibt für die zugehörigen Integrale das Wegfallen von P ausgeschlossen.

Der Bedingung kann auch noch eine andere Fassung gegeben werden; wie aus der Art der Herleitung der Gleichungen des § 3. hervorgeht, sind sie damit gleichbedeutend, dass beim Einsetzen von

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{x^\nu}$ in die linke Seite der Differentialgleichung keine mit den Grössen $a_{0s}, a_{1s+1}, \cdots, a_{nn+s}$ multiplicirten ganzen Potenzen von x auftreten.

Dass auch dann, wenn die den Betrachtungen dieses Paragraphen zu Grunde liegende Annahme nicht stattfindet, dennoch in vielen Fällen der Werth Unendlich geeignet ist für α oder β oder gar für beide Grössen genommen zu werden, dafür mögen als Beleg die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dz} + y = 0$$

und

$$\frac{dy}{dz} + 2zy = 0$$

dienen.

Die erste von ihnen hat das Integral e^{-z}; nimmt man $\beta = \infty$, so ist

$$\sigma = \int_\alpha^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{x - z},$$

$$D(\sigma) = \left[\frac{1}{x - z} \cdot e^{-z}\right]_\infty^\alpha = \frac{e^{-\alpha}}{x - \alpha}.$$

Also ist

$$\int_\alpha^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{x - z}$$

ein Integral von

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-\alpha}}{x - \alpha},$$

und der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{A}{x - \alpha}$$

wird genügt durch

$$y = Ae^\alpha \int_\alpha^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{x - z}.$$

Die andere Differentialgleichung hat das Integral e^{-z^2}; nimmt man

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}\,dz}{x - z},$$

wo der Integrationsweg ganz auf der reellen Axe verlaufen möge, so ist, da P offenbar ganz wegfällt und $G(x)$ gleich $2a_1$ oder gleich $2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz$ wird, $D(\sigma)$ dieser Constanten gleich.

Mithin ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{x-z}$ ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}+2xy=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz,$$

also auch von der aus ihr durch Differentiation entstehenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

deren zweites Integral $e^{-x^2}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-z^2}dz}{x-z}$ durch blosse Abänderung des Integrationsweges aus dem ersten entspringt.

§ 6.

Diejenigen singulären Stellen der Differentialgleichung, für welche bei beliebiger Wahl von y der Ausdruck P wegfällt, mögen mit $z_1, z_2, \cdots, z_\mu$, und diejenigen, an welchen dieses nur für einzelne particuläre Integrale y stattfindet, mit $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_\nu$ bezeichnet werden.

Sind solche Stellen wirklich vorhanden, wofür in den beiden letzten Paragraphen Kriterien angegeben worden sind, so giebt es, indem y ein beliebiges Element eines Fundamentalsystems von Integralen und p eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \mu-1$ vorstellt, $(\mu-1)\cdot n$ Ausdrücke

$$\int\limits_{z_p}^{z_{p+1}}\frac{y\,dz}{x-z},$$

welche in die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt eine ganze Function von x höchstens vom Grade K liefern (siehe § 3.); dieselbe Eigenschaft kommt unter Beschränkungen, welche sich auf die Wahl von y beziehen, den Ausdrücken

$$\int\limits_{z_p}^{\zeta_q}\frac{y\,dz}{x-z}$$

zu.

Besonderes Interesse erweckt der Fall, wo auch die ganze Function entweder von vornherein wegfällt, wie dieses bei der in § 3. eingeführten Classe von Differentialgleichungen eintritt, oder doch durch die in demselben Paragraphen angegebenen Mittel zum Verschwinden gebracht werden kann. Denn dann ergiebt sich zwischen den Integralen der Differentialgleichung derselbe merkwürdige Zusammenhang, welcher, wie bekannt, bei der Differentialgleichung der Kugelfunctionen

$$(1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + n(n+1)\,y = 0$$

besteht und für diese unter Anwendung der in dem Handbuche von Heine gebrauchten Bezeichnungen das zweite Integral $Q^n(z)$ in der zuerst von Herrn F. E. Neumann aufgestellten Form (siehe das genannte Handbuch, 2. Aufl., pag. 141)

$$Q^n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P^n(z)\,\frac{dz}{x-z}$$

durch das erste $P^n(z)$ auszudrücken erlaubt.

Hier ist nämlich $G(x)$ nicht vorhanden, und es ist

$$P = \frac{dy}{dz}(1-z^2)\frac{1}{x-z} - y(1-z^2)\frac{1}{(x-z)^2},$$

so dass, wenn y_α' und y_β' die Werthe von $\frac{dy}{dz}$ für α und β bezeichnen,

$$(2) \qquad D(\sigma) = (1-\alpha^2)\,y_\alpha'\,\frac{1}{x-\alpha} - (1-\alpha^2)\,y_\alpha\,\frac{1}{(x-\alpha)^2}$$
$$- (1-\beta^2)\,y_\beta'\,\frac{1}{x-\beta} + (1-\beta^2)\,y_\beta\,\frac{1}{(x-\beta)^2}$$

wird.

Setzt man nun als bekannt voraus, dass der Differentialgleichung (1) eine ganze Function von z genügt und wählt diese zur Function y, ferner für α und β bez. die Werthe -1 und $+1$, so wird für dasjenige σ, welches man dann erhält, in Uebereinstimmung mit dem Satze (I) des § 4. $D(\sigma)$ offenbar Null, d. h. dieses σ ist wieder ein Integral der Differentialgleichung (1).

Aus unserer Untersuchung geht hervor, dass auch für manche andere Differentialgleichung aus einem Integrale sofort ein zweites oder sogar eine grössere Anzahl neuer Integrale vermittelst des Ausdruckes $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$, welcher durch seine sonstige Stellung zur Functionentheorie das höchste Interesse beansprucht, abzuleiten ist; dabei kommen, soweit es sich nicht um die ganze Function $G(x)$ handelt, nur *die Eigenschaften der Integrale, ihr Verhalten an den singulären Stellen* in Betracht.

Eine andere Verwendung unserer Sätze liegt auf der Hand. Dieselben liefern in vielen Fällen bequeme Mittel um nicht homogene Differentialgleichungen, auf deren rechter Seite eine rationale Function steht, zu integriren.

Wir gehen hier nur auf den für die Discussion geeignetsten Fall ein, wo die ganze Function $G(x)$ fehlt und mindestens *ein* Werth von der Art der Grössen $z_1, z_2, \cdots, z_\mu$ vorhanden ist.

Um dann ein Integral der Differentialgleichung

$$(3)\quad \varphi(x)\,y + \varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{A}{x-a} - \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{2!A_2}{(x-a)^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n-1!A_{n-1}}{(x-a)^n},$$

in der die Grössen $A, A_1, \cdots, A_{n-1}$ beliebige Constanten bedeuten, zu erhalten, bestimme man zuerst dasjenige Integral y der reducirten Differentialgleichung, welches für $x = a$ den Bedingungen

$$(4)\quad \begin{aligned} A_{n-1} &= y\varphi_n(x), \\ A_{n-2} &= y\big(\varphi_{n-1}(x) - (n-1)\varphi_n'(x)\big) + \frac{dy}{dx}\varphi_n(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A &= y\big(\varphi_1(x) - \varphi_2'(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\varphi_n^{(n-1)}(x)\big) \\ &\quad + \frac{dy}{dx}\big(\varphi_2(x) - \varphi_3'(x) + \cdots + (-1)^{n-2}\varphi_n^{(n-2)}(x)\big) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\varphi_n(x), \end{aligned}$$

oder aber der das Bildungsgesetz dieser Gleichungen zum offenen Ausdruck bringenden Bedingung

$$(5)\quad \begin{aligned} A_{i-1} = {} & y\big(\varphi_i(x) - i_1\varphi_{i+1}'(x) + (i+1)_2\varphi_{i+2}'(x) + \cdots \\ & \qquad + (-1)^{n-i}(n-1)_{i-1}\varphi_n^{(n-i)}(x)\big) \\ & + \frac{dy}{dx}\big(\varphi_{i+1}(x) - i_1\varphi_{i+2}'(x) + (i+1)_2\varphi_{i+3}''(x) + \cdots \\ & \qquad + (-1)^{n-i-1}(n-2)_{i-1}\varphi_n^{(n-i-1)}(x)\big) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}}\big(\varphi_{n-1}(x) - i_1\varphi_n'(x)\big) \\ & + \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}\varphi_n(x) \\ & (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

genügt, und setze darauf, wenn $f(x)$ dieses Integral ist,

$$\sigma = \int_a^{z_1} \frac{f(z)\,dz}{x - z},$$

so ist σ ein Integral von (3).

Insbesondere erhält man ein Integral der Differentialgleichung

$$\varphi(x)\,y + \varphi_1(x)\,\frac{dy}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x - a},$$

wenn man diesen Ausdruck mit Hülfe desjenigen Integrales der reducirten Differentialgleichung, welches an der Stelle a nebst seinen $n - 2$ ersten Ableitungen verschwindet, während die $n - 1^{\text{te}}$ den Werth $\frac{1}{\varphi_n(a)}$ annimmt, bildet. Durch Differentiation nach a erhält man dann aus ihm ein Integral der Differentialgleichung

$$\varphi(x)\,y + \varphi_1(x)\,\frac{dy}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(x - a)^2},$$

und wiederholte Differentiation nach a liefert, wenn μ irgend eine positive ganze Zahl ist, ein Integral von

$$\varphi(x) + \varphi_1(x)\,\frac{dy}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(\mu - 1)!}{(x - a)^\mu},$$

so dass man im Stande ist überhaupt den Fall, wo auf der rechten Seite eine beliebige echt gebrochene Function steht, zu erledigen.

Die für die Integration von (3) angegebene Methode hat einige Aehnlichkeit mit der ganz allgemein gültigen und darum complicirteren, welche sich in Sturm's cours d'analyse (leçon 47) findet.

§ 7.

Zum Schlusse möge ein Beispiel Platz finden.

Die Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung

$$(1)\qquad \begin{aligned} & x^4(x-1)^4\,\frac{d^4y}{dx^4} \\ & + x^3(x-1)^3\,(f + 16x)\,\frac{d^3y}{dx^3} + x^2(x-1)^2\,(g + 9fx + 72x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + x(x-1)\,(h + 4gx + 18fx^2 + 96x^3)\,\frac{dy}{dx} \\ & + (k + hx + 2gx^2 + 6fx^3 + 24x^4)\,y = 0 \end{aligned}$$

ist gemäss den Gleichungen (2) des § 3. gebildet, in der Weise also, dass die Function $G(x)$ von vornherein wegfällt. Sie gehört ferner in die von Herrn Fuchs eingeführte Classe (siehe § 4.) und hat im Endlichen die beiden singulären Punkte Null und 1. Die zu diesen beiden Punkten gehörigen Exponenten sind bez. die Wurzeln von

$$(2)\quad r(r-1)(r-2)(r-3)-r(r-1)(r-2)f+r(r-1)g \\ -rh+k=0$$

und von

$$(3)\quad r_1(r_1-1)(r_1-2)(r_1-3)-r_1(r_1-1)(r_1-2)(f+16) \\ +r_1(r_1-1)(g+9f+72)+r_1(h+4g+18f+96) \\ +k+h+2g+6f+24=0.$$

Eine leichte Rechnung ergiebt zwischen beiden Gleichungen den Zusammenhang

$$r+r_1=-1.$$

Wählt man nun, was möglich ist, die Constanten f, g, h, k so, dass für alle Wurzeln der ersten Gleichung der reelle Theil zwischen 0 und -1 liegt, so sind, da dasselbe dann auch für die Wurzeln der zweiten Gleichung stattfindet, sowohl für den Punkt Null wie für den Punkt 1 die Voraussetzungen des Satzes (II) des § 4. erfüllt; folglich ist, *wenn* $f(x)$ *ein Integral der Differentialgleichung* (1) *bedeutet, der Ausdruck*

$$\int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

wieder ein Integral derselben Differentialgleichung.

Ein Integral derjenigen nicht homogenen Differentialgleichung, deren zweites Glied aus dem Bruche $\frac{1}{x-a}$ besteht und für welche die Differentialgleichung (1) die reducirte ist, erhält man, indem man zunächst dasjenige Integral $f(x)$ der Differentialgleichung (1), welches nebst seinen beiden ersten Ableitungen für den besonderen Werth a verschwindet, während die dritte Ableitung an dieser Stelle den Werth $\frac{1}{a^4(a-1)^4}$ annimmt, bestimmt und vermittelst desselben nach Belieben entweder den Ausdruck $\int_a^0 \frac{f(z)\,dz}{x-z}$ oder $\int_a^1 \frac{f(z)\,dz}{x-z}$ bildet. Ist aber erst diese Aufgabe für ein unbestimmtes a gelöst, so bietet es weiter keine Schwierigkeit mehr den allgemeinen Fall, dass das zweite Glied eine beliebige echte gebrochene Function von x ist, zu erledigen; dazu ist offenbar nur die Partialbruchzerlegung der betreffenden rationalen Function und wiederholte Differentiation des Ausdruckes $\int_a^0 \frac{f(z)\,dz}{x-z}$ nach a erforderlich. Nach dem vorigen Paragraphen lässt sich dabei die Differentiation noch umgehen, wenn die echte gebrochene Function an keiner Stelle von höherer als der vierten Ordnung unendlich wird; man gewinnt dadurch den für die Rechnung unter Umständen sehr erheblichen Vortheil, dass bei der Bestimmung des Integrales $f(x)$ die Grösse a einen festen, etwa numerisch gegebenen Werth besitzt, also das zu benutzende particuläre Integral $f(x)$ durch gegebene Werthe seiner ersten Ableitungen an der *einen* Stelle a charakterisirt ist.

Wie sich die Integrale der Differentialgleichung (1) im Unendlichen verhalten, lehrt § 5.: es giebt ein Fundamentalsystem, dessen Elemente für den Punkt ∞ zu den Exponenten 1, 2, 3, 4 bez. gehören. Die Summe sämmtlicher zu den drei Punkten 0, 1 und ∞ gehörigen Exponenten beträgt also $\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\,(2 - 1)$ in Uebereinstimmung mit einem allgemeinen Satze des Herrn Fuchs (vgl. Borch. Journ. Bd. 66, pag. 145).

Halle, im November 1881.

Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

I.

1. Gemeinhin versteht man unter *der quadratischen Verwandtschaft zweier (ebenen) Felder* diejenige Beziehung ihrer Punkte, bei welcher einem Punkte jedes der beiden Felder im Allgemeinen ein Punkt im andern entspricht derartig, dass, wenn der Punkt des einen Feldes eine Gerade durchläuft, der entsprechende einen Kegelschnitt beschreibt. Herr **Reye***) erzeugt diese Verwandtschaft dadurch, dass *er die beiden Felder in zwei Weisen reciprok auf einander bezieht; jedem Punkte des einen Feldes, gleichgültig welches, entspricht dann im andern der ihm in beiden Beziehungen conjugirte Punkt, der Schnittpunkt der beiden Polaren.*

Greift man 7 beliebige Paare entsprechender Punkte der quadratischen Verwandtschaft heraus, so *bestimmen diese als 7 Paare conjugirter Punkte ein einfach unendliches System von reciproken Beziehungen* (*Correlationen*), zu denen die beiden gegebenen gehören. Nach den Untersuchungen des Herrn **Hirst****) sind die Charakteristiken μ, ν dieses Systems (mit der Signatur [0070]), die Zahlen der Correlationen des Systems, für welche noch ein weiteres Paar von Punkten, bez. von

---

*) Schlömilchs Zeitschr. Bd. XI, S. 280 (hierauf bezieht sich „a. a. O.“); Geometrie der Lage 2. Abth. 13. Vortrag in der ersten, 16. Vortr. in der zweiten Auflage.

**) On Correlation of two Planes, Proc. London Math. Soc. vol V. S. 40 (und Annali di Mat. ser. II, t. VI, S. 260); ferner Forts.: Proc. L. M. S. vol. VIII (oder: sur la corrélation de deux plans, Transunti dell' Accad. dei Lincei ser. III, t. I). In der erst genannten Abhandlung ist das obige System in Nr. 37 behandelt. Die Signatur $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$ des Systems bedeutet, dass für alle Correlationen desselben α gegebene Punkte, β gegebene Geraden des ersten Feldes α gegebenen Geraden, β gegebenen Punkten im zweiten entsprechen und γ Punkte, δ Gerade des ersten bez. je γ Punkten, δ Geraden des zweiten conjugirt sind.

Geraden conjugirt sind, gleich 1, 2. Aus dem ersten Werthe: $\mu = 1$ folgt, dass die Polaren, welche irgend einem Punkte des einen Feldes in den verschiedenen Correlationen im zweiten entsprechen, einen Strahlbüschel bilden; also ist derselbe Punkt, der Scheitel dieses Strahlbüschels, der dem ersten Punkte in den beiden gegebenen Correlationen gleichzeitig conjugirt ist, ihm auch in allen andern conjugirt. Dies hat schon Herr Reye bewiesen, doch in anderer Weise als Herr Hirst, und beide schliessen daraus, dass *jede zwei von den Correlationen des Systems* [0070] *zur Erzeugung der quadratischen Verwandtschaft dienen können, und dass diese durch 7 Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt ist.*

Man kann auch, wie Herr Hirst und, wenn man dessen Sätze etwas anders ausspricht, auch Herr Reye (ausser bei [1130]) bemerkt, von den Systemen [1050], [2030], [1130], [3010], für welche ebenfalls $\mu = 1$ (und auch $\nu = 2$) ist, ausgehen; doch sind dies eigentlich nur Specialfälle von [0070].

2. Jedes einfach unendliche System*) von Correlationen besitzt im Allgemeinen *zwei Ausartungen*, auf welche zuerst Herr Hirst in seinen oben erwähnten Aufsätzen**) aufmerksam gemacht hat. *Die eine hat zwei singuläre Punkte* (*in jedem Felde einen*), deren Büschel projectiv sind, und die Correlation ist derartig, dass dem singulären Punkt in dem einen Felde, gleichgültig welchem, jede beliebige Gerade des andern, einem beliebigen Punkt des ersteren die Gerade des Büschels um den singulären Punkt des andern entspricht, welche in der Projectivität dem Strahle homolog ist, welcher jenen Punkt mit dem singulären Punkte des ersten Feldes verbindet. Die andere Ausartung hat zwei singuläre Geraden, welche projective Punktreihen tragen, und ist zur ersten dual.

In den oben erwähnten Correlationssystemen ist die Zahl der ersteren Ausartungen durchweg 3, die der anderen 0, wie Hirst gefunden hat. Im Systeme [0070] sind die Paare der singulären Punkte die 3 Punktepaare, aus denen die 7 Punkte des einen Feldes und die 7 Punkte des andern durch projective Büschel projicirt werden.***) In den andern Systemen [1050] etc. gehören die Punkte, für welche eine gemeinsame Polare gegeben ist, stets zu den singulären Punkten, und diese Polare enthält dann zwei von denen im andern Felde. *Für die quadratische Verwandtschaft werden*, wie Herr Hirst bemerkt, *diese 3 singulären Punkte in jedem Felde dessen Hauptpunkte*, d. h. die Punkte, denen im anderen Felde eine ganze Gerade (Hauptlinie) entspricht, auf der dann zwei Hauptpunkte liegen, *und zwar zusammengehörige singuläre Punkte werden homologe Hauptpunkte*, d. h. je ein Hauptpunkt und derjenige im andern Felde, der nicht auf der entsprechenden Hauptlinie liegt. Im Allgemeinen sind alle 6 Hauptpunkte reell oder nur zwei homologe; im ersteren Falle sind alle drei ausgearteten Correlationen erster Art reell, und sind die aus dem Systeme zur Erzeugung der quadratischen Verwandtschaft herausgenommenen Correlationen zwei von ihnen, so *geht die Reye'sche Erzeugung dieser Verwandtschaft über in die von Seydewitz gelehrte ältere**), die freilich nicht den zweiten Fall ermöglicht und deshalb nicht dieselbe Allgemeinheit hat wie die Reye'sche. Beides bemerkt wohl Reye, der ja die Projectivität der Büschel um homologe Hauptpunkte wohl erkannt hatte, aber noch nicht wusste, dass sie eine ausgeartete Correlation sei.

---

*) Wenigstens jedes, das durch solche Bedingungen definirt ist, wie sie oben bei Erläuterung der Signatur [$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$] beschrieben sind: Elementarbedingungen.

**) Und gleichzeitig mit ihm Herr Fiedler in der zweiten Aufl. der darstellenden Geometrie.

***) Vergl. meinen Aufs. Math. Ann. Bd. I, S. 533 (Problem der Projectivität oder Homographie) Abschnitt IV. Vorher haben sich Chasles, Jonquières, Cremona, Hesse mit diesen Punkten beschäftigt, wie dort genauer angegeben ist.

Während Herr Reye die Kenntniss der quadratischen Verwandtschaft und ihrer homologen Hauptpunkte benutzt zur Auflösung des oben erwähnten Problems der Projectivität, findet Herr Hirst gerade umgekehrt vermittelt dieses Problems die drei ausgearteten Correlationen des Systems [0070] und die Hauptdreiecke einer durch 7 Paare entsprechender Punkte bestimmten Verwandtschaft 2. Grades.

3. Denken wir uns, wie im Vorhergehenden, die quadratische Verwandtschaft erzeugt vermittelst eines Systems von Correlationen, für welches $\mu = 1$, also eines linearen, so hat der Kegelschnitt, der einer Geraden g entspricht, eine *doppelte* Bedeutung: er ist der Ort der Punkte, die den Punkten der Geraden g in allen Correlationen conjugirt sind, und er ist der Ort der Pole der Geraden in den verschiedenen Correlationen; und zwar, wenn P und P' entsprechende Punkte auf der Geraden und dem Kegelschnitte sind, so ist irgend eine Gerade durch P' Polare von P in einer gewissen Correlation des Systems und ihr zweiter Schnitt mit dem Kegelschnitte ist der Pol von g in dieser Correlation.

Sind bei vereinigten Feldern die beiden constituirenden Correlationen des linearen Systems und damit alle Polarsysteme (Kegelschnittbüschel), so kommen wir zu einem bekannten Satze.

4. *Wir stellen uns im Folgenden die beiden Felder von derselben Ebene getragen vor.* Dann giebt es, wie Seydewitz**) gefunden und

---

*) Grunerts Archiv Bd. 7, S. 117. In jedem der beiden Felder sind zwei Strahlbüschel gegeben, bez. projectiv. Nach entsprechenden Punkten der Verwandtschaft 2. Grades gehen entsprechende Strahlen dieser Büschel.

**) Grunerts Archiv Bd. 8, S. 1, § 31.

Herr Schröter*) ausführlicher dargelegt hat, bei einer Correlation stets *zwei Kernkegelschnitte*. Der eine — die Punktkerncurve K^2 — ist der Ort der Punkte, die — was nothwendig zugleich geschehen muss — mit ihren beiden Polaren incident sind, die andere — die Geradenkerncurve Γ_2 — wird von diesen Polaren eingehüllt. Beide Curven haben eine doppelte Berührung; nennen wir U, V die beiden Berührungspunkte, u, v die zugehörigen Tangenten, und sei $UV = w$, $uv = W$; so sind, wie Herr Schröter gezeigt, W und w, U und u V und v Pol und Polare in beiderlei Sinne.

Wenn zu einem Punkte *die beiden Polaren* construirt und dann durch den Schnitt derselben die vom Punkte durch dieselben harmonisch getrennte Gerade gezogen wird, so ist dies seine Polare in Bezug auf K^2, und dual findet man den Pol einer Geraden in Bezug auf Γ_2.

Der Schnittpunkt der beiden Polaren eines Punktes ist ihm doppelt (oder in beiderlei Sinne) *conjugirt.* Auf *einer Linie, welche zwei doppelt conjugirte Punkte verbindet*, giebt es eine Involution solcher doppelt conjugirter Punkte; Doppelpunkte derselben sind die beiden Schnitte mit K^2, und je zwei doppelt conjugirte also harmonisch zu den Schnitten ihrer Verbindungslinie mit K^2. Dass *alle diese Linien durch W gehen*, beweist Herr Schröter, und auch Herr Reye erwähnt dies schon. Dem Schnitte einer solchen Linie mit w ist W doppelt conjugirt, folglich muss W wegen der eben erwähnten Involution auf der Linie liegen.

Ebenso liegen die sämmtlichen Schnitte doppelt conjugirter Linien auf w.

Dass die beiden von einem Punkte P von K^2 an Γ_2 gelegten Tangenten (die beiden Polaren des Punktes) zur Tangente in P an K^2 und zum Strahle nach W — der als Verbindungsstrahl von P mit sich selbst als doppelt conjugirtem Punkte anzusehen ist — harmonisch sind, ist eine bekannte Eigenschaft sich doppelt berührender Kegelschnitte.

Weiter schliesst Herr Reye hieraus, dass *die Beziehung der doppelt conjugirten Punkte eine involutorische quadratische Verwandtschaft ist und zwar gerade die sogenannte quadratische Inversion*, die zuerst 1838 von Bellavitis**) angegeben, 1865 aber ausführlicher von Herrn Hirst***) behandelt wurde, gleichzeitig aber auch, wie Herr Reye mittheilt, von Herrn Geiser.†) *Die Fundamentalcurve der Inversion ist die Punktkerncurve K^2 der Reciprocität.* Die beiden Hauptdreiecke dieser quadratischen Verwandtschaft vereinigen sich in UVW, aber nur W ist sich selbst homolog.

---

*) Crelles Journal Bd. 77, S. 105 A.

**) Nuovi Saggi dell' Accad. di Padova vol. IV.

***) Proc. R. Soc. 1865, S. 92; Ann. di Mat. s. I t. VII, S. 49.

†) Mitth. der Berner Naturf. Ges. 1865.

5. Bemerken wir, dass *dieselbe Inversion nicht blos aus einer Correlation, sondern einem einfach unendlichen System von Correlationen entsteht:* dasselbe ist definirt durch W und w als Pol und Polare in beiderlei Sinn (4 Bedingungen) und 3 Punkte von K^2 als sich selbst conjugirt, und ist demnach ein Specialfall von [1130]. K^2 ist gemeinsame Punktkerncurve aller dieser Correlationen; die Geradenkerncurve Γ_2 aber verändert sich, K^2 stets in denselben zwei Punkten tangirend. Eine von diesen Correlationen wird ein Polarsystem (Γ_2 mit K^2 identisch) und hört dann auf, die Inversion hervorzubringen.

Aber unter den Kegelschnitten Γ_2 befindet sich auch noch das Geradenpaar uv und das Punktepaar UV; es ist von Interesse, die Beschaffenheit der zugehörigen Correlationen zu ermitteln; wir wollen dies aber im Zusammenhang mit einer andern allgemeineren Frage thun.

6. Fassen wir lieber wiederum unser oben betrachtetes *System* [0070] *von Correlationen* ins Auge, also alle Correlationen zwischen zwei Feldern derselben Ebene, welche 7 Paare conjugirter Punkte gemeinsam haben. Wie sind die K^2, die Γ_2, die Punkte W, U, V, die Geraden w, u, v arrangirt?

Die Kerncurven K^2 bilden einen Büschel, denn die 4 Punkte, welche zweien von ihnen gemeinsam sind, sind sich selbst in beiden Correlationen conjugirt: sie sind die vier sich selbst entsprechenden Punkte der durch die beiden Correlationen oder durch das System erzeugten quadratischen Verwandtschaft,*) (*foci* nennt sie Herr Hirst) und alle Kerncurven gehen also durch sie. Die Charakteristik $\mu = 1$ giebt ja auch, dass es eine Correlation im Systeme giebt, für welche ein gegebener Punkt sich selbst conjugirt ist. Ebenso liefert $\nu = 2$, dass *jede Gerade von zwei Curven Γ_2 berührt wird;* bei den Curven K^2 gilt dies ersichtlich auch.

Wir wollen nun erst den Ort der Punkte W ermitteln. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P an und suchen die ihm doppelt conjugirten P' in den verschiedenen Correlationen unseres Systems. Die beiden Polaren von P beschreiben wegen $\mu = 1$ zwei Strahlbüschel, die offenbar zu einander projectiv sind; denn jede von ihnen bestimmt die Correlation vollständig und eindeutig und so auch die andere eindeutig. Geht die eine von ihnen durch P, so thut es bekanntlich auch die andere. Demnach ist der Ort der Punkte P' ein durch P gehender Kegelschnitt, und PP' selbst beschreibt einen Strahlbüschel, der mit den eben erwähnten Polarenbüscheln projectiv ist. Ein zweiter beliebiger

---

*) Als Schnitte der Kerncurven findet sie Herr Reye a. a. O. Allgemein beweist Herr Cremona in seiner zweiten Note über geometrische Transformationen ebener Figuren (Memorie dell' Istituto di Bologna ser. II, t. V), dass zwei von derselben Ebene getragene Felder, welche sich in einer eindeutigen Verwandtschaft n^{ten} Grades befinden, $n+2$ sich selbst entsprechende Punkte haben

Punkt Q liefert einen diesem projectiven Strahlbüschel QQ', denn die Büschel der Polaren von P und Q sind auch projectiv. Die beiden Büschel um P, Q sind überdies perspectiv; denn für diejenige Correlation, bei der PP' durch Q geht, liegt ja auch der conjugirte Q' auf diesem Strahl wegen der oben erwähnten Involution. Nun schneiden sich aber zusammengehörige Strahlen PP', QQ' stets im Punkte W der betreffenden Correlation. *Also ist der Ort der Punkte W eine Gerade.*

Diese Gerade, welche wir (W) nennen wollen, ist, weil je durch W gehend, für jede Correlation des Systems eine Verbindungslinie sich doppelt conjugirter Punkte; die Involution doppelt conjugirter Punkte hat je die Schnitte mit dem betreffenden K^2 zu Doppelpunkten. Also *ist das Paar der Doppelpunkte G', G'' der Involution, in der diese Gerade (W) den Büschel der K^2 schneidet, doppelt conjugirt in allen Correlationen*, und das einzige Paar doppelt conjugirter Punkte, welches je zwei und in Folge dessen alle gemeinsam haben. *Es ist das Paar der beiden Punkte, welche sich in der quadratischen Verwandtschaft involutorisch entsprechen;* es wurde von den Herren Hirst und S. Kantor bei ihren Untersuchungen über die Cyklen einer quadratischen Verwandtschaft in anderer Weise gefunden.*)

Den Ort der Punkte, welche einem festen Punkte P in den verschiedenen Correlationen des Systems doppelt conjugirt sind oder ihm in den quadratischen Inversionen entsprechen, welche mit den Correlationen verbunden sind, erkannten wir oben als durch P gehenden Kegelschnitt; wir finden jetzt, dass er die erste Polare des Punktes P in Bezug auf die Curve 3. Ordnung ist, welche durch den Strahlbüschel PW und den ihm projectiven Büschel der K^2 erzeugt wird. Auf diese Weise ist jedem Punkte P der Ebene ein durch ihn gehender Kegelschnitt P^2 zugeordnet.

7. Construirt man ferner zu einem Punkte P den Polarenbüschel in Bezug auf die K^2, so ergiebt sich bald, dass P zu zwei Punkten W von (W) je in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt K^2 conjugirt ist; *demnach umhüllen die Geraden w einen Kegelschnitt (w).* Es giebt also drei Punkte W, die auf ihren zugehörigen Geraden w liegen, so dass die zusammengehörigen Curven K^2 und Γ_2 sich vierpunktig tangiren.

Diese 3 Punkte liegen zugleich auf allen obigen Curven 3. Ordnung; ferner schneidet die Gerade (W) in ihnen *die Curve* 5. *Ordnung, welche der Ort der* U, V *ist;* die beiden andern Schnitte sind G', G'', weil in ihnen (W) von zwei Curven K^2 berührt wird und, wie man leicht sieht, auch je von den zugehörigen Γ_2. *Die Linien* u, v *hingegen umhüllen eine Curve* 4. *Classe*, für welche (W) Doppeltangente ist.

---

*) Hirst, Report of Transactions of the British Assoc. at Birmingham 1865, S. 9; Quarterly Journal Nr. 68, S. 301; S. Kantor, Annali di Matem. ser. II, t. X, S. 64. — Die wiederholten quadratischen Transformationen, welche beide anwenden, führen zu Transformationen vom Grade 2^m, welche in jedem Felde drei einfache, drei zweifache, drei vierfache, …, drei 2^{m-1}-fache Punkte haben. Es zeigt sich so, dass der Tabelle für $n = 8$ in Nr. 18 der eben erwähnten Cremona'schen Arbeit noch ein Fall hinzuzufügen ist.

8. *Ist die Correlation eine solche mit zwei singulären Punkten* A, A', so sieht man sofort, dass *der Kegelschnitt* K^2 *durch die beiden projectiven Büschel erzeugt ist und im Allgemeinen nicht ausartet;* Γ_2 *hingegen ist das Paar der Punkte* A, A', die auf K^2 liegen; w ist AA' und W ist der Schnitt der Tangenten in A, A' an K^2.

Das Duale findet bei der andern ausgearteten Correlation statt.

In unserm Systeme [0070] giebt es nun drei von jener Art, keine von dieser; also haben wir unter den Γ_2 drei Punktepaare. Sind nun A, A'; B, B'; C, C' dieselben oder die homologen Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft, so finden wir AA', BB', CC' als Tangenten des Kegelschnitts (w); ferner sehen wir, dass jedes dieser 3 Paare mit den 4 sich selbst entsprechenden Punkten auf einem Kegelschnitt liegt. Aber z. B. auf dem ersten dieser Kegelschnitte liegen auch $(AB, A'C')$, und $(AC, A'B')$; woraus man mit Herrn S. Kantor folgern kann, dass der Büschel der K^2 und die drei Geradenpaare $(AB, A'B')$, $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$ demselben Netze angehören.

Die 3 ausgearteten Correlationen bewirken in dem Büschel der K^2 keine Ausartungen; *wie ergeben sich also die* 3 *Geradenpaare desselben*? Da diese zu allgemeinen Correlationen gehören und bei einer solchen Γ_2 (in beiderlei Sinne) die Polarcurve von K^2 ist, so *muss auch* Γ_2 *in den* 3 *Fällen zu einem Punktepaar degeneriren*, bestehend aus den Polen der beiden Geraden des Geradenpaars K^2 und zwar in beiderlei Sinne, derartig, dass wenn $d \equiv e'$, $f \equiv g'$ die beiden Geraden eines derartigen Geradenpaars K^2 — nennen wir es $K_0{}^2$ — sind, die beiden Punkte des Punktepaares, welches wir dann $\Gamma_2{}^0$ nennen wollen, $D' \equiv G$ und $E \equiv F'$ sind, denn bei diesem Arrangement allein finden wir die allgemeine Eigenschaft von K^2 und Γ_2 wieder, dass sowohl jedem Punkte einer der beiden Geraden von $K_0{}^2$ die zwei nach den Punkten von $\Gamma_2{}^0$ gehenden Geraden als die beiden Polaren zugehören, als auch die beiden Schnitte einer Geraden durch einen Punkt von $\Gamma_2{}^0$ mit $K_0{}^2$ die beiden Pole dieser Geraden sind.

Den Punkt W werden wir auf der Doppellinie des Punktepaars $\Gamma_2{}^0$ harmonisch geordnet finden zu jedem der beiden Schnitte mit den Geraden von $K_0{}^2$ in Bezug auf die beiden Punkte von $\Gamma_2{}^0$, weil die Tangente eines Geradenpaars die betreffende Gerade desselben ist; daraus folgt, dass *die Doppellinie von* $\Gamma_2{}^0$ *mit dem Doppelpunkte von* $K_0{}^2$ *incidirt;* in jener vereinigen sich u, v, in diesem U, V; und W ist harmonisch zu letzterem Punkte in Bezug auf die beiden Punkte von Γ_2^0, w harmonisch zu ersterer Linie in Bezug auf die beiden Geraden von K_0^2. Dass W, w; $U \equiv V$, $u \equiv v$ Pol und Polare für K_0^2 und Γ_2^0 sind, ersieht man leicht, sowie auch die doppelte Berührung von K_0^2, Γ_2^0.

Wir haben so in dem Systeme der Γ_2 zu den früheren 3 Punktepaaren, die von den Correlationen mit singulären Punkten herrühren, nun noch 3 neue erhalten, und damit alle; denn *ein* Γ_2 *degenerirt zum Punktepaar nur, wenn die Correlation singuläre Punkte hat, oder wenn gleichzeitig* K^2 *zum Geradenpaar ausartet.* In Folge der bekannten Beziehungen zwischen Charakteristiken — die eine fanden wir oben gleich 2 — und Ausartungen *giebt es demnach in dem Systeme der* Γ_2 *kein Geradenpaar und je* 4 *gehen durch einen Punkt.*

9. Doch kommen wir nun zu dem obigen System von Correlationen (Nr. 5.) zurück, welche alle dieselbe Kerncurve K^2 haben, die in denselben zwei Punkten U, V von den veränderlichen Γ_2 tangirt wird, und welche zu derselben quadratischen Inversion führen. Der Fall, wo Γ_2 in das Punktepaar U, V ausartet, entspricht einer Correlation mit den singulären Punkten U, V und zeigt, dass *die Inversion auch durch zwei projective Büschel* U, V *in folgender Weise entsteht:* einem Punkte P entspricht der Schnittpunkt P' der beiden Strahlen, welche den Strahlen UP, VP der beiden Büschel je im andern entsprechen. Punkt W ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen, welche UV entsprechen. Dass PP' stets durch diesen Punkt geht, auf ihr durch die beiden Büschel eine Involution entsteht und deren Doppelpunkte die Schnitte mit dem durch die Büschel erzeugten Kegelschnitte sind, ist bekannt, aber auf die Erzeugung der Inversion (mit drei reellen Hauptpunkten) vielleicht noch nicht angewandt worden.

Die Correlation aber, deren Γ_2 in das Geradenpaar u, v oder $W(U, V)$ ausartet, hat zwei singuläre Punkte, die sich vereinigt haben, und zwar so, dass die projectiven Büschel identisch sind; als solche ist sie ebenso, wie das Polarsystem im Systeme der Correlationen, zur Erzeugung der Inversion unbrauchbar.

10. Bei einer allgemeinen Correlation zweier Felder derselben Ebene laufen die Verbindungslinien doppelt conjugirter Punkte in einen Punkt W zusammen, wie oben erwähnt.

Wenn aber bei einer Correlation drei Paare doppelt conjugirter Punkte — 6 Bedingungen — *so liegen, dass die drei Verbindungslinien nicht in einen Punkt zusammenlaufen, so ist* (wie auch die beiden fehlenden Bedingungen seien) *die Correlation ein Polarsystem;* d. h. *jeder Punkt hat in beiderlei Sinne dieselben Polare, oder*, anders ausgesprochen, *jede weitere zwei in dem einen Sinne conjugirte Punkte sind es auch im andern Sinne.*

In der That, auf den 3 Linien entstehen sofort Involutionen doppelt conjugirter Punkte, die drei Schnittpunkte haben also in beiderlei Sinne dieselbe Polare, also trägt auch jede Linie durch einen derselben eine Involution doppelt conjugirter Punkte; woraus für jeden Punkt folgt, dass seine beiden Polaren sich vereinigen.

Der analytische Beweis ist noch einfacher. Die Gleichung:

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1)\, x_1' +\\ &(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1)\, y_1' +\\ &(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1)\, z_1' = 0,\end{aligned}$$

welche ausdrückt, dass dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ des ersten Feldes der Punkt $x_1' y_1' z_1'$ im zweiten conjugirt ist, bleibt auch nach Vertauschung beider Punkte richtig; daraus folgt, wenn wir beide Gleichungen von einander subtrahiren und $u_1 v_1 w_1$ die Coordinaten der Verbindungslinie nennen:

$$(a_{23} - a_{32})\, u_1 + (a_{31} - a_{13})\, v_1 + (a_{12} - a_{21})\, w_1 = 0;$$

solcher Gleichungen haben wir drei und aus ihnen folgen, da $(u_1 v_2 w_3) \gtrless 0$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$, d. h. die Bedingungsgleichungen des Polarsystems. Diese Eigenschaft, dass 3 *beliebige* Paare von Punkten doppelt conjugirt sind, ist ein allgemeineres und für Abzählungen geeigneteres Kriterium dafür, dass eine Correlation ein Polarsystem ist, als dass ein Dreieck existirt, in dem jede Ecke als Punkt des einen Feldes die Gegenseite zur Polare hat.*)

11. Ersetzen wir die Felder durch zwei Bündel. Es seien 9 Punkte beliebig im Raume gegeben: $S, S', \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{G}$. *Wir beziehen die beiden Bündel S, S' so reciprok auf einander, dass den Strahlen $S(\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{G})$ die Strahlen $S'(\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{G})$ conjugirt sind.* Wir erhalten ein System [0070] von Correlationen, und die Ebenen, die einem Strahle p des einen Bündels entsprechen, bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe p' also dem Strahle p gemeinsam conjugirt ist in allen Correlationen. Unter den drei ausgearteten Correlationen mit singulären Axen ist eine hier sofort ersichtlich: die beiden Axen vereinigen sich in SS' und die beiden projectiven Ebenenbüschel um sie sind identisch; in einer ausgearteten Correlation zweier Bündel mit singulären Axen entspricht nun einem Strahle des einen Bündels diejenige Ebene im andern, welche in der Projectivität der beiden Ebenenbüschel um die singulären Axen der den Strahl mit der Axe seines Bündels verbindenden Ebene homolog ist. In unserer evidenten ausgearteten Correlation entspricht also dem Strahle p die Ebene von p nach SS', weil sie sich selbst entspricht in der zur Identität gewordenen Projectivität; in dieser Ebene muss also auch p' liegen,

---

*) Staudt, Geom. der Lage, § 18.; Reye, Geom. der Lage, 2. Abth., 9. Vortrag.

demnach begegnen sich p und p'. Jeder Strahl des einen Bündels trifft den ihm in allen Correlationen gemeinsam conjugirten Strahl, oder er trifft die ihm in den verschiedenen Correlationen entsprechenden Ebenen alle in demselben Punkte; d. h. *diese sämmtlichen Correlationen liefern als Erzeugniss der Schnitte ihrer entsprechenden Elemente dieselbe Fläche 2. Grades.* Dies ist der von Herrn Schröter*) gefundene Satz, in anderer Weise bewiesen. Dieser Beweis rührt von Herrn Hirst her, der ihn in einem Gespräche mit mir im Jahre 1877 fand.

Umgekehrt: Jede Fläche 2. Grades inducirt in den Bündeln zweier ihrer Punkte einfach unendlich viele Correlationen; darunter 3 mit je einem singulären Strahle in jedem Bündel. Diese 3 singulären Strahlen sind für jeden der beiden Punkte der Verbindungsstrahl mit dem andern und die beiden Geraden der Fläche durch ihn. Oder: Jede Fläche 2. Grades inducirt in den Bündeln zweier ihrer Punkte eine quadratische Verwandtschaft; Hauptstrahlen derselben in jedem Bündel sind die 3 genannten Strahlen.

Ferner: *Wenn zwei Bündel in einer solchen quadratischen Verwandtschaft ihrer Strahlen sich befinden, dass 7 Strahlen des einen ihre entsprechenden treffen, so thun es alle, und das Erzeugniss dieser doppelt unendlich vielen Schnittpunkte ist eine Fläche 2. Grades.*

12. Im Allgemeinen aber schneiden sich bei zwei Bündeln, welche in einer quadratischen Verwandtschaft ihrer Strahlen sich befinden, nur einfach unendlich viele Strahlen und diese Schnitte erzeugen eine Raumcurve 4. Ordnung 1. Species, in der sich alle Flächen 2. Grades schneiden, die durch die Correlationen entstehen, welche zur Verwandtschaft 2. Grades führen.**) Also müssen natürlich im vorigen Satze die 7 Strahlenpaare so sein, dass ihre 7 Schnittpunkte und die beiden Bündelscheitel nicht auf derselben Raumcurve 4. Ordnung 1. Species liegen. Diese Curve ist, ausser durch die Scheitel, durch 6 Punkte bestimmt; diese führen zu 6 Paaren entsprechender Strahlen der quadratischen Verwandtschaft und ermöglichen ∞^2 solche Verwandtschaften; man erhält dieselben, wenn man die ∞^1 Correlationen, die zu irgend einer Fläche des Büschels gehören, mit denen bei einer andern combinirt. Jede solche Combination führt zu einer Verwandtschaft 2. Grades und zu einem Systeme von Correlationen, welches die übrigen Flächen des Büschels hervorbringt.

---

*) Crelle's Journal Bd. 62, S. 215. — Cf. auch Math. Ann. XII, S. 368.

**) Das Erzeugniss zweier Bündel, die sich in einer Cremona'schen Verwandtschaft n^{ten} Grades befinden, ist, wie Herr Cremona selbst am Ende der schon mehrfach erwähnten zweiten Note über geometrische Transformation ebener Figuren gefunden hat, eine Curve $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlechte $n-1$, für welche aber die Scheitel der Bündel (ausser bei den kleinsten Werthen von n) singuläre Punkte sind.

Wir sehen aber:

Durch 6 *Paare entsprechender Strahlen zweier Bündel sind* ∞^2 *quadratische Verwandtschaften bestimmt; lassen wir in allen* 6 *Paaren die beiden Strahlen sich treffen, so treffen sich in allen* ∞^2 *Verwandtschaften noch dieselben* ∞^1 *entsprechenden Strahlen und das Erzeugniss aller ist dieselbe Raumcurve* 4. *Ordnung erster Species.*

Ferner: *Alle* ∞^4 *quadratischen Verwandtschaften zweier Bündel, die durch* 5 *Paare sich treffender entsprechender Strahlen bestimmt sind, haben noch ein sechstes Paar sich treffender entsprechender Strahlen gemein.*

13. Durch Dualisirung ergiebt sich vermittelst zweier reciproken Felder eine eindeutige Verwandtschaft 2. Grades der Geraden, die von der der Punkte verschieden ist, während im Falle der Collineation die eindeutige Verwandtschaft der Punkte die der Geraden nach sich zieht und umgekehrt.

Werden die Felder, statt reciprok, *in zwei Weisen collinear auf einander bezogen, so kann man entweder a*) *einem Punkte des einen Feldes die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte des andern*, oder b) *einer Geraden des ersten Feldes den Schnittpunkt der beiden entsprechenden im zweiten correspondiren lassen.* Man erhält so eine eindeutige Punkt-Gerade-Verwandtschaft, mit dem Unterschiede, dass in a) der Punkt im ersten, die Gerade im zweiten Felde liegt, in b) umgekehrt. Einer Geraden des ersten, einem Punkte der zweiten entspricht in a) ein Kegelschnitt, bei b) einem Punkte des ersten, einer Geraden des zweiten. Ich bespreche dies ausführlich, weil Herr Milinowski in seinem Aufsatze über die reciproke Verwandtschaft 2. Grades*) sich in der — wahrscheinlich durch die Collineation und Correlation veranlassten — irrigen Vorstellung (welche es nothwendig macht, den ganzen Aufsatz mit einer gewissen Vorsicht zu lesen) bewegt, als wenn durch a) und b) die beiden Felder sich nur in einer einzigen Verwandtschaft befänden. Dass die Eigenschaften der Verwandtschaft a) aus denen von b) durch Dualisirung sich ergeben, ist ersichtlich; aber weil man in derselben Weise, wie man bei a) aus einem Punkte des ersten Feldes seine entsprechende Gerade im zweiten, bei b) aus einem Punkte des zweiten Feldes seine entsprechende im ersten erhält, so kann man die Eigenschaften der Verwandtschaft b) auch aus denen von a) durch Vertauschung der Felder erhalten.

Es giebt auch hier ein Hauptdreieck in jedem Felde, und jeder Ecke desjenigen im ersten Felde entspricht bei a) jede Gerade durch die homologe Ecke des andern. Die sich selbst entsprechenden Punkte der beiden collinearen Felder in der zweiten Ebene bilden deren Hauptdreieck, und die ihnen entsprechenden das in der ersten Ebene.

---

*) Crelle's Journal Bd. 79, S. 140.

14. *Sind beide Trägerebenen identisch* (Σ), so dass man 3 collineare Felder in derselben Ebene hat; so führt die Verwandtschaft a) im ersten der beiden quadratisch verwandten Felder Σ_1, Σ_{23} und im ersten der collinearen Σ_1, Σ_2, Σ_3 zu einer Curve 3. Ordnung der Punkte, welche auf ihre entsprechenden Geraden in Σ_{23} fallen, oder mit ihren entsprechenden Punkten in Σ_2, Σ_3 in einer Geraden liegen (diese Punkte in Σ_2, Σ_3 erzeugen dann natürlich auch Curven 3. Ordnung), im zweiten Felde Σ_{23} zu *einer Curve* 3. *Classe* K_3 der Geraden, welche durch ihre entsprechenden Punkte in Σ_1 gehen, oder *der Geraden, auf denen* 3 *entsprechende Punkte von* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *liegen*. Die Verwandtschaft b) hingegen führt zu einer Curve 3. Classe der Geraden in Σ_1, die mit ihren entsprechenden Punkten in Σ_{23} incidiren, oder mit ihren entsprechenden Geraden in Σ_2, Σ_3 (die dann auch je eine Curve dritter Classe einhüllen) in einen Punkt zusammenlaufen, und zu *einer Curve* 3. *Ordnung* K^3 der Punkte in Σ_{23}, die auf ihre entsprechenden Geraden in Σ_1 fallen, oder *der Punkte, in welche drei entsprechende Geraden von* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *zusammenlaufen.**) *Die letztere Curve* K^3 *enthält*, wie Herr Milinowski zeigt, *auch die sich selbst entsprechenden Punkte je zweier der drei collinearen Felder*, oder, da die drei collinearen Felder ein Netz von collinearen Feldern hervorrufen, so beschaffen, dass in jeden Punkt von K^3 entsprechende Geraden von allen zusammenlaufen, die sich selbst entsprechenden Punkte je zweier.

Bezieht man also eins von diesen Feldern in Σ und damit alle reciprok auf irgend ein anderes Σ', wählt 7 Punkte auf K^3 und die 7 Punkte in Σ', die je den in jenen zusammenlaufenden Geraden entsprechen, zu conjugirten, *so hat man* ∞^2 *Correlationen*, *denen alle diese* 7 *Paare conjugirter Punkte gemein sind*, und also nicht blos ein einfach unendliches System [0070]. Es gehen dann nicht in allen diesen Correlationen die Polaren eines Punktes der einen Ebene durch denselben Punkt, sondern nur die der Punkte einer gewissen Curve 3. Ordnung, in Σ offenbar der Curve K^3, in Σ' aber derjenigen Curve $(K^3)'$, welche den Curven 3. Classe der in die Punkte von K^3 zusammenlaufenden Geraden von Σ_1, Σ_2, Σ_3 reciprok in Σ' entspricht. Wir erhalten in diesem Falle auch nicht eine einzige quadratische Verwandtschaft zwischen Σ, Σ', sondern unendlich viele, für welche die 7 Paare von Punkten entsprechend sind, und die Hauptpunkte in Σ erfüllen die Curve K^3.

---

*) Schröter, Crelle's Journal B. 62, S. 265 am Anfang; Reye a. a. O. am Ende; Milinowski a. a. O.; Schur, Leipziger Habilitationsschrift (Math. Ann. Bd. XVIII, S. 1) § 3.

Es ist dies der Fall, auf den Herr Reye a. a. O. S. 297 aufmerksam macht.

Ferner giebt es, wegen der ∞^2 Correlationen, in diesem Falle nicht blos 3, sondern ∞^1 *Correlationen mit singulären Punkten*, oder: das Problem der Homographie (Nr. 2.) hat für diese beiden Gruppen von 7 Punkten in Σ, Σ' unendlich viele Lösungen. Nehmen wir zunächst blos je 6 Punkte, so haben wir nach Abschn. III. meines in Nr. 2. erwähnten Aufsatzes 2 Curven 3. Ordnung — dort R^3, P^3 genannt; es sind unsere jetzigen Curven K^3, $(K^3)'$ —, mit eindeutig sich entsprechenden Punkten P, Π, welche bez. nach den beiden sechspunktigen Gruppen projective Büschel senden. Aber Herr Hirst hat gefunden — ich muss den Beweis, den er mir 1876 mitgetheilt hat, hier leider unterdrücken —, dass noch in einer andern Weise jedem Punkte B der Curve R^3 eindeutig ein Punkt B von P^3 entspricht, derartig, dass in je zwei der projectiven Büschel P, Π, welches dieser Paare P, Π auch genommen werde, entsprechende Strahlen nach B, B gehen. Unser siebentes Paar ist ein solches Paar B, B.

15. Nehmen wir aber ein einfach unendliches System [0070] von Correlationen zwischen Σ, Σ', bei welchem die 7 definirenden Paare eine *freie* Lage haben, sowie wir es am Anfang angenommen haben; greifen daraus drei Correlationen, so laufen in den drei collinearen Feldern in Σ jede drei entsprechende Geraden in einen Punkt zusammen.

Machen wir uns von der Ebene Σ', die doch nur eine Hilfsebene ist, frei, so gewinnen wir folgendes Resultat:

Man beziehe zunächst die beiden Felder Σ_1, Σ_2 *derselben Ebene collinear auf einander, greife dann beliebig* 7 *Punkte der Ebene heraus:* $A, B, \cdots, G$ (welche ersichtlich mit den 3 sich selbst entsprechenden Punkten von Σ_1, Σ_2 nicht auf einer Curve 3. Ordnung liegen werden). *In jedem dieser Punkte schneiden sich*, wie man leicht sieht, *zwei entsprechende Geraden* $a_1, a_2; \cdots; g_1, g_2$ *von* Σ_1, Σ_2. *Beziehen wir nun ein drittes Feld* Σ_3 *derselben Ebene so collinear auf* Σ_1, *dass die den Geraden* $a_1, \cdots, g_1$ *entsprechenden bez. durch* $A, \cdots, G$ *gehen. Es ist dies auf* ∞^1 *Weisen möglich*, denn wir haben ein System [0070] von Collineationen; *und* Σ_2 *und* Σ_3 *werden auch collinear. Welches Paar entsprechender Geraden* x_1, x_2 *von* Σ_1, Σ_2 *man auch nehme, die entsprechenden Geraden* x_3 *in den* Σ_3 *gehen stets durch den Schnitt* $x_1 x_2$.

Haben wir nun eins der Σ_3 gewählt und damit 3 collineare Felder Σ_1, Σ_2, Σ_3, bei denen jede drei entsprechenden Geraden in einen Punkt zusammenlaufen; lassen wir dann wieder einer Geraden von Σ_1 den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden in Σ_2, Σ_3 correspondiren, so erhalten wir *eine Gerade-Punkt-Verwandtschaft* 2. *Grades zwischen* $\Sigma_1 = \sigma$ *und* $\Sigma_{23} = \Sigma$, *bei welcher jede Gerade durch ihren entsprechenden Punkt geht: „ein ebenes Nullsystem* 2. *Grades.“*

Diese Incidenz bewirkt, dass *die beiden Hauptdreiecke mit ihren homologen Ecken sich decken*; sei dieses Dreieck $A_1 A_2 A_3$. Es ist jedem Kegelschnitt ein-, bez. umgeschrieben, der einer Punktreihe in Σ, bez. einem Strahlbüschel in σ correspondirt. Seien x, X zwei entsprechende Elemente von σ, Σ; schneide x die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 bez. in X_1, X_2, X_3 und seien X_1', X_2', X_3' die Projectionen von X aus A_1, A_2, A_3 auf die Gegenseiten, so findet man leicht aus der Incidenz von x und X, dass, wenn $(A_2 A_3 X_1 X_1') = \lambda$ gesetzt wird, $(A_3 A_1 X_2 X_2')$ und $(A_1 A_2 X_3 X_3')$ die Werthe $1 - \lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$ haben. Ferner, wenn y, Y ein zweites Paar entsprechender Elemente sind, so ergiebt sich, weil der Strahlbüschel um xy mit der Punktreihe auf dem entsprechenden Kegelschnitte $A_1A_2A_3XY$ projectiv ist:

$$(A_2A_3X_1Y_1) = (A_2A_3X_1'Y_1'),$$

oder

$$(A_2A_3XX_1') = (A_2A_3Y_1Y_1'),$$

also constant.

Damit ist erkannt, dass *jedes Nullsystem 2. Grades (mit vollständig reellem Hauptdreiecke) auf die von Herrn Ameseder**) *gefundene Weise construirt werden kann.*

16. Denken wir uns zwei *Bündel* S', S'' collinear gemacht, beziehen wir einen dritten Bündel S''' collinear auf sie, oder gleich besser, auf das Sehnensystem der von ihnen erzeugten cubischen Raumcurve, derartig, dass 7 beliebige Sehnen von ihren entsprechenden Ebenen in 7 Punkten einer Ebene Σ getroffen werden, — was, wie der Schnitt mit Σ beweist, in ∞^1 Weisen möglich ist —, so schneidet sich jede Sehne mit ihrer entsprechenden Ebene (oder jede drei entsprechende Ebenen) in Σ, und die erzeugte Fläche 3. Ordnung zerfällt in die Ebene Σ und ein Hyperboloid, welches dadurch entsteht, dass ∞^1 Ebenen in S''' (welche einen Kegel 2. Grades umhüllen) durch ihre entsprechenden Sehnen gehen.

Die Correlationssysteme [1050], [0150], [2030], [1130], [0230], [3010], [0310] führen zu ähnlichen Sätzen, z. B. die beiden letzten zu folgendem: Wenn drei collineare Felder derselben Ebene 3 Punkte oder 3 Geraden entsprechend gemein haben und ausserdem noch drei entsprechende Geraden in einem (mit diesem Dreiecke nicht incidenten) Punkte zusammenlaufen, so thun es jede drei entsprechende Geraden, oder [1130] zu: Haben drei solche collineare Felder einen Punkt A, eine Gerade a entsprechend gemein und laufen dreimal drei entsprechende Gerade in einen Punkt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ zusammen (so jedoch, dass diese 3 Punkte eine freie Lage zu A, a haben), so laufen jede drei entsprechenden Geraden in einen Punkt zusammen.

---

*) Wiener Sitzungsberichte 2. Abth. Febr. 1881.

Die entsprechenden Sätze über zerfallende cubische Flächen — auf denen Convergenzpunkte dreier entsprechender Strahlen der drei erzeugenden collinearen Bündel bekanntlich Knotenpunkte sein müssen — ergeben sich meistens ganz unmittelbar; z. B. im letzten Falle müsste, wenn die Fläche nicht zerfiele, der Schnitt mit der Ebene Aa aus a und einem durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gehenden Geradenpaare bestehen, dessen Doppelpunkt A ist, was bei der freien Lage von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ in Aa nicht möglich ist.

II.

17. *Gegeben seien zwei räumliche Systeme (Räume), welche sich in reciproker Beziehung befinden. Zu jedem Punkte giebt es nun ∞^1 doppelt conjugirte, alle Punkte der Schnittlinie der beiden Polarebenen.* Erinnern wir uns zunächst aus dem Theile B. von Herrn Schröters Aufsatz in Crelle's Journal Bd. 77, dass eine solche Schnittlinie der beiden Ebenen, welche einem Punkte in beiderlei Sinne entsprechen, von Herrn Schröter *Wechselstrahl* genannt, zugleich Verbindungslinie zweier Punkte ist, die einer und derselben Ebene in beiderlei Sinne entsprechen, so wie eine solche Linie, deren beide Polaren sich treffen,*) und dass alle diese Wechselstrahlen einen tetraedralen Complex erzeugen.

Von jedem Punkte geht also ein ganzer Strahlbüschel von Verbindungslinien doppelt conjugirter Punkte aus, und jede solche Linie trägt eine Involution doppelt conjugirter Punkte wie in der Ebene. *Also bilden alle diese Verbindungslinien doppelt conjugirter Punkte einen linearen Complex;* durchschneiden wir beide Räume mit einer Ebene, so kommen wir auf das ebene Problem zurück und sehen den in der Ebene befindlichen Strahlbüschel des Complexes.

Zu jedem Punkte des Raumes haben wir also einen Strahl des tetraedralen Complexes der Wechselstrahlen zugeordnet, der dem Punkte doppelt conjugirt ist. Er ist ihm auch conjugirt in Bezug auf die Punktkernfläche F^2 der Reciprocität, d. i. die Fläche der Punkte, die in ihre entsprechenden Ebenen fallen. Construirt man zu der Ebene, welche den Punkt mit diesem zugehörigen Wechselstrahl verbindet, in Bezug auf die in demselben sich schneidenden beiden Polarebenen die vierte harmonische Ebene, so ist dies nach Herrn Schröter seine Polarebene in Bezug auf F^2.

Jedem Punkte wird ferner eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet, die ihn mit dem zugehörigen Wechselstrahl verbindet, und *man erhält so ein Nullsystem;* in dem Falle, wo der Punkt auf F^2

---

*) Ihr Schnittpunkt ist der Punkt, dessen beide Polarebenen sich im Wechselstrahl schneiden; ihre Verbindungsebene ist die Ebene, deren beide Pole er verbindet.

und also auf seinen Wechselstrahl fällt, wird die scheinbare Unbestimmtheit durch die eben erwähnte harmonische Eigenschaft gehoben.

Wir erhalten aber noch ein zweites Nullsystem und einen zweiten linearen Complex. Jeder Ebene des Raumes gehört ein Wechselstrahl zu, der ihre beiden Pole verbindet, und bestimmt in ihr den Nullpunkt dieses Systems, und die Strahlen der Ebene um diesen Nullpunkt, die Strahlen des Complexes, tragen Involutionen doppelt conjugirter Ebenen.

Die beiden Nullpunkte einer Ebene E in diesen beiden Nullsystemen erhält man also so: Im zweiten ist er der Durchstosspunkt der Verbindungslinie der beiden Pole der Ebene E; im ersten hingegen ist er der Convergenzpunkt W der Verbindungslinien der doppelt conjugirten Punkte der ebenen Correlation, welche durch die Ebene E aus der räumlichen ausgeschnitten wird, oder der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten der beiden Kerncurven dieser ebenen Correlation.

18. Wir wollen zu den Wechselstrahlen der Ebene E je den Pol aufsuchen, dessen beide Polarebenen sich im Wechselstrahl schneiden, oder den Schnittpunkt der beiden Polaren des Wechselstrahls. Alle Wechselstrahlen der Ebene E umhüllen einen Kegelschnitt; folglich erzeugen ihre Polaren zwei Kegel, deren Spitzen P', Q die beiden Pole der Ebene sind. Die Verbindungslinie g, h' derselben, selbst ein Wechselstrahl, ist beiden Kegeln gemein; denn ihre beiden Polaren liegen in der Ebene E und sind Wechselstrahlen; fassen wir nämlich Q als Punkt des zweiten Raumes auf, so geht seine Polarebene im ersten Raume durch die Polare der Geraden $P'Q = h'$, die sie als Gerade des zweiten im ersten Raume hat, und schneidet sich also in derselben mit der Polarebene von Q als Punkt des ersten Raumes, d. i. mit der gegebenen Ebene E. Mithin haben die beiden Kegel ausserdem *eine cubische Raumcurve* gemein, *welche* demnach *der Ort der Punkte ist, deren beide Polarebenen sich in den Wechselstrahlen unserer Ebene* E *schneiden;* eine Curve vom Geschlechte 0 muss dieser Ort auch sein, da seine Punkte sich in eindeutiger Beziehung zu den Tangenten eines Kegelschnitts befinden. Die 3 Schnitte derselben mit der Ebene E sind die 3 Punkte W, U, V der von der Ebene ausgeschnittenen ebenen Correlation.

Die Ebenen hingegen, deren beide Pole durch die in E befindlichen Wechselstrahlen verbunden sind, bilden den Büschel um $P'Q$.

Duale Betrachtungen führen uns zu den beiden Nullebenen eines Punktes und zu den Punkten und Ebenen, welche den Wechselstrahlen durch den Punkt zugehören.

Herr Schröter hat a. a. O. gefunden, dass jede räumliche Correlation zwei Polarsysteme inducirt, diejenigen, denen die beiden Kernflächen als Ordnungsflächen zugehören; wir sehen hier, dass sie auch zwei Nullsysteme oder lineare Complexe inducirt.

Ein Strahl, der beiden Complexen gemein ist, trägt also sowohl eine Involution doppelt conjugirter Punkte, als auch eine Involution doppelt conjugirter Ebenen. Alle diese Strahlen erzeugen eine lineare Congruenz, als deren Directricen man sofort die beiden Diagonalen des windschiefen Vierecks erkennt, in dem nach Herrn Schröter die beiden Kernflächen sich durchschneiden; welche Linien in beiderlei Sinne Polaren von einander sind. Die eben erwähnten beiden Involutionen, welche von einem Strahl der Congruenz getragen werden, sind natürlich verschieden von den beiden Involutionen, welche dem Strahle durch das geschaart involutorische System zukommen, das mit der linearen Congruenz verbunden ist. Die Doppelelemente unserer Involutionen liegen auf der einen, bez. berühren die andere Kernfläche; während diejenigen der Involutionen des geschaart involutorischen Systems bekanntlich mit den Directricen incident sind.

19. Aber wir haben durch die Correlation noch eine andere Beziehung inducirt. Jedem Punkte des Raumes entspricht ein Wechselstrahl, in dem seine beiden Polarebenen sich schneiden; jeder Ebene ebenfalls ein Wechselstrahl, der ihre beiden Pole verbindet. *Demnach ist jedem Punkte eine Ebene zugeordnet und umgekehrt: zu beiden gehört derselbe Wechselstrahl.* Von welcher Art ist diese Beziehung?

Zunächst sehen wir, dass *jede Ebene* Π *durch ihren entsprechenden Punkt* P *geht;* denn sie verbindet die beiden Polaren der Schnittlinie der beiden Polarebenen des Punktes (oder des dem Punkte zugehörigen Wechselstrahls), und diese beiden Polaren schneiden sich im Punkt.

Bewegt sich P auf einer Geraden g, so beschreibt der zugehörige Wechselstrahl eine Regelschaar, und seine beiden Polaren thun dasselbe. Die Hyperboloide, welche die letzteren tragen, haben die Gerade g gemein; die Ebenen Π, welche je zwei zusammengehörige (und sich je auf g schneidende) Polaren verbinden, sind gemeinsame Berührungsebenen beider, welche im Allgemeinen nicht durch g gehen; sie umhüllen also eine abwickelbare Fläche 3. Classe. Diese entspricht der Geraden g.

Ebenso erzeugen die Punkte, welche den Ebenen eines Büschels entsprechen, eine Raumcurve 3. Ordnung. Daraus ergiebt sich, dass *den Punkten einer Ebene die Berührungsebenen einer Fläche* 3. *Classe, den Ebenen eines Bündels die Punkte einer Fläche* 3. *Ordnung entsprechen. Alle diese Flächen* 3. *Ordnung haben die* 4 *Seiten des den beiden Kernflächen gemeinsamen Vierseits und die beiden Diagonalen gemein, und die Ebenen durch diese sechs Geraden sind gemeinsame Berührungsebenen aller jener Flächen* 3. *Classe.* Diese 6 Geraden sind ja, wie Herr Schröter gefunden, die einzigen 6 Geraden, welche in beiderlei Sinne dieselbe Polare haben, nämlich jede der 4 Seiten sich selbst, jede der Diagonalen die andere; woraus folgt, dass in der jetzigen Beziehung jedem Punkte einer dieser 6 Linien jede Ebene durch die Polare zugeordnet ist. Wir haben im Vorhergehenden ein *„räumliches cubisches Nullsystem.“*

20. Wir haben gefunden, dass bei einer allgemeinen räumlichen Correlation alle Geraden, welche zwei doppelt conjugirte Punkte verbinden und deshalb eine Involution doppelt conjugirter Punkte enthalten, einen linearen Complex bilden.

Eine räumliche Correlation kann bekanntlich 15 *Bedingungen unterworfen werden. Bestimmen wir sie also derartig, dass* 6 *Paare von Punkten doppelt conjugirt sind, welche sich in beliebiger Lage befinden, so dass ihre* 6 *Verbindungslinien nicht demselben linearen Complexe angehören; so kann sie keine allgemeine Correlation sein, sondern muss, welches auch die* 3 *noch fehlenden Bedingungen sind, ein Polarsystem sein.*

Wir stellen uns eine bestimmte Correlation vor, welche diesen 12 Bedingungen genügt, und nehmen noch etwa 3 weitere Paare von (einfach) conjugirten Punkten heraus, so dass sie durch die 15 Data eindeutig fixirt ist.

Die 6 Paare doppelt conjugirter Punkte seien: $A_1, B_1; A_2, B_2; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot; A_6, B_6$. Wir lassen zunächst A_6, B_6 einfach conjugirt sein, nehmen also blos $A_1, B_1; B_1, A_1; \cdot \cdot \cdot; A_5, B_5; B_5, A_5; A_6, B_6$ conjugirt und die 3 weiteren Paare; wir haben dann ein einfach unendliches lineares System von Correlationen. Wir wollen durch B_6 eine Gerade b ziehen und einen auf ihr beweglichen Punkt $\mathfrak{A}$, dem ersten Raume angehörig, dem A_6 als Punkte des zweiten Raumes conjugirt sein lassen: jede Lage von $\mathfrak{A}$ individualisirt eine Correlation des Systems und fällt $\mathfrak{A}$ in B_6, so haben wir den vorliegenden Fall.

Die 5 Linien $A_1B_1, \cdot \cdot \cdot, A_5B_5$ bestimmen einen linearen Complex; sei α_6 die Ebene der von A_6 ausstrahlenden Linien desselben. In ihr liegt n. Vor. B_6 nicht. In ihr liegt aber für jede der Correlationen die Schnittlinie der beiden Polarebenen von A_6; diese Schnittlinie beschreibt einen Strahlbüschel in α_6, denn weil das System durch 14 lineare Bedingungen definirt ist, so beschreibt die eine wie die andere Polarebene von A_6 einen Ebenenbüschel und beide Büschel treffen α_6 in demselben Strahlbüschel.

Die Polarebene von A_6 als Punkt des ersten Raumes geht stets durch B_6, hingegen die von A_6 als Punkt des zweiten Raumes durch den beweglichen $\mathfrak{A}$. Fällt also $\mathfrak{A}$ nach B_6, so vereinigen sich beide Polarebenen, da sie eine in α_6 gelegene Gerade und den ausserhalb α_6 befindlichen B_6 gemein haben. Folglich hat in unserm Falle A_6 in beiderlei Sinn dieselbe Polarebene. Was für A_6 bewiesen ist, kann wegen der auf den 6 Geraden befindlichen Involutionen für jeden Punkt dieser Geraden bewiesen werden, und folgt dann daraus für jede Ebene, indem man sie mit dreien dieser Geraden schneidet, dass sie in beiderlei Sinn denselben Pol hat.

21. Dass, wenn

(a) $A_1, B_1;\ B_1, A_1;\ A_2, B_2;\ B_2, A_2;\ \cdots;\ A_6, B_6;\ B_6, A_6;\ A_7, B_7$

conjugirt sind (wobei immer der erst geschriebene Punkt dem ersten Raume zugerechnet wird), das Conjugirtsein von B_7, A_7 eine Folge ist, leuchtet auch schon daraus ein, dass, wenn dies eine neue unabhängige Bedingung wäre, nur ∞^1 Correlationen möglich wären, während es doch ∞^2 giebt, nämlich die Polarsysteme aller Flächen 2. Grades, für welche $A_1, B_1;\ A_2, B_2;\ \cdots;\ A_7, B_7$ conjugirt sind. Weil die Bedingungen a) sämmtlich linear sind, so laufen die Polarebenen des Punktes B_7 als Punkt des ersten Raumes in allen ∞^2 ihnen genügenden Correlationen durch einen Punkt; dieser ist für die eben erwähnten Polarsysteme der Punkte A_7; demnach ist er auch — wenn ausser denselben noch andere Correlationen den Bedingungen a) genügten — im zweiten Raume bei allen diesen dem B_7 conjugirt. *Also bei einer Correlation, welche* 6 *beliebig gelegene Paare doppelt conjugirter Punkte hat, liegt jeder Punkt, der auf der einen Polarebene eines beliebigen Punktes A_7 liegt, auch auf der andern; d. h. die beiden Polarebenen sind identisch, und die Correlation ist ein Polarsystem.*

Die Existenz von sechs solchen Paaren scheint mir das allgemeinste Kriterium dafür zu sein, dass eine Correlation ein Polarsystem ist.

Der analytische Beweis ist dem ebenen analog und kann unterbleiben.

22. Es mag aber noch ein Kriterium für das Nullsystem ermittelt werden.

Wenn 5 *Punkte $A_1, \cdots, A_5$ sich selbst und* 5 *andere $A_1', \cdots, A_5'$ bez. zu ihnen doppelt conjugirt sind, so ist, wofern diese* 10 *Punkte nicht von einander abhängig sind, die Correlation ein Nullsystem.* Bei der allgemeinen Correlation (incl. des Polarsystems) giebt es auch sich selbst conjugirte Punkte: die Punkte der Punktkernfläche; die Schnittlinie der beiden Polarebenen, auf der die doppelt conjugirten Punkte liegen, liegt dann, wie Herr Schröter beweist, auf der Berührungsebene der Kernfläche. Also haben im allgemeinen Falle 5 sich selbst conjugirte Punkte und die Linien nach je einem doppelt conjugirten die Lage von 5 Punkten einer Fläche 2. Grades und 5 Tangenten derselben, und sind demnach nicht unabhängig von einander. —

Sind wieder $x_1\ y_1\ z_1\ w_1$ die Coordinaten von A_1, $x_1'\ y_1'\ z_1'\ w_1'$ die von A_1', so haben wir die Gleichungen:

$$(1)\quad a_{11}x_1^2 + a_{12}y_1^2 + \cdots + (a_{23}+a_{32})y_1z_1 + (a_{31}+a_{13})z_1x_1 + \cdots + (a_{14}+a_{41})x_1w_1 + \cdots = 0;$$

$$(2)\quad a_{11}x_1x_1' + a_{22}y_1y_1' + \cdots + a_{23}y_1z_1' + a_{32}z_1y_1' + \cdots + d_{14}x_1w_1' \\ + a_{41}w_1x_1' + \cdots = 0;$$

$$(3)\quad a_{11}x_1x_1' + a_{22}y_1y_1' + \cdots + a_{23}y_1'z_1 + a_{32}z_1'y_1 + \cdots + a_{14}x_1'w_1 \\ + a_{41}w_1'x_1 + \cdots = 0;$$

aus (2) und (3) folgt:

$$(4)\quad 2a_{11}x_1x_1' + 2a_{22}y_1y_1' + \cdots + (a_{23}+a_{32})(y_1z_1'+z_1y_1') + \cdots = 0.$$

Solcher Gleichungspaare wie (1) und (4) erhalten wir fünf, und aus diesen 10 Gleichungen folgt, da bei der beliebigen Lage der 10 Punkte die Determinante der $x_1x_1', \cdots, y_1z_1' + z_1y_1', \cdots$ nicht verschwindet:

$$a_{11} = 0, \cdots, \quad a_{23} + a_{32} = 0, \cdots;$$

was die analytischen Bedingungen des Nullsystems sind.

23. *Wenn wir zwei Räume in drei Weisen reciprok auf einander beziehen und dann einem Punkte des einen den Schnittpunkt der drei Polarebenen desselben im andern Raum entsprechen lassen*, *so erhalten wir eine eindeutige cubische Punktverwandtschaft und zwar*, was im Raume ja nicht selbstverständlich ist wie in der Ebene, *eine in beiderlei Sinne cubische;* d. h. jeder Geraden, jeder Ebene des einen und also auch des andern Raumes entspricht eine cubische Raumcurve, bez. eine cubische Fläche in Folge bekannter Sätze.*) *Alle cubischen Flächen des einen Raums haben eine Raumcurve* 6. *Ordnung und* 16^ten^ *Ranges gemein*, welche also die Hauptcurve des homaloidischen Flächensystems**) dieses Raums ist. Sie wird gebildet durch diejenigen Punkte dieses Raums, deren drei Polarebenen im andern in eine Gerade zusammenlaufen, und dass es in jeder Ebene 6 solche Punkte giebt, folgt aus dem bekannten Satze, dass in drei collinearen Bündeln sechsmal drei entsprechende Ebenen eine Gerade gemein haben.

Diese Hauptcurve trifft die cubische Raumcurve, in der sich zwei Flächen des Systems sonst noch durchschneiden und welche der Schnittlinie der beiden entsprechenden Ebenen im andern Raume correspondirt, in 8 Punkten;***) demnach trifft diese Schnittlinie 8 von den Geraden ihres Raumes, in welche die Polarebenen der Punkte der Hauptcurve zusammenlaufen; also bilden diese Geraden *eine Fläche* 8. *Grades.* Die cubische Raumcurve, welche einer solchen Geraden entspricht, artet in drei in den zugehörigen Punkt zusammenlaufende Geraden aus; daraus folgt, dass die Hauptcurve 6^ter^ Ordnung jedes Raumes auf der Fläche 8. Grades desselben Raumes dreifach ist und jede von ihren Erzeugenden dreimal trifft.

---

*) Es ist dies die rationale Transformation, von welcher Herr **Cremona** Gött. Nachr. von 1871, S. 129 eine Reihe von Specialfällen betrachtet.

) **Cremona, Annali di Matematica ser. 2. t. V, p. 131.

***) Vergl. meine „Flächen 3. Ordnung“ Nr. 64; oder Salmon-Fiedler's Raumgeom. 2. Band 4. Aufl. Nr. 108, 109.

Unsere cubische Verwandtschaft ist durch 13 *Paare entsprechender Punkte* (also 39 Bedingungen*)) *bestimmt* und kann durch je drei von einander unabhängige Correlationen aus dem doppelt unendlichen linearen Systeme von Correlationen, das durch 13 Paare conjugirter Punkte fixirt ist, erzeugt werden; weil durch den Punkt, in den die Polarebenen eines Punktes in den 3 gegebenen Correlationen zusammenlaufen, auch alle übrigen Polarebenen desselben gehen.

In diesem doppelt unendlichen Systeme giebt es einfach unendliche viele Correlationen mit je einem singulären Punkte in jedem Raume.**) Die singulären Punkte erzeugen die beiden Hauptcurven 6. Ordnung, oder diese Curven werden gebildet durch die Scheitel derjenigen Bündel, welche so reciprok bezogen werden können, dass die nach den 13 Punkten des einen und denen des andern Raumes gehenden Strahlen conjugirt sind; sie sind also die Curven, welche ich in meinen Correlations-Untersuchungen gefunden habe.***)

Die 8 *Punkte*, welche den Punktkernflächen der 3 Correlationen, von denen wir ausgegangen sind, und also auch denen aller übrigen des doppelt unendlichen Systems gemeinsam sind, *sind die sich selbst entsprechenden Punkte der cubischen Verwandtschaft.*

An Stelle von 13 Paaren conjugirter Punkte könnten wir auch Bedingungsguppen setzen, welche mit 13 einfachen linearen Bedingungen äquivalent sind, unter denen sich aber vielfache befinden: Punkt und conjugirte Gerade, Punkt und Polarebene etc.; doch will ich nicht darauf eingehen.

Sind alle drei Correlationen Polarsysteme, was dann auch für sämmtliche Correlationen des durch sie inducirten doppelt unendlichen linearen Systems gilt; so vereinigen sich die beiden Hauptcurven 6. Ordnung in die Kegelspitzencurve des durch die Ordnungsflächen gebildeten Netzes, und auch die beiden Regelflächen 8. Grades fallen zusammen.*)

---

*) Dies stimmt mit Folgendem:

24 Bedingungen sind zur Bestimmung der Hauptcurve 6. Ordnung nothwendig (Crelle's Journal Bd. 88, S. 235); durch diese ist dann das Flächensystem in dem einen Raume bestimmt, und nun lässt man noch 5 Flächen desselben 5 Ebenen des andern Raumes entsprechen, wie bei der räumlichen Correlation (3.5 Bedingungen).

**) Hirst, Proc. London Math. Soc. vol. VI, S. 7 oder mein Aufsatz: Math. Ann. Bd. XII, S. 254 Einl.

***) Proc. London Math. Soc. vol. VII, S. 154, Nr. 43, oder im eben angef. Aufs. Nr. 103, 104 Signatur [0, 0, 13, 0]. — Mit der Raumcurve 6. Ordnung und 16. Ranges beschäftigt sich auch Herr Schur in dem in Nr. 14. erwähnten Aufsatze § 7., 8.; er erzeugt sie auf zwei Weisen: 1) ebenso, wie ich es in meinen „Flächen 3. Ordnung" Nr. 64. gethan habe, als Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen von 4 collinearen Ebenenbündeln, welche dann durch je vier unabhängige des durch sie constituirten Gebüsches von collinearen Ebenenbündeln ersetzt werden können, 2) als Ort der Schnittpunkte von in einen Punkt zusammenlaufenden entsprechenden Strahlen dreier collinearer räumlicher Systeme, die dann wieder durch beliebige 3 aus einem Netze von collinearen räumlichen Systemen ersetzt werden können; auch die in der vorletzten Note erwähnte Mannigfaltigkeit 24 dieser Curve weist er nach.

24. *Beziehen wir einen Raum* $\Sigma \equiv \Sigma_1$ *auf drei andere* Σ_2, Σ_3, Σ_4 *collinear*, so erhalten wir wieder zwei Verwandtschaften: a) wir lassen einem Punkte P von Σ die Ebene Π' in Σ' entsprechen, welche die 3 Punkte verbindet, die ihm als Punkt von Σ_1 in Σ_2, Σ_3, Σ_4 correspondiren; oder b) *wir lassen einer Ebene* Π *von* Σ *den Punkt* P' *in* Σ' *entsprechen, in dem sich die* 3 *Ebenen schneiden, die der* Π *als Ebene von* Σ_1 *in den drei andern Räumen homolog sind.* Wir wollen diese zu Nr. 13.—16. analoge Betrachtung nicht eingehend verfolgen und nur Folgendes hervorheben, uns allein an die Verwandtschaft b) haltend.

Dieselbe ist in beiderlei Sinne *cubisch:* wenn Π um eine Gerade oder einen Punkt sich dreht, so durchläuft P' eine cubische Raumcurve, bez. eine cubische Fläche, und deshalb umhüllt Π, wenn P' eine Gerade oder Ebene durchläuft, eine Developpable, bez. eine Fläche 3. Classe.

Der Ort der Punkte P', *die in ihre entsprechenden Ebenen fallen, ist eine Fläche* 4. *Ordnung, zugleich der Ort der Punkte, in welchen* 4 *homologe Ebenen der vier Räume* Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *zusammenlaufen.* Diese Fläche ist eine specielle Fläche 4. Ordnung und nur von der Mannigfaltigkeit 33. Auf ihr liegt auch die Curve 6. Ordnung, die nach der dritten Anm. auf S. 481 von je drei der collinearen Räume erzeugt wird, und durch eine solche Curve und 12 weitere Punkte ist sie eindeutig bestimmt.**) Die bei den drei Räumen Σ_2, Σ_3, Σ_4 sich ergebende Curve 6. Ordnung ist den sämmtlichen Flächen 3. Ordnung gemein, die den Punkten von Σ_1 correspondiren; denn es giebt für jeden Punkt dieser Curve eine Gerade in Σ, deren 3 entsprechende Gerade in ihn zusammenlaufen, also auch die Ebenen, welche irgend einer durch jene Gerade gehenden Ebene homolog sind.

Bezieht man alle 4 Räume auf einen fünften σ reciprok, wählt man 13 Punkte auf der Fläche 4. Ordnung, construirt die 13, welche den in jenen je zusammenlaufenden Ebenen in σ entsprechen, so sind durch diese 13 Paare als Paare conjugirter Punkte nicht ∞^2, sondern ∞^3 Correlationen bestimmt. Ferner:

Man beziehe zunächst 3 *Räume collinear auf einander; greife dann* 13 *beliebige Punkte heraus:* A, B, ..., N, die also nicht mit der durch die drei Räume erzeugten Raumcurve 6. Ordnung auf einer Fläche 4. Ordnung der obigen Art liegen; *durch jeden dieser Punkte*

---

*) Man sehe meinen Aufsatz Crelle's Journal Bd. 70, S. 212.

**) Schur, a. a. O. § 12—14.

gehen bekanntlich 3 *entsprechende Ebenen der drei Räume*: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\cdots$; ν_1, ν_2, ν_3.

Beziehen wir nun einen vierten Raum so collinear auf den ersten (und damit auch auf die beiden andern), *dass die den Ebenen* α_1, β_1, $\cdots$, ν_1 *entsprechenden Ebenen durch* A, B, $\cdots$, N *gehen, was auf* ∞^2 *Weisen möglich ist; so gehen jede* 4 *entsprechenden Ebenen der vier Räume durch denselben Punkt, und die in obiger Weise erzeugte Ebene-Punkt-Verwandtschaft b) hat die Beschaffenheit, dass jede zwei entsprechenden Elemente incidiren;* ist also ein räumliches cubisches Nullsystem, von dem das in Nr. 19. besprochene ein Specialfall ist.

25. Wir wenden uns zum Schlusse zurück zum *räumlichen Polarsystem* und wollen nochmals *die Bestimmung desselben oder der Fläche* 2. *Grades durch dreimal Pol und Polarebene* A *und* α, B *und* β, C *und* γ vornehmen, also einen schon mehrfach*) behandelten Gegenstand. Bei beliebiger Lage der 6 Stücke genügt bekanntlich nur die doppelte Ebene ABC und der doppelte Punkt $\alpha\beta\gamma$, welche *zusammen* eine Fläche 2. Ordnung und 2. Classe bilden. Als Bedingung für die Lage der 6 Stücke, damit eine *eigentliche* Fläche 2. Grades und, was dann ja nothwendig ist, gleich einfach unendlich viele genügen, ist an den erwähnten Stellen die perspective Lage des Dreiecks ABC zum Trieder $\alpha\beta\gamma$ (oder zu seinem Schnitte mit der Ebene ABC) ermittelt. Ich will diese Bedingung etwas modificiren. Betrachten wir zunächst die ∞^3 Flächen 2. Grades, für welche α, β Polarebenen von A, B sind. Sind A_1, B_1 die Schnitte von AB mit α, β; α_1, β_1 die Ebenen von $\alpha\beta$ nach A, B; so sind die Involutionen A, A_1; B, B_1 und α_1, α; β_1, β perspectiv und die Doppelpunkte F, F' der ersteren fallen in die Doppelebenen φ, φ' der andern, und *alle* ∞^3 *Flächen* 2. *Grades, für welche* α, β *Polarebenen von* A, B *sind, gehen durch* F, F' *und berühren dort* φ, φ'; so dass die eben genannte sechsfache Bedingung nicht allgemeiner ist als die von ihr einen Specialfall bildende, dass die Fläche in 2 gegebenen Punkten gegebene Ebenen tangirt. Dies einfache Resultat ist jedenfalls bekannt; ich erinnere mich jedoch nicht, es schon irgend wo gelesen zu haben.

Die Ebene, welche $\alpha\beta$ mit C verbindet, hat für alle diese ∞^3 Flächen zum Pole denjenigen Punkt C_1 auf AB, der ihrem Schnitte C' mit AB in der ersten der Involutionen zugeordnet ist; also *muss, wenn eine eigentliche Fläche bei* A, α; B, β; C, γ *sich ergeben soll,* γ *durch* C_1 *gehen***) oder dual C in einer gewissen Ebene γ_1 liegen. Construirt man bei zwei perspectiv gelegenen Dreiecken aus dem einen und dem Convergenzpunkt der Verbindungslinien entsprechender Ecken ein vollständiges Viereck, so erhält man leicht die Involution, welche den Uebergang zwischen der oben erwähnten und der jetzigen Form der Bedingung vermittelt.

---

*) G. Beyer, über das räumliche Polarsystem (Diss. Breslau 1868) Nr. 15.; Paul Serret, Géométrie de direction, Nr. 180, 181; Töplitz, Math. Ann. Bd. XI, S. 434, § 2.; Schröter, Flächen 2. Ordn. und Raumcurven 3. Ordn. § 21.

**) Womit dieser point déterminé wohl geometrisch noch etwas besser bestimmt ist, als bei Herrn Serret.

Geht nun γ *durch* C_1, so genügt es, statt γ irgend eine — nicht durch C_1 gehende — Gerade c in γ zu geben, welche zu C conjugirt sein soll. Die Flächen sind dann nur $2 \cdot 3 + 2 = 8$ linearen Bedingungen unterworfen; *wir erhalten einen Büschel* und überzeugen uns leicht, dass *alle durch den Kegelschnitt in der Ebene* ABC *gehen, für welchen* A *und die Spur von* α, B *und die Spur von* β *Pole und Polaren,* C *und die Spur von* c *conjugirt sind, und längs desselben den ihn aus dem Punkte* $\alpha\beta\gamma$ *projicirenden Kegel tangiren.**)

26. Diese Frage wird von Wichtigkeit, wenn *man die Construction des Polarengebüsches einer Fläche* $(n+1)^{ter}$ *Ordnung*, wie sie Herr H. Thieme**) lehrt, *für den Fall* $n=2$ *specialisirt.* Dieser interessanteste Specialfall enthält einige Abweichungen vom allgemeinen Fall, welche von Herrn Thieme nicht vollständig erörtert sind.

Einem Punkte A_1 werde eine Polarfläche α_1^2 zugeordnet (9 Bedingungen); die einem zweiten Punkt A_2 zugeordnete Polarfläche α_2^2 ist nicht mehr ganz frei; denn, nach der Eigenschaft der gemischten Polaren, muss die Polarebene α_{21} von A_2 nach α_1^2 Polarebene von A_1 nach α_2^2 sein; also bleiben 6 Bedingungen verfügbar. Die Polarfläche α_3^2 eines dritten Punktes A_3 muss so beschaffen sein, dass die Polarebenen α_{31}, α_{32} von A_3 nach α_1^2, α_2^2 Polarebenen von A_1, A_2 in Bezug auf sie sind, also bleiben noch 3 Bedingungen. Endlich für einen vierten Punkt A_4 ist die Polarfläche α_4^2 den Bedingungen unterworfen, dass die Polarebenen α_{41}, α_{42}, α_{43} von A_4 nach α_1^2, α_2^2, α_3^2 für sie Polarebenen von A_1, A_2, A_3 sind. *Es handelt sich nun um den Nachweis, dass* A_1 *und* α_{41}, A_2 *und* α_{42}, A_3 *und* α_{43} *die gegenseitige Lage haben, dass eine eigentliche Fläche 2. Grades genügt;* diesen Nachweis vermisse ich bei Herrn Thieme, der sich mit einer kurzen Andeutung begnügt; er ist nur bei $n=2$ nothwendig.

Wir können nach der vorhergehenden Construction die Ebenen α_{21}, α_{31}, α_{32} auch mit α_{12}, α_{13}, α_{23} bezeichnen.

Es sei A_x ein beliebiger Punkt von $A_1 A_2$; der Büschel der Polarebenen von $A_1, A_2, A_x, \cdots$ nach α_1^2 hat mit dem Büschel der Polarebenen von A_1 nach den Flächen des Büschels (α_1^2, α_2^2) zwei Ebenen gemein, nämlich die Polarebene α_{11} von A_1 nach α_1^2 und $\alpha_{21} \equiv \alpha_{12}$; also sind sie identisch und es giebt mithin in dem Büschel (α_1^2, α_2^2) eine Fläche α_x^2, für welche die Polarebene α_{x1} Polarebene α_{1x} von A_1 ist. Ordnen wir diese dem Punkte A_x zu, so befinden sich Punktreihe $A_1 A_2$ und Büschel (α_1^2, α_2^2) in projectiver Zuordnung; denn wenn A_y und α_y^2 noch ein anderer Punkt von $A_1 A_2$ und seine zugeordnete Fläche sind, also $\alpha_{1y} \equiv \alpha_{y1}$; dann ist:

---

*) Was wohl noch etwas bestimmter und auch einfacher erreicht ist, als was wir bei Herrn Töplitz a. a. O. S. 439 finden.

**) Zeitschr. f. Math. und Physik Bd. XXIV, S. 221, 276. — Verwandte Untersuchungen über die Bedingung, wenn ein Netz von Flächen 2. Ordnung das Polarennetz der Punkte einer Ebene für eine Fläche 3. Ordnung ist, sehe man in Frahms Aufs. Math. Ann. Bd. VII, S. 635 und den beiden Aufsätzen von Töplitz und Schur; vergl. auch Reye, Journ. f. Math., Bd. 82, S. 75.

$$A_1 A_2 A_x A_y \cdots \barwedge \alpha_{11} \alpha_{21} \alpha_{x1} \alpha_{y1} \cdots$$

oder, was dasselbe,

$$\barwedge \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{1x} \alpha_{1y} \cdots \barwedge \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_x^2 \alpha_y^2 \cdots.$$

Es sei α_{xy} die Polarebene von A_x nach α_y^2, α_{yx} die von A_y nach α_x^2, α_{xx} die von A_x nach α_x^2. In einem Ebenenbüschel befinden sich $\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{xx}, \alpha_{xy}$, ebenso in einem Büschel $\alpha_{1x}, \alpha_{2x}, \alpha_{xx}, \alpha_{yx}$; nun ist auch $\alpha_{1x} \equiv \alpha_{x1}$, also haben beide Büschel 2 Ebenen gemein und sind identisch; demnach befinden sich α_{xy}, α_{yx} beide in dem Büschel $(\alpha_{1x}, \alpha_{xx})$, ebenso auch in dem Büschel $(\alpha_{1y}, \alpha_{yy})$; diese Büschel sind nicht identisch. Folglich ist $\alpha_{xy} \equiv \alpha_{yx}$.

Die Ebenen $\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{xy}, \cdots$ bilden einen Büschel, eine davon geht durch den nicht auf $A_1 A_2$ gelegenen Punkt A_3; es sei dies α_{xs}, die Polarebene von A_x nach der Fläche α_s^2 des Büschels (α_1^2, α_2^2), deren zugehöriger Punkt A_s sei, oder, nach dem eben Bewiesenen, α_{sx}, die Polarebene von A_s nach α_x^2. Also sind A_3 und A_s conjugirt nach α_x^2, A_3 und A_x conjugirt nach α_s^2; oder die Polarebene α_{3s} geht durch A_x, die Polarebene α_{3x} durch A_s. Da aber die Punktreihe $A_1 A_2 A_x A_s$ mit der auf $A_1 A_2$ durch $\alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{3x} \alpha_{3s}$ eingeschnittenen projectiv ist, so folgt, weil α_{3x} durch A_s, α_{3s} durch A_x geht, Involution; also in der Involution auf $A_1 A_2$, in welcher A_1 und die Spur von α_{31}, A_2 und die Spur von α_{32} zwei Paare sind, ist einem Punkte A_x' stets derjenige A_x zugeordnet, für dessen Fläche α_x^2 die Polarebene α_{3x} durch A_x' geht. Soweit folge ich Herrn Thieme, durchweg für $n = 2$ specialisirend.

Lassen wir nun A_x' in den Schnittpunkt A_0' der Linie $A_1 A_2$ mit der Ebene fallen, welche $(\alpha_{31}, \alpha_{32})$ mit A_4 verbindet, so fällt A_x gerade in denjenigen Punkt A_0, durch welchen nach Nr. 25. die Polarebenen von A_4 in Bezug auf alle Flächen 2. Grades, für welche α_{31}, α_{32} Polarebenen von A_1, A_2 sind, gehen müssen, also auch die Polarebene α_{43}, da α_3^2 dieser Bedingung zu genügen hat.

Die dem Punkte A_0 von $A_1 A_2$ zugehörige Fläche des Büschels (α_1^2, α_2^2) sei α_0^2; weil A_0' dem A_0 in der obigen Involution zugeordnet ist, so geht α_{30} durch A_0', d. i. den Schnitt der Ebene $(A_4, \alpha_{31} \alpha_{32})$ mit $A_1 A_2$; aber weil α_0^2 zum Büschel (α_1^2, α_2^2) gehört, so geht α_{30}

durch $\alpha_{31}\alpha_{32}$, ist mithin mit $(A_4, \alpha_{31}\alpha_{32})$ identisch und geht durch A_4. Wenn aber die Polarebene α_{30} von A_3 nach $\alpha_0{}^2$ durch A_4 geht, so geht diejenige von A_4 nach $\alpha_0{}^2$ durch A_3. In dem obigen Satze den Index 3 mit 4 vertauschend, haben wir: In der Involution auf $A_1 A_2$, von welcher A_1 und die Spur von α_{41}, A_2 und die Spur von α_{42} zwei Paare sind, ist einem Punkte A_x' stets derjenige A_x zugeordnet, für dessen Fläche $\alpha_x{}^2$ die Polarebene α_{4x} durch A_x' geht; dem Punkte also, in dem $A_1 A_2$ von der Ebene $(A_3, \alpha_{41}\alpha_{42})$ geschnitten wird, d. i. von der Ebene α_{40}, die ja durch $\alpha_{41}\alpha_{42}$ und durch A_3 geht, ist A_0 zugeordnet. Durch diesen geht aber, wie oben bewiesen, α_{43}. Somit haben die 3 Punkte A_1, A_2, A_3 und die 3 Ebenen α_{41}, α_{42}, α_{43} die Lage, dass in der Involution auf $A_1 A_2$, von welcher A_1 und die Spur von α_{41}, A_2 und die Spur von α_{42} zwei Paare sind, auch die Spuren der Ebenen $(A_3, \alpha_{41}\alpha_{42})$ und α_{43} ein Paar bilden; also die Lage, welche nothwendig ist, damit α_{41}, α_{42}, α_{43} Polarebenen von A_1, A_2, A_3 für eine eigentliche Fläche 2. Grades und dann gleich für unendlich viele sind. Demnach ist noch eine Bedingung verfügbar, also im Ganzen

$$9 + 6 + 3 + 1 = 19.$$

In Herrn Thieme's allgemeiner Abzählungsformel, specialisirt für $n = 2$, tritt dieser letzte Summand $+ 1$ in der Form $-(-1)$ auf; was wohl geometrisch einer Aufhellung bedurfte.

Münster i/W., October 1881.

Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln.

Von

Rud. Sturm in Münster i./W.

Vor einiger Zeit fand ich in zwei Dissertationen, welche beide über Raumcurven 6. Ordnung handeln,*) das Geschlecht einer Curve, welche auf einem Kegel 2. Ordnung liegt, durch die Spitze desselben b-mal geht und jede Kante desselben noch a-mal trifft, auf eine ziemlich umständliche Weise abgeleitet gleich $(a-1)(a+b-1)$. Schwieriger ist ja der Fall, als der einer Curve auf einem Hyperboloid, welche die einen Geraden a-mal, die andern $(a+b)$-mal trifft, — diese hat nämlich dasselbe Geschlecht —, weil die Projection aus einem Punkte der tragenden Fläche, die im letzteren Falle sehr einfach zum Ziele führt, beim Kegel einen Punkt von hoher Singularität bewirkt, nämlich einen $(a+b)$-fachen, von dessen Tangenten a sich vereinigen. Ich habe nach einem andern Beweise gesucht, der auch für einen Kegel von beliebiger Ordnung und Classe richtig bleibt. Ich nehme also diesen von der Ordnung n und der Classe m, die Curve gehe wieder b-mal durch den Scheitel und treffe jede Kante ausserdem a-mal, ist also von der Ordnung $v = na + b$; sie habe keine singulären Punkte.

Auf jeder Kante haben wir eine Gruppe von a gleich definirten Punkten; demnach können wir die Coincidenzformeln von Herrn Schubert anwenden, und zwar benutzen wir die Formel (25) des § 2. des Aufsatzes Math. Ann. Bd. XII, S. 180. Wir setzen dort $k = 2$, $n = a$ und erhalten:

$$\varepsilon_2 = 2(a-1)\cdot\gamma_1 - a(a-1)\cdot g;$$

γ_1 ist die Zahl der Gruppen, bei denen ein Punkt in eine gegebene Ebene fällt, also die Ordnung $na+b$ der Curve, und g ist die Zahl der Gruppen, bei denen die tragende Kante eine gegebene Gerade trifft, also die Ordnung n des Kegels. Demnach berühren

$$2(a-1)(na+b) - a(a-1)n = (a-1)(na+2b)$$

Kanten des Kegels die Curve.

---

*) Von den Herren Baule und Ed. Weyr, Göttingen 1872, bez. Prag 1873; letztere auch Abh. der k. böhm. Ges. der Wiss. VI. Folge 6. Bd.

Die Tangenten der Curve, welche eine durch die Kegelspitze gehende Gerade treffen, setzen sich also aus diesen Kanten, aus den doppelt gerechneten b Tangenten im b-fachen Punkte und aus den Tangenten in den m Berührungsebenen des Kegels, welche durch die Gerade gehen, zusammen. Folglich ist der Rang der Curve

$$\varrho = (a-1)(na+2b)+2b+ma:$$

hieraus folgt für das Geschlecht π der Curve;

$$\begin{aligned} 2\pi = \varrho - 2(\nu-1) &= (a-1)(an+2b-2)+a\,\{m-2(n-1\} \\ &= (a-1)(an+2b-2)+2ap, \end{aligned}$$

wenn p das Geschlecht des ohne Rückkehrkanten vorausgesetzten Kegels ist; demnach

$$\pi = \frac{1}{2}\,a(a-1)n+(a-1)(b-1)+ap.$$

Dies führt, wenn $n=m=2$, $p=0$, zu: $\pi=(a-1)(a+b-1)$, wie oben angegeben, hingegen, wenn $a=1$, welchen Werth auch b und n haben, zu: $\pi=p$, wie bekannt.

Münster i/W., October 1881.

Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

M. Krause in Rostock.

(Fortsetzung, siehe p. 423 ff. dieses Annalenbandes.)

---

§ 2.

Bevor wir zu den früheren Betrachtungen zurückkehren, stellen wir folgende Aufgabe:

Es sollen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt werden, die zwischen den Systemen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ und $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ bestehen müssen, damit die Gleichungen stattfinden:

$$\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon = \varphi(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_\varepsilon, \qquad \varepsilon = 23, 4, 01.$$

Die beiden Systeme von Moduln sollen dabei den bekannten Convergenzbedingungen Genüge leisten.

Es ist nicht schwer, hinreichende Bedingungen zu finden. Die obigen Gleichungen bestehen, wenn die Grössen $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ sich vermöge der bei der linearen Transformation auftretenden Gleichungen aus den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ bestimmen lassen, vorausgesetzt, dass entweder ist:

1) $a_0 \equiv b_1 \equiv c_2 \equiv d_3 \equiv 1 \bmod. 2$, während die anderen Zahlen durch zwei theilbar sind, oder aber:

2) $a_0 \equiv b_1 \equiv c_2 \equiv d_3 \equiv a_2 \equiv b_3 \equiv 1 \bmod. 2$, während die anderen Zahlen durch zwei theilbar sind,

ferner vorausgesetzt, dass

$$a_0 d_0 + b_0 c_0 \equiv 0 \bmod. 8,$$
$$a_1 d_1 + b_1 c_1 \equiv 0 \bmod. 8,$$
$$c_0 b_1 \equiv 0 \bmod. 4$$

ist.

Es soll gezeigt werden, dass die hinreichenden Bedingungen auch die nothwendigen sind.

Wir führen zu dem Beweise die Rosenhain'schen Moduln ein, d. h. wir setzen:

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 \cdot \vartheta_5^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_4^2}, \quad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 \cdot \vartheta_2^5}$$

für die ursprünglichen Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$.

Für die Grössen $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ bezeichnen wir die entsprechenden Grössen mit K^2, Λ^2, M^2.

Dann folgt leicht, dass falls:

$$\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \varphi(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

ist, jedenfalls sein muss entweder:

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \Lambda^2, \quad \mu^2 = \mathsf{M}^2,$$

oder aber

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \frac{\mathsf{K}^2}{\mathsf{M}^2}, \quad \mu^2 = \frac{\mathsf{K}^2}{\Lambda^2}.$$

Wir wollen uns zunächst mit diesen beiden Fällen beschäftigen. Von dem zweiten können wir absehen, da derselbe durch eine einfache Transformation auf den ersten reducirt werden kann. Somit gelangen wir zu einem Problem, welches die naturgemässe Verallgemeinerung des von Dedekind in seiner bekannten Arbeit über die elliptischen Modulfunctionen gelösten Fundamentalproblemes ist (siehe Crelle 83, pag. 266 sequ.).

Dasselbe lautet:

Es sollen die nothwendigen Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass:

$$\varkappa^2 = \mathsf{K}^2, \quad \lambda^2 = \Lambda^2, \quad \mu^2 = \mathsf{M}^2$$

ist.

Es kann gesetzt werden:

$$\frac{\vartheta_1^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = \varkappa \lambda \mu x_1 x_2,$$

$$\frac{\vartheta_2^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = - \frac{\varkappa \lambda \mu}{\varkappa_1 \lambda_1 \mu_1} (1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$\frac{\vartheta_3^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = - \frac{\lambda \mu}{\varkappa_1 \lambda_\varkappa \mu_\varkappa} (1 - \varkappa^2 x_1)(1 - \varkappa^2 x_2),$$

$$\frac{\vartheta_4^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = \frac{\mu \varkappa}{\lambda_1 \mu_\lambda \lambda_\varkappa} (1 - \lambda^2 x_1)(1 - \lambda^2 x_2),$$

$$\frac{\vartheta_5^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = \frac{\varkappa \lambda}{\mu_1 \mu_\varkappa \mu_\lambda} (1 - \mu^2 x_1)(1 - \mu^2 x_2).$$

Die übrigen Ausdrücke sind aus der Rosenhain'schen Arbeit zu ersehen. Aus derselben folgt ferner, dass wird:

$$dv_1 = \frac{B - Cx_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_1 + \frac{B - Cx_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_2,$$

$$dv_2 = \frac{B' - C'x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_1 + \frac{B' - C'x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_2,$$

wobei ist:

$$2B = \frac{\vartheta_3'(v_2)_0}{\pi \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \quad 2B' = -\frac{\vartheta_3'(v_1)_0}{\pi \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5},$$

$$2C = \sqrt{\varkappa \lambda \mu}\, \frac{\vartheta_{24}'(v_2)_0}{\pi \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}, \quad 2C' = -\sqrt{\varkappa \lambda \mu}\, \frac{\vartheta_{24}'(v_1)_0}{\pi \vartheta_{34} \cdot \vartheta_4 \cdot \vartheta_5}.$$

Wir führen zwei neue veränderliche Grössen u_1, u_2 durch die Gleichungen ein:

$$u_1 = av_1 + bv_2, \quad u_2 = a_1 v_1 + b_1 v_2,$$

wobei a, b, a_1, b_1 constant sein sollen.

Dann wird:

$$du_1 = \frac{(aB + bB') - (aC + bC')x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_1 + \frac{(aB + bB') - (aC + bC')x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_2,$$

$$du_2 = \frac{(a_1 B + b_1 B') - (a_1 C + b_1 C')x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_1 + \frac{(a_1 B + b_1 B') - (a_1 C + b_1 C')x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}}\, dx_2.$$

Die Constanten $a b a_1 b_1$ können und sollen so bestimmt werden, dass wird:

$$aB + bB_1 = \varepsilon_1, \quad a_1 B + b_1 B' = 0,$$

$$aC + bC' = 0, \quad a_1 C + b_1 C' = -\varepsilon_2.$$

Dann wird:

$$du_1 = \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}},$$

$$du_2 = \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}}.$$

Es mögen nun drei neue Grössen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' eingeführt werden, die den Convergenzbedingungen Genüge leisten und für welche die entsprechenden Grössen K^2, Λ^2, M^2 resp. gleich $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 werden.

Ferner wollen wir vier Grössen a', b', a_1', b_1' uns ebenso aus τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' entstanden denken, wie a, b, a_1, b_1 aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} und zwei neue veränderliche v_1', v_2' definiren durch:

$$av_1 + bv_2 = a'v_1' + b'v_2',$$

$$a_1 v_1 + b_1 v_2 = a_1' v_1' + b_1' v_2'.$$

Endlich mögen mit y_1, y_2 diejenigen Grössen bezeichnet werden, welche von v_1', v_2', τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' so abhängen, wie x_1, x_2 von v_1, v_2, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}. Dann folgen die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(y_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{(y_2 \varkappa \lambda \mu)}},$$
$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa \lambda \mu)}} = \frac{y_1 dy_1}{\sqrt{(y_1 \varkappa \lambda \mu)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{(y_2 \varkappa \lambda \mu)}}.$$

Es ist nicht schwer, algebraische Integrale dieser Differentialgleichungen zu finden. Die Form derselben ergiebt sich ähnlich wie bei den trigonometrischen und elliptischen Functionen aus dem Additionstheorem der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Da ferner den Werthen $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ die Werthe $v_1' = 0$, $v_2' = 0$ entsprechen, so folgt jedenfalls, dass die ungeraden Thetafunctionen

$$\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

dann und nur dann verschwinden, wenn die entsprechenden Functionen

$$\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

verschwinden. Wir gehen auf diese beiden Punkte bei dieser Gelegenheit nicht näher ein.

Die ungeraden Thetafunctionen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ verschwinden aber für alle Werthe $v_1 = r + s\tau_{11} + t\tau_{12}$, $v_2 = r' + s\tau_{21} + t\tau_{22}$ und nur für diese, wenn r, s, t, r' willkürliche ganze Zahlen bedeuten. Setzen wir also $v_1' = 1$, $v_2' = 0$, so wird:

$$a v_1 + b v_2 = a',$$
$$a_1 v_1 + b_1 v_2 = a_1',$$

also:

$$v_1 = \frac{a' b_1 - a_1' b}{a b_1 - a_1 b} = d_3 - a_3 \tau_{11} - b_3 \tau_{12}.$$
$$v_2 = \frac{a_1' a - a' a_1}{a b_1 - a_1 b} = c_3 - a_3 \tau_{21} - b_3 \tau_{22}.$$

Setzen wir: $v_1' = 0$, $v_2' = 1$, so wird:

$$a v_1 + b v_2 = b',$$
$$a_1 v_1 + b_1 v_2 = b_1',$$

also:

$$v_1 = \frac{b' b_1 - b_1' b}{a b_1 - a_1 b} = d_2 - a_2 \tau_{11} - b_2 \tau_{12},$$
$$v_2 = \frac{b_1' a - b' a_1}{a b_1 - a_1 b} = c_2 - a_2 \tau_{21} - b_2 \tau_{22}.$$

Setzen wir:

$$v_1' = \tau_{11}', \quad v_2' = \tau_{12}',$$

so wird:

$$v_1 = (d_3 - a_3 \tau_{11} - b_3 \tau_{12})\, \tau_{11}' + (d_2 - a_2 \tau_{11} - b_2 \tau_{12})\, \tau_{12}'$$
$$= -d_0 + a_0 \tau_{11} + b_0 \tau_{12}.$$
$$v_2 = (c_3 - a_3 \tau_{21} - b_3 \tau_{22})\, \tau_{11}' + (c_2 - a_2 \tau_{21} - b_2 \tau_{22})\, \tau_{12}'$$
$$= -c_0 + a_0 \tau_{21} + b_0 \tau_{22}.$$

Hieraus folgt:

$$\tau_{11}' = \frac{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(-d_0+a_0\tau_{11}+b_0\tau_{12})-(-c_0+a_0\tau_{21}+b_0\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})}{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}+b_3\tau_{12})-(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})},$$

$$\tau_{12}' = \frac{(-c_0+a_0\tau_{21}+b_0\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(-d_0+a_0\tau_{11}+b_0\tau_{12})(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})}{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})}.$$

Setzen wir:

$$v_1' = \tau_{21}', \quad v_2' = \tau_{22}',$$

so wird:

$$\begin{aligned} v_1 &= (d_3 - a_3\tau_{11} - b_3\tau_{12})\,\tau_{21}' + (d_2 - a_2\tau_{11} - b_2\tau_{12})\,\tau_{22}' \\ &= -d_1 + a_1\tau_{11} + b_1\tau_{12}, \\ v_2 &= (c_3 - a_3\tau_{21} - b_3\tau_{22})\,\tau_{21}' + (c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22})\,\tau_{22}' \\ &= -c_1 + a_1\tau_{21} + b_1\tau_{22}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\tau_{21}' = \frac{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(-d_1+a_1\tau_{11}+b_1\tau_{12})-(-c_1+a_1\tau_{21}+b_1\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})}{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})},$$

$$\tau_{22}' = \frac{(-c_1+a_1\tau_{21}+b_1\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})(-d_1+a_1\tau_{11}+b_1\tau_{12})}{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})}.$$

Endlich wird:

$$v_1' = \frac{(c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22})\,v_1 - (d_2 - a_2\tau_{11} - b_2\tau_{12})\,v_2}{N},$$

$$v_2' = \frac{(-c_3 + a_3\tau_{21} + b_3\tau_{22})\,v_1 - (-d_3 + a_3\tau_{11} + b_3\tau_{12})\,v_2}{N},$$

wo N der gemeinsame Nenner der Grössen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' ist. Da aber $\tau_{12}' = \tau_{21}'$ ist, so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_0 &= 0, \\ a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 - a_3c_0 &= 0, \\ a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 - a_3d_0 &= n, \\ b_0c_3 + b_1c_2 - b_2c_1 - b_3c_0 &= n, \\ b_0d_3 + b_1d_2 - b_2d_1 - b_3d_0 &= 0, \\ c_0d_3 + c_1d_2 - c_2d_1 - c_3d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Eine leichte Betrachtung zeigt, dass $n = 1$ sein muss. Es besteht dieselbe in einer Transformation der Ausdrücke, die für v_1' und v_2' angegeben worden sind.

Es sind dieses die Relationen der linearen Transformation. Damit also $\varkappa^2 = \mathrm{K}^2$, $\lambda^2 = \Lambda^2$, $\mu^2 = \mathrm{M}^2$ wird, müssen die Grössen $\varphi(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$, aus den Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$, durch lineare Transformation entstanden sein.

Damit ist die Hauptschwierigkeit überwunden. Alles andere lehrt die Theorie der linearen Transformation. Sie zeigt, dass die oben angegebenen hinreichenden Bedingungen zu gleicher Zeit die nothwendigen sind.

Nachdem dieses Problem gelöst worden ist, kehren wir zu den ursprünglichen Betrachtungen zurück.

In einer früheren Arbeit über die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung im XVII. Bande dieser Annalen ist gezeigt worden, dass die Functionen:

$$\frac{\vartheta(nv_1, nv_2)_\varepsilon}{\vartheta(nv_1, nv_2)_5}$$

sich als rationale Functionen der Grössen $\frac{\vartheta(v_1, v_2)_\varepsilon}{\vartheta(v_1, v_2)_5}$ darstellen lassen, deren Coefficienten rationale Functionen von $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sind. Hieraus folgt umgekehrt, dass die Grössen:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m + m_1\tau_{11} + m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m' + m_1\tau_{21} + m_2\tau_{22}}{n}\right)_5},$$

vom Vorzeichen abgesehen, Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficienten rationale Functionen von $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sind. Mithin wird in Folge der vorhin gefundenen Resultate eine jede rationale Function dieser Wurzeln eine *eindeutige* Function der Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sein, die sich für die nun schon mehrfach angegebenen linearen Transformationen nicht ändert. Zu diesen Functionen gehören aber, wie im ersten Paragraphen bewiesen worden ist, die Potenzsummen

$$\sum_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha.$$

Mithin ergiebt sich der

Lehrsatz:

Alle Potenzsummen $\sum_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha$ *sind eindeutige Functionen der Grössen* $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$.

§ 3.

Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen folgt unmittelbar, dass die Grössen $\varphi(\tau_{11}^{i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ Wurzeln algebraischer Gleichungen vom Grade $1 + n + n^2 + n^3$ sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen der Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sind.

Mit Hülfe weniger Schlüsse ergiebt sich hieraus der

Lehrsatz. Die Grössen $\varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ *sind Wurzeln algebraischer Gleichungen vom Grade* $1 + n + n^2 + n^3$, *deren Coefficienten sich rational aus den Grössen* $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ *zusammensetzen lassen.*

Die Bestimmung der Coefficienten kann unter anderem derart erfolgen, dass für die Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ und die speciellen Wurzeln $\varphi(\tau_{11}^{n}, \tau_{12}^{n}, \tau_{22}^{n})_\varepsilon$ ihre Entwickelungen nach ganzen Potenzen von $e^{\frac{\pi i\tau_{11}}{4}}, e^{\frac{\pi i\tau_{12}}{4}}, e^{-\frac{\pi i\tau_{12}}{4}}, e^{\frac{\pi i\tau_{22}}{4}}$ eingeführt werden.

§ 4.

Nachdem die Existenz von Modulargleichungen nachgewiesen, ist es leicht, ihre Haupteigenschaften zu entwickeln.

Dieselben lauten:

I. Die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn an Stelle von ϑ_5, ϑ_4, ϑ_{01}, ϑ_{23} resp. gesetzt wird ϑ_5, $i^a\vartheta_4$, $i^b\vartheta_{01}$, $i^c\vartheta_{23}$, während zu gleicher Zeit an Stelle von $0_5, 0_4, 0_{01}, 0_{23}$ resp. gesetzt wird 0_5, $i^{na}0_4$, $i^{nb}0_{01}$, $i^{nc}0_{23}$.

Die Grössen a, b, c sind ganze Zahlen, die der einzigen Bedingung genüge leisten, dass

$$a+b+c$$

eine gerade Zahl ist.

II. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn man die Grössen $\vartheta_5, \vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}$ und $0_5, 0_4, 0_{01}, 0_{23}$ gleichzeitig derselben Permutation unterwirft.

III. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn gesetzt wird an Stelle von:

1) $\vartheta_5, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_{23}; \quad 0_5, \quad 0_4, \quad 0_{01}, \quad 0_{23}$. resp.

2) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{12}, \quad \vartheta_{34}, \quad \vartheta_0; \quad 0_5, \quad 0_{12}, \quad 0_{34}, \quad 0_0$.

3) $\vartheta_5, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{12}, \quad \vartheta_{03}; \quad 0_5, \quad 0_4, \quad 0_{12}, \quad 0_{03}$.

4) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{34}, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2; \quad 0_5, \quad 0_{34}, \quad 0_{01}, \quad 0_2$.

5) $\vartheta_5, \quad \vartheta_0, \quad \vartheta_{23}, \quad \vartheta_{14}; \quad 0_5, \quad 0_0, \quad 0_{23}, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}0_{14}$.

6) $\vartheta_5, \quad \vartheta_{03}, \quad \vartheta_2, \quad i\vartheta_{14}; \quad 0_5, \quad 0_{03}, \quad 0_2, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}i^n0_{14}$.

7) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_{03}, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_{23}; \quad 0_{12}, \quad 0_{03}, \quad j^n0_{01}, \quad j^n0_{23}$.

8) $\vartheta_{34}, \quad \vartheta_0, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{03}; \quad 0_{34}, \quad 0_0, \quad j^n0_4, \quad j^n0_{03}$.

9) $\vartheta_{34}, \quad \vartheta_2, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{23}; \quad 0_{34}, \quad 0_2, \quad j^n0_4, \quad j^n0_{23}$.

10) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_0, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_2; \quad 0_{12}, \quad 0_0, \quad j^n0_{01}, \quad j^n0_2$.

11) $\vartheta_{01}, \quad \vartheta_{14}, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{01}; \quad 0_{01}, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}0_{14}, \quad j^n0_4, \quad j^n0_{01}$.

12) $\vartheta_{12}, \quad \vartheta_{34}, \quad j\vartheta_{23}, \quad j\vartheta_{14}; \quad 0_{12}, \quad 0_{34}, \quad j^n0_{23}, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}j^n0_{14}$.

13) $\vartheta_2, \quad i\vartheta_{14}, \quad j\vartheta_4, \quad j\vartheta_{12}; \quad 0_2, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}i^n0_{14}, \quad j^n0_4, \quad j^n0_{12}$.

14) $\vartheta_{03}, \quad i\vartheta_{14}, \quad j\vartheta_{01}, \quad j\vartheta_{34}; \quad 0_{03}, \quad \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}i^n0_{14}, \quad j^n0_{01}, \quad j^n0_{34}$.

15) $\vartheta_0, \quad i\vartheta_{23}, \quad j\vartheta_{03}, \quad j\vartheta_2; \quad 0_0, \quad i^n0_{23}, \quad j^n0_{03}, \quad j^n0_2$.

Hierbei ist $j = e^{\frac{\pi i}{4}}$, ferner

$$\varepsilon = 1$$

für die Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} n & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & n & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon = -1$$

für die Repräsentanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} n & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

IV. Die Gleichungen bleiben richtig, wenn man die Grössen ϑ_5, ϑ_4, ϑ_{01}, ϑ_{23} und die Grössen 0_5, 0_4, 0_{01}, 0_{23} mit einander vertauscht.

V. Eine jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten sich rational aus den Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ zusammensetzen und die eine repräsentirende Function $\varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ als Lösung hat, hat sämmtliche repräsentirende Functionen zu Wurzeln.

Die Beweise der fünf Sätze beruhen auf der linearen Transformation. Der Verfasser glaubt von ihnen absehen zu dürfen.

In Satz III. sind die ursprünglichen Quadrupel so gewählt, wie es Borchardt im 83ten Bande des Crelle'schen Journals gethan hat. Ueberdies mag auf die Arbeit von Wiltheiss verwiesen werden: Bestimmung Abel'scher Functionen mit zwei Argumenten, bei denen complexe Multiplicationen stattfinden, Halle 1881.

Rostock, im October und December 1881.

Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten.

Von

H. Krey in Freiburg i/Br.

Die Zahl der Lösungen eines Systems von $2r$ Gleichungen

$$f_1(x^{(1)};\, x^{(2)};\, \cdots;\, x^{(r)}) = 0, \;\cdots f_{2r}(x^{(1)};\, x^{(2)};\, \cdots;\, x^{(r)}) = 0,$$

deren linke Seiten ganze, r-fach ternäre Functionen der Coordinaten $x_1^{(h)}$, $x_2^{(h)}$, $x_3^{(h)}$ von r Punkten in der Ebene sind, und in den $x^{(h)}$ bezw. die Grade $n_1^{(h)}, \cdots n_{2r}^{(h)}$ erreichen, ist bekanntlich im Allgemeinen durch den Ausdruck

$$\sum_1^{2r} n_i^{(1)} n_k^{(1)} n_h^{(2)} n_l^{(2)} \cdots n_p^{(r)} n_q^{(r)}$$

gegeben, in welchem die Indices $i, k, h, l, \cdots$ auf alle mögliche Arten verschiedene Zahlwerthe der Reihe $1, 2, \cdots, 2r$ annehmen. Derselbe gilt auch dann noch, wenn beliebig viele der Gleichungen nicht mehr alle r Coordinatenreihen enthalten, die Zahlen n also zum Theil Null sind.

In Folge besonderer Beschaffenheit der Gleichungen kann, ohne dass zwischen ihnen eine Abhängigkeit bestände, *die Zahl der Lösungen unendlich gross* werden. Es tritt dieses z. B. schon dann ein, wenn mehr als zwei der Functionen f für $x^{(i)} = x^{(k)}$ *identisch* verschwinden; und *allgemeiner könnte man die Annahme machen*, *dass f_h $\gamma_h^{(i,k)}$-fach verschwindet für $x^{(i)} = x^{(k)}$, $\vartheta_h^{(i)}$-fach für $x^{(i)} = a$, wo a einen festen Punkt* (*Ausnahmepunkt*) *der Ebene bedeutet.* Wird in diesem Falle die beschränkende Bedingung hinzugefügt, dass $x^{(1)}, \cdots, x^{(r)}$ Gruppen von *freien* (d. h. nicht in Ausnahmepunkte fallenden), *getrennt liegenden* Punkten sein sollen, so bleibt die Zahl der Lösungen eine endliche, und es bietet sich die Aufgabe, die nicht nur von den n, sondern auch von den Zahlen γ, ϑ abhängige Reduction zu finden, welche der obige Ausdruck erfährt.

Zu den zahlreichen Specialfällen, welche diese Aufgabe in sich schliesst, gehört auch der aus nachstehender Annahme entspringende, der im Folgenden untersucht werden soll: *Alle γ und ϑ haben den Werth* 1, *während die Gradzahlen n sämmtlich von Null verschieden sind.* Einen solchen Fall hat man vor sich, wenn z. B. jede Function f aus Gliedern folgender Art sich zusammensetzt:

$$\varphi \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \cdots & \psi_r(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \cdots & \psi_r(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \psi_1(x^{(r)}) & \psi_2(x^{(r)}) & \cdots & \psi_r(x^{(r)}) \end{vmatrix}$$

wo φ eine beliebige Function bedeutet, und die Curven $\psi_1(x)=0, \cdots, \psi_r(x)=0$, welche von derselben Ordnung sind, einfach durch die Ausnahmepunkte gehen. Dieses Beispiel führt zugleich *zu einer weiteren Annahme, die hier gemacht werden soll*, und die nicht nothwendig aus der ersten, hinsichtlich der Zahlen γ und ϑ gemachten folgt, dass nämlich bei unendlicher Annäherung *eines* der Punkte $x^{(2)}, \cdots x^{(r)}$ an einen Ausnahmepunkt, und beliebiger Lage der übrigen, die zugehörigen Curven $f_h(x^{(1)}) = 0$, *ohne auszuarten*, die beiden benachbarten Punkte verbinden. — Es lässt sich zeigen, dass *unter diesen Voraussetzungen* die Bestimmung der Anzahl brauchbarer Lösungen *für jedes* r ausgeführt werden kann. Für $r = 2$ und $r = 3$ sind die fraglichen Ausdrücke im Folgenden entwickelt.

Zur Bestimmung von *Punktegruppen im Raume* sind $3r$ Bedingungen

$$f_1(x^{(1)}; \cdots; x^{(r)}) = 0, \cdots, f_{3r}(x^{(1)}; \cdots; x^{(r)}) = 0$$

erforderlich: auch hier erfährt die im Allgemeinen gültige Zahl der Lösungen

$$\sum_1^{3r} n_i^{(1)} n_k^{(1)} n_h^{(1)} n_l^{(2)} n_p^{(2)} n_q^{(2)} \cdots n_s^{(r)} n_t^{(r)} n_u^{(r)}$$

eine Reduction, wenn die Gleichungen die oben erwähnten Besonderheiten haben. —

Abkürzende Bezeichnungen.

Unter

$$(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{2r})$$

soll im Folgenden die *Zahl der Punktgruppen* in der Ebene verstanden werden, welche den $2r$ Gleichungen $\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_{2r} = 0$ genügen. *g_i ist die Bedingung für $x^{(i)}$, auf einer gegebenen Geraden zu liegen;* g_{ik} die Bedingung für $x^{(i)}$ und $x^{(k)}$, in einer und derselben gegebenen Geraden zu liegen; g_i^2 sagt aus, dass der Punkt $x^{(i)}$ gegeben ist; *p_{ik}, dass die Verbindungsgerade von $x^{(i)}$ mit $x^{(k)}$ durch einen gegebenen Punkt geht;* p_{ik}^2 ist gleichbedeutend mit g_{ik}. Hiernach ist z. B. (für $r = 3$) die Bedeutung von

$$(g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4);\quad (g_{12} g_3 f_1 f_2 f_3),\quad (g_1{}^2 p_{12} p_{23} f_1 f_2)$$

leicht ersichtlich.

Für *Punktegruppen im Raume* ist g_{ik}^{ν} die Bedingung, dass die Punkte $x^{(i)}$, $x^{(k)}$ *ihren Verbindungsstrahl* ν *gegebene Gerade treffen lassen;* e_i, $e_i{}^2$, $e_i{}^3$ sagt aus, *dass* $x^{(i)}$ *in einer gegebenen Ebene, bezw. Geraden liege, oder endlich gegeben sei;* also bedeutet z. B. (für $r=2$)

$$(e_1 e_2 g_{12} f_1 f_2 f_3)$$

die Zahl der Punktepaare, welche $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ in je eine von zwei gegebenen Ebenen werfen, die Verbindungsgerade eine einfache Bedingung erfüllen lassen, und den Gleichungen $f_1=f_2=f_3=0$ genügen.

Die Ordnung einer Curve, welche in Folge gegebener Bedingungen ein Punkt $x^{(i)}$ beschreibt, soll mit $(x^{(i)})$bezeichnet werden, ihre Vielfachheit in einem Ausnahmepunkte mit v_i; nur wenn sich der Punkt auf einer Geraden bewegt, ist die Bedeutung von $(x^{(i)})$ und v_i eine andere (vgl. den Hülfssatz).

Auf Gradzahlen bezügliche *Summenausdrücke* werden meistens nur durch ihr allgemeines Glied, mit Weglassung des Summenzeichens und der Indices, angedeutet, z. B. wird geschrieben

$$\mu\mu\nu \quad \text{für} \quad \mu_1\mu_2\nu_3 + \mu_1\mu_3\nu_2 + \mu_2\mu_3\nu_1,$$

$$\mu\mu\nu\varrho \quad \text{für} \quad \sum_1^4 \mu_i\mu_k\nu_h\varrho_l,$$

$$\mu\mu\nu\nu\varrho + \mu\mu \quad \text{für} \quad \sum_1^5 \mu_i\mu_k\nu_h\mu_l\varrho_m + \sum_1^5 \mu_i\mu_k;$$

die obere Grenze der Indices, welche nur *verschiedene* Werthe annehmen, ist jedesmal aus dem Zusammenhange ersichtlich. —

Die *Zahl der Ausnahmepunkte* wird im Folgenden immer mit α bezeichnet.

§ 1.

Beweis eines Hülfssatzes.

Sind die Punkte zweier Curven, eines x-Ortes und eines y-Ortes, eindeutig auf einander bezogen, und coincidirt an c_{12} *freien Stellen* x *mit dem entsprechenden* y, *bestimmt ferner die Gleichung*

$$\varphi(x;\, y) = 0,$$

deren linke Seite für $x = y$ *einfach verschwindet, für einen beliebig gegebenen Punkt* y ξ *bewegliche Punkte* x *des ersten Ortes, für einen beliebigen Punkt* x η *bewegliche Punkte* y *des zweiten Ortes, dann giebt es*

$$(1) \qquad \xi + \eta - c_{12}$$

Paare von zusammengehörigen Punkten x, y, *welche der Gleichung* $\varphi = 0$ *genügen.*

Der Beweis hierfür ergiebt sich sehr einfach durch Herstellung einer Correspondenz, die vermöge der Gleichung $\varphi(x'; y) = 0$ jedem Punkte x des ersten Ortes ξ Punkte x', jedem x' η Punkte x zuordnet. — Auf demselben Wege und mit Benutzung des schon erhaltenen Resultates zeigt man:

Sind die Punkte einer x-Curve, einer y-Curve und einer z-Curve eindeutig auf einander bezogen, bezeichnet c_{12}, c_{13}, c_{23}, *wie oft an freier Stelle x mit y, x mit z, y mit z coincidirt, und bestimmt die Gleichung*

$$\varphi(x; y; z) = 0,$$

deren linke Seite für $x = y$, $x = z$, $y = z$ *einfach verschwindet, für ein beliebiges Paar* x, y ζ *bewegliche Punkte des z-Ortes, u. s. w., so ist*

$$\xi + \eta + \zeta - c_{12} - c_{13} - c_{23}$$

die Zahl der Tripel x, y, z, *welche der Gleichung* $\varphi = 0$ *genügen.*

Die Ausdehnung dieser Sätze auf Gruppen von beliebig vielen Curven giebt, wenn man noch die Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \cdots$ durch die Gradzahlen von φ, und durch die Ordnungen und Vielfachheiten der verschiedenen Oerter ausdrückt, Folgendes:

Unter den ∞^1 *Gruppen von Punkten* $x^{(1)}, \cdots, x^{(r)}$, *welche durch* $2r - 1$ (*bezw.* $3r - 1$) *Bedingungen bestimmt sind, giebt es*

$$\text{(I)} \qquad n^{(1)}(x^{(1)}) + \cdots + n^{(r)}(x^{(r)}) - \sum v - \sum c_{ik},$$

welche einer Gleichung

$$\varphi(x^{(1)}; x^{(2)}; \cdots; x^{(r)}) = 0$$

genügen, deren linke Seite für $x^{(i)} = x^{(k)}$ *und für* $x^{(i)} = a$ *einfach verschwindet, und in den* $x^{(i)}$ *den Grad* $n^{(i)}$ *erreicht.* Σv *bedeutet die Summe der Vielfachheiten der r Oerter in den Ausnahmepunkten;* c_{ik} *die Zahl der an freien Stellen stattfindenden Coincidenzen von* $x^{(i)}$ *mit* $x^{(k)}$.

Verlangt eine der Bedingungen, dass sich $x^{(i)}$ auf einer gegebenen Geraden g_i (bezw. e_i^2) bewege, so findet kein eindeutiges Entsprechen der Punkte mehr statt, vielmehr gehören zu einem beliebig auf g_i gewählten Punkte im Allgemeinen *mehrere* Gruppen von $r - 1$ Punkten. *Der Satz bleibt aber auch in diesem Falle richtig, wenn man nur unter* $(x^{(i)})$ *die Zahl der Gruppen versteht, welche ihren Punkt* $x^{(i)}$ *in einer beliebigen Geraden* (*bezw. Ebene*) *haben, und als den Antheil, welchen der* $x^{(i)}$*-Ort an* Σv *hat, nicht* δ, *sondern* $\delta(x^{(i)})$ *betrachtet*, wo δ die Zahl der auf der Geraden liegenden Ausnahmepunkte bedeutet.

Bei beliebiger Annahme der Zahlen γ, ϑ für die Gleichung $\varphi = 0$ würde an die Stelle von (1) der folgende Ausdruck treten:

$$\xi + \eta - \gamma_{12} c_{12} - \varkappa \lambda \cdot \alpha;$$

hier giebt $\varkappa$ an, wie viele Coincidenzen von x mit y in jedem Ausnahmepunkte liegen; $\vartheta + \lambda$ ist die Vielfachheit der *Grenzcurve* $\varphi(x) = 0$ in einem Punkte a, welche einem zu a benachbarten y entspricht. *Wollte man also den Satz* (I) *verallgemeinern, so müsste man Zahlen einführen, welche nicht von den* γ *und* ϑ *alleine abhängen, sondern vielmehr von der Art, wie sich der* $\vartheta^{(i)}$*-fache Punkt der Curve* $\varphi(x^{(i)}) = 0$ *in* a *und der* γ_{ik}*-fache Punkt in* $x^{(k)}$ *bei Annäherung von* $x^{(k)}$ *an* a *zu einer neuen Singularität vereinigen.* Dieser Umstand würde die Untersuchung des allgemeinen Falles erschweren. Ist aber $\lambda = 0$, $\gamma = \vartheta = 1$, so fallen jene Reductionen fort; man kann dann immer den Satz (I) anwenden, mit alleiniger Ausnahme der Fälle, in welchen mehr als zwei Punkte gleichzeitig coincidiren.

§ 2.

Zurückführung der fraglichen Ausdrücke auf einfachere.

Der erste Schritt zur Ermittelung der Zahl

$$(f_1 f_2 \cdots f_{2r})$$

besteht in der Weglassung einer der Bedingungen, etwa f_{2r}, und der Einführung der durch die übrigen Gleichungen definirten Curvengruppe. *Auf die letztere wendet man den Satz* (I) *an*, in welchem

$$(x^{(i)}) = (g_i f_1 \cdots f_{2r-1})$$

zu setzen ist; v_i ist nichts Anderes als die *Verminderung*, welche der Werth dieses Ausdrucks erfährt, wenn man die Gerade g_i, anstatt derselben eine beliebige Lage zu ertheilen, *durch einen Ausnahmepunkt legt.* Da sich ferner die c_{ik} mit Hülfe des verallgemeinerten Chasles'schen Correspondenzprincips*) wie folgt bestimmen:

$$c_{ik} = (x^{(i)}) + (x^{(k)}) - (p_{ik} f_1 \cdots f_{2r-1}),$$

erhält man

$$(1) \qquad (f_1 f_2 \cdots f_{2r}) = \sum_{i=1}^{i=r} (n_{2r}^{(i)} - r + 1)(g_i f_1 \cdots f_{2r-1}) + \sum_{i<k} (p_{ik} f_1 \cdots f_{2r-1}) - \alpha \sum v_i;$$

und dem analog *für Punktegruppen im Raume:*

$$(2) \qquad (f_1 f_2 \cdots f_{3r}) = \sum_{i=1}^{i=r} (n_{3r}^{(i)} - r + 1)(e_i f_1 \cdots f_{3r-1}) + \sum_{i<k} (g_{ik} f_1 \cdots f_{3r-1}) - \alpha \sum v_i.$$

---

*) Vgl. Schubert: Kalkül d. abz. Geometrie pag. 44.

Um die rechts stehenden noch unbekannten Ausdrücke weiter zu reduciren, verfährt man genau wie es in der Theorie der Charakteristiken geschieht; man lässt wieder eine Bedingung f aus, und sucht für die Schaar von Punktegruppen, welche durch die übrigen Bedingungen gegeben ist, die Zahlen (x), v, c zu bestimmen.

Ist überhaupt die Schaar der Gruppen definirt durch die Bedingungen

$$g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1}, \tag{3}$$

so findet man

$$(x^{(s)}) = (g_1 \cdots g_h g_s g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1});$$

man wird also insbesondere auf Ausdrücke geführt, welche sich *auf nur $r - 1$ unbekannte Punkte* beziehen, wenn s unter den Indices der g in (3) vorkommt; in diesem Falle ist zu beachten, dass der *gegebene* Punkt $x^{(s)}$ für die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_{\lambda-1} = 0$ als *neuer Ausnahmepunkt* auftritt. Ist die Bedingung g_s nicht in (3) enthalten, so beschreibt $x^{(s)}$ eine Curve, deren Vielfachheit in den verschiedenen Ausnahmepunkten durch specielle Lagen der Geraden g_s ermittelt werden kann.

Die c bestimmen sich wieder (wenn nicht auf einfachere Art) durch das Correspondenzprincip, z. B.

$$c_{ik} = (x^{(i)}) + (x^{(k)});$$

$$c_{\mu\nu} = (x^{(\mu)}) + (x^{(\nu)}) - (g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots g_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1});$$

u. s. f.

Durch Anwendung des Satzes (I) *auf die Gruppenschaar* (3) *ergiebt sich also die Zurückführung von*

$$(g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_\lambda)$$

auf andere Zahlen, die sich entweder auf nur $r - 1$ unbekannte Punkte beziehen, oder einmal weniger f, einmal mehr die Bedingung g oder p enthalten.

Da auch die auf Raumgruppen bezüglichen Zahlen eine ähnliche Reduction zulassen, so kommt man in allen Fällen schliesslich auf *Systeme von elementaren Bedingungen, welche nur die Lage der Punkte in gegebenen Geraden oder Ebenen, und die Lage ihrer Verbindungsgeraden betreffen.* Für die wirkliche Ausrechnung ist jedoch, wie die folgenden Beispiele zeigen, die Wegschaffung sämmtlicher Bedingungen f nicht erforderlich.

§ 3.

Punktepaare in der Ebene.

Die dreifachen Bedingungen

$$1)\ g_1 g_2 f_1;\quad 2)\ g_{12} f_1;\quad 3)\ g_1 p_{12} f_1;\quad 4)\ g_1 f_1 f_2;\quad 5)\ p_{12} f_1 f_2$$

bestimmen Systeme von Punktepaaren, für welche die Zahlen

$$(x),\ (y),\ c,\ \sum v$$

zu berechnen sind. Die Gradzahlen der vier Gleichungen $f_h(x; y) = 0$ sollen mit μ_h, ν_h bezeichnet werden; δ_i ist die Zahl der auf einer Geraden g_i (oder g_{ik}) liegenden Ausnahmepunkte; $\delta_{ik} = 1$ oder 0, je nachdem der Schnittpunkt von g_i, g_k Ausnahmepunkt ist oder nicht.

Für die Schaar 1) hat man die Zahlen

$$(x) = \nu_1 - \delta_2;\quad (y) = \mu_1 - \delta_1;\quad c = 1 - \delta_{12};$$
$$\sum v = \delta_1 (\nu_1 - \delta_2) + \delta_2 (\mu_1 - \delta_1);$$

also folgt

$$(1)\quad (g_1 g_2 f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - 1 - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2) - \delta_2 (\mu_1 + \mu_2) + 2\delta_1 \delta_2 + \delta_{12}.$$

Ebenso leicht findet sich

$$(2)\quad (g_{12} f_1 f_2) = (\mu_1 - 1)(\nu_2 - 1) + (\mu_2 - 1)(\nu_1 - 1) - \delta_1 (\mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 - 2\delta_1 - 4).$$

In dem durch (3) definirten System ist

$$(x) = \nu_1 - 1;\quad (y) = \mu_1 + \nu_1 - 1 - \delta_1;\quad c = (y);$$
$$\sum v_1 = \delta_1 (\nu_1 - 1);\qquad \sum v_2 = \alpha - \delta_1;$$

letzteres folgt aus dem Umstande, *dass die y-Curve durch alle Ausnahmepunkte, nur nicht durch die etwa auf g_1 gelegenen, einfach hindurchgeht.* Hiernach wird

$$(3)\quad (g_1 p_{12} f_1 f_2) = (\mu_1 - 1)(\nu_2 - 1) + (\mu_2 - 1)(\nu_1 - 1) + \nu_1 \nu_2 - 1 - \alpha - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2 - 3).$$

In dem System (4) ist

$$(x) = \nu_1 \nu_2 - \alpha - 1;\quad (y) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - 1 - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2);$$

die Zahl (y) geht hervor aus (1) für $\delta_2 = \delta_{12} = 0$; derselbe Ausdruck lehrt, dass

$$v_2 = \mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1 \quad \text{oder} \quad = \mu_1 + \mu_1 - 2\delta_1 - 1,$$

je nachdem der Ausnahmepunkt beliebig oder auf g_1 gelegen ist, dass also

$$\sum v_2 = \alpha (\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1) - \delta_1.$$

Ferner ist

$$c = (x) + (y) - (g_1 p_{12} f_1 f_2) = \mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 - 3 - 3\delta_1;$$

so folgt somit:

$$(4)\quad (g_1 f_1 f_2 f_3) = \mu\nu\nu - \nu - (\alpha + 1)\mu + 3 - \delta_1 (\nu\nu - 3\alpha - 5)$$

Endlich erhält man für das durch (5) bestimmte Curvenpaar (x) aus (3) für $\delta_1 = 0$; (y) aus (x) durch Vertauschung von μ mit ν; ν_1 ist der Coefficient von $-\delta_1$ in (3), also

$$\sum v = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 - 6).$$

$$c = (x) + (y) - (g_{12} f_1 f_2)_{\delta_1=0}$$
$$= \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 - 2\alpha.$$

Man findet:

$$(5) \quad (p_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu\mu\nu + \mu\nu\nu - \mu\mu - \nu\nu - \mu\nu - (\alpha - 1)(\mu + \nu) + 8\alpha.$$

Hiermit sind alle zur Berechnung von $(f_1 f_2 f_3 f_4)$ *dienenden Zahlen bekannt; die Gleichung* (1) § 2. *giebt:*

$$(6) \quad (f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\nu\nu - (\alpha + 1)(\mu\mu + \nu\nu) - \mu\nu + 3(\mu + \nu)$$
$$+ 6\alpha^2 + 18\alpha - 6,$$

Insbesondere also erhält man für $\mu_h = \nu_h = n$

$$(7) \quad (f_1 f_2 f_3 f_4) = 6n^2 - 12(\alpha + 2)n^2 + 24n + 6\alpha^2 + 18\alpha - 6.$$

Es soll hiervon eine Anwendung gemacht werden auf die Aufgabe, *die Zahl der Punktepaare* x, y *zu bestimmen, für welche alle zweireihigen Determinanten der Matrix*

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \end{matrix} \right\|$$

verschwinden; $\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_5 = 0$ *sind die Gleichungen von* 5 *linear unabhängigen Curven* n^{ter} *Ordnung durch*

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - 4$$

feste Punkte.

Zur Abkürzung werde

$$\varphi_i(x)\,\varphi_k(y) - \varphi_k(x)\,\varphi_i(y) = \Delta_{ik}$$

gesetzt. Das System

$$(8) \quad \Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = \Delta_{45} = 0$$

hat nach (7)

$$(9) \quad \frac{3}{2} n^4 - 9n^3 + \frac{45}{2} n^2 - 21n + 18$$

Lösungen; unter ihnen sind unbrauchbare enthalten, welche den folgenden Systemen genügen

$$(10) \quad \varphi_2(x) = \varphi_2(y) = \Delta_{34} = \Delta_{45} = 0,$$
$$(11) \quad \varphi_3(x) = \varphi_3(y) = \Delta_{12} = \Delta_{45} = 0,$$
$$(12) \quad \varphi_4(x) = \varphi_4(y) = \Delta_{12} = \Delta_{23} = 0,$$
$$(13) \quad \varphi_2(x) = \varphi_4(x) = \varphi_2(y) = \varphi_4(y) = 0.$$

Jedes der drei ersten hat

$$(14) \qquad 2(n^2 - \alpha - 1)^2 - (n-1)(n-2)$$

Lösungen, das System (13) dagegen

$$(15) \qquad (n^2 - \alpha)(n^2 - \alpha - 1),$$

die aber bereits in (10) und (12) vorkommen; es bleiben also

$$(9) - 3 \cdot (14) + (15)$$

brauchbare Lösungen des Systems (8), und da wegen der Symmetrie aller Gleichungen in x, y von dieser Zahl die Hälfte zu nehmen ist, hat man den Satz:

Zu $\frac{n(n+3)}{2} - 4$ *willkürlich in der Ebene gegebenen Punkten kann man auf*

$$\frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n^2-9)$$

Arten ein Punktepaar so bestimmen, dass durch die $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ *Punkte noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven* n^{ter} *Ordnung geht.*

Es möge hier noch, ohne Beweis, eine *Verallgemeinerung der Gleichung* (6) angegeben werden, welche für den Fall gilt, dass f_h γ_h-fach verschwindet für $x = y$, ϑ_h-fach für $x = a$, ϑ'_h-fach für $y = a$, und dass sich, bei dem Zusammenfallen von y mit a, der ϑ_h-fache und der γ_h-fache Punkt zu einem $(\vartheta_h + \gamma_h)$-fachen Punkte vereinigen:

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 f_3 f_4) = \sum_1^4 \mu_i \mu_k \nu_h \nu_l - \sum \gamma_i \gamma_k (\mu_h + \nu_h)(\mu_l + \nu_l) \\ - \alpha \sum (\vartheta_i \vartheta_k \nu_h \nu_l + \vartheta'_i \vartheta'_k \mu_h \mu_l) + 3 \sum \gamma_i \gamma_k \gamma_h (\mu_l + \nu_l) \\ + \alpha^2 \sum \vartheta_i \vartheta_k \vartheta'_h \vartheta'_l + \alpha \sum \gamma_i \gamma_k (\vartheta_h \vartheta_l + \vartheta'_h \vartheta'_l) - 6 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 .\end{aligned}$$

Für $\gamma_h = \vartheta_h = \vartheta'_h = 1$ erhält man hieraus einen Ausdruck, der in dem numerischen Coefficienten von α von dem in (6) gefundenen abweicht.

§ 4.

Punktetripel in der Ebene.

Die Grade der sechs Gleichungen $f_h(x; y; z) = 0$ sollen mit μ_h, ν_h, ϱ_h bezeichnet werden; δ_i und δ_{ik} haben wieder die im vorigen Paragraphen angegebene Bedeutung.

Zur Berechnung von $(f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6)$ genügt es, die folgenden 11 Zahlen zu kennen:

1) $(g_1 g_2 g_3 f_1 f_2 f_3)$,
2) $(g_{12} g_3 f_1 f_2 f_3)$,
3) $g_{123} f_1 f_2 f_3)$,
4) $g_1 g_2 f_1 f_2 f_3 f_4)$,
5) $g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4)$,
6) $(g_{12} p_{23} f_1 f_2 f_3)$,
7) $(g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4)$,
8) $(g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5)$,
9) $(g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3)$,
10) $(p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4)$,
11) $(p_{12} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5)$.

Jede derselben kann mit Hülfe der vorangehenden und der in (1)—(6) § 3. *gefundenen bestimmt werden*, wie im Folgenden ausgeführt werden soll; die erforderlichen Zwischenrechnungen werden dabei nur angedeutet.

1) Schaar $g_1 g_2 g_3 f_1 f_2$.

Nach (1) § 3. ist

$$(z) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - 1 - \delta_1(\nu_1 + \nu_2) - \delta_2(\mu_1 + \mu_2) + 2\delta_1\delta_2 + \delta_{12},$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für (y) und (x). — Coincidenzen von y mit z können nur in dem Schnittpunkte von g_2, g_3 liegen, und auch nur dann, wenn dieser ein freier Punkt ist. Ersetzt man δ_2 durch $\delta_2 + 1$, erhält man statt (z) einen um $\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1$ kleineren Ausdruck, also ist

$$c_{23} = (1 - \delta_{23})(\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1), \text{ u. s. w.}$$

Da ferner

$$\sum v = \delta_1(x) + \delta_2(y) + \delta_3(z),$$

findet man

$$(1)\quad (g_1 g_2 g_3 f_1 f_2 f_3) = \mu\nu\varrho - \mu - \nu - \varrho - \delta_1\nu\varrho - \delta_2\mu\varrho - \delta_3\mu\nu$$
$$+ (2\delta_2\delta_3 + \delta_{23})\mu + (2\delta_1\delta_3 + \delta_{13})\nu + (2\delta_1\delta_2 + \delta_{12})\varrho$$
$$+ 3(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - 3(\delta_1\delta_{23} + \delta_2\delta_{13} + \delta_3\delta_{12}) - 6\delta_1\delta_2\delta_3.$$

Treffen sich aber g_1, g_2, g_3, *und zwar in einem Ausnahmepunkte* A, so ist der vorige Ausdruck zu ersetzen durch

$$(1\text{a})\quad \mu\nu\varrho - \delta_1\nu\varrho - \delta_2\mu\varrho - \delta_3\mu\nu + 2\delta_2\delta_3\mu + 2\delta_1\delta_3\nu + 2\delta_1\delta_2\varrho$$
$$- 6\delta_1\delta_2\delta_3 - 1.$$

Man hat nämlich hier einen der wenigen Fälle vor sich, in welchen *mehr als zwei Punkte an derselben Stelle coincidiren.* Von den

$$(\mu_1 - \delta_1)(\nu_2 - \delta_2) + (\mu_2 - \delta_1)(\nu_1 - \delta_2)$$

zu z gehörenden Paaren x, y geht eines verloren, wenn z in A fällt, und zwar dadurch, dass sowohl x als y sich dem Punkte A nähert; die *zu einem solchen Paare* gehörende z'-Curve $f_3(x; y; z') = 0$, welche eine Correspondenz zwischen Punkten z, z' auf g_3 vermittelt, *artet nothwendig in eine Curve mit Doppelpunkt in* A *aus*; daher liegt *eine* unbrauchbare Coincidenz von z' mit z in A.

2) Schaar $g_{12}g_3f_1f_2$.

Hier ist (z) ohne Weiteres aus (2) § 3. zu entnehmen; aus (1) § 3. findet man

$$(x)=\nu_1\varrho_2+\nu_2\varrho_1-1-(1+\delta_1)(\varrho_1+\varrho_2)-\delta_3(\nu_1+\nu_2)+2\delta_3(1+\delta_1)+\delta_{13};$$

hieraus (y) durch Vertauschung von μ und ν. Rückt z in den Schnittpunkt von g_{12}, g_3, ergiebt sich eine Verminderung des Ausdrucks (z) um

$$\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2-6-4\delta_1;$$

also ist

$$c_{31}+c_{32}=(1-\delta_{13})(\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2-6-4\delta_1).$$

Da ferner

$$c_{12}=(x)+(y); \quad \sum v=\delta_1(x)+\delta_1(y)+\delta_3(z),$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned}(2)\quad (g_{12}g_3f_1f_2f_3)=\mu\nu\varrho&-(1+\delta_1)(\mu\varrho+\nu\varrho)-\delta_3\mu\nu\\&+(\delta_{13}+2\delta_3+2\delta_1\delta_3-1)(\mu+\nu)\\&+2(1+\delta_1)^2(\varrho-3\delta_3)+(1-\delta_{13})(8+6\delta_1).\end{aligned}$$

Hieran schliesst sich die folgende, durch Induction leicht zu beweisende und auf Gruppen von beliebig vielen Punkten auszudehnende Gleichung

$$\begin{aligned}(3)\quad (g_{123}f_1f_2f_3)&=\sum_1^3(\mu_i-2-\delta_1)(\nu_k-2-\delta_1)(\varrho_h-2-\delta_1)\\&=\mu\nu\varrho-(2+\delta_1)(\mu\nu+\mu\varrho+\nu\varrho)+2(2+\delta_1)^2(\mu+\nu+\varrho)\\&\quad-6(2+\delta_1)^3.\end{aligned}$$

4) Schaar $g_1g_2f_1f_2f_3$.

Der Werth von (z) geht hervor aus (1) für $\delta_3=\delta_{13}=\delta_{23}=0$, d. h. wenn der Geraden g_3 eine beliebige Lage ertheilt wird; $(x), (y)$ aus (4) § 3. Die Vielfachheit der z-Curve in einem *beliebigen* Ausnahmepunkte ist

$$v_3=\mu\nu-2\delta_2\mu-2\delta_1\nu-3+3\delta_{12}+6\delta_1\delta_2,$$

wie aus (1) für $\delta_3=1$, $\delta_{13}=\delta_{23}=0$ folgt; *in jedem der* $\delta_1-\delta_{12}$, bez. $\delta_2-\delta_{12}$ *Punkte dagegen*

$$v_3-\nu+3\delta_2, \quad \text{bezw.} \quad v_3-\mu+3\delta_1;$$

endlich *in dem etwaigen Ausnahmepunkte* δ_{12} [vgl. (1a)]

$$v_3-\mu-\nu+3\delta_1+3\delta_2+1.$$

Hieraus

$$\sum v_3=\alpha v_3-\delta_1\nu-\delta_2\mu+6\delta_1\delta_2+\delta_{12}.$$

Der z-Ort trifft g_1 an

$$(z)-\delta_1(v_3-\nu+3\delta_2)+\delta_{12}(\mu-3\delta_1-1)$$

freien Stellen; zieht man hiervon ab die Zahl $(g_{13}g_2f_1f_2f_3)$, die aus (2) durch Vertauschung von ν mit ϱ, δ_3 mit δ_2, δ_{13} mit δ_{12} hervorgeht, bleibt

$$c_{13} = \mu\nu + \nu\varrho - 2\delta_2\mu - 2\delta_2\varrho - (3+3\delta_1)\nu - 8 + 9\delta_2 + 9\delta_1\delta_2 + 7\delta_{12}.$$

Hieraus c_{23} durch Vertauschung von μ und ν, δ_1 mit δ_2. Da endlich

$$c_{12} = (1 - \delta_{12})(\varrho\varrho - 3\alpha - 8),$$

so folgt

$$\begin{aligned}(4)\quad (g_1g_2f_1f_2f_3f_4) = {} & \mu\nu\varrho\varrho - \delta_1\nu\nu\varrho - \delta_2\mu\mu\varrho - (\alpha+2)\mu\nu - \mu\varrho - \nu\varrho \\ & + (2\delta_1\delta_2 + \delta_{12} - 1)\varrho\varrho + (3 + 3\delta_2\alpha + 8\delta_2)\mu \\ & + (3+3\delta_1\alpha+8\delta_1)\nu + 3(\delta_1+\delta_2)\varrho + (6 - 12\delta_1\delta_2 - 6\delta_{12})\alpha \\ & + 24 - 12\delta_1 - 12\delta_2 - 40\delta_1\delta_2 - 23\delta_{12}.\end{aligned}$$

5) Schaar $g_{12}f_1f_2f_3$.

Aus (4) § 3. erhält man (y), wenn ν durch ϱ, α durch $\alpha + 1$, δ_1 durch $\delta_1 + 1$ ersetzt wird; die Gleichung (2) giebt Ordnung und Vielfachheit des z-Ortes, und zwar beträgt letztere in einem *beliebigen* Ausnahmepunkte

$$v_3 = \mu\nu - (2 + 2\delta_1)(\mu + \nu) + 6(1 + \delta_1)^2,$$

in einem *auf* g_{12} *liegenden* jedoch nur

$$v_3 - \mu - \nu + 8 + 6\delta_1.$$

Die Zahlen c_{31}, c_{32} braucht man nicht einzeln zu kennen, sondern ***nur ihre Summe***; diese ist

$$c_{31} + c_{32} = (z) - \delta_1(v_3 - \mu - \nu + 8 + 6\delta_1) - (g_{123}f_1f_2f_3).$$

Demnach wird

$$\begin{aligned}(5)\quad (g_{12}f_1f_2f_3f_4) = {} & \mu\nu\varrho\varrho - (1+\delta_1)(\mu\varrho\varrho + \nu\varrho\varrho) - (\alpha+2)\mu\nu - \mu\varrho - \nu\varrho \\ & - (2 + 4\delta_1 + 2\delta_1^2)\varrho\varrho + (11 + 3\alpha + 8\delta_1 + 3\delta_1\alpha)(\mu + \nu) \\ & + (8 + 6\delta_1)\varrho - 78 - 12(1+\delta_1)^2\alpha - 110\delta_1 - 40\delta_1^2.\end{aligned}$$

6) Schaar $g_{12}p_{23}f_1f_2$.

Aus (3) und (2) § 3. findet man

$$(x) = \nu_1\varrho_2 + \nu_2\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2 - \nu_1 - \nu_2 - (2+\delta_1)(\varrho_1 + \varrho_2) - \alpha + 3 + 3\delta_1;$$
$$(y) = \mu_1\varrho_2 + \mu_2\varrho_1 - \mu_1 - \mu_2 - (1+\delta_1)(\varrho_1 + \varrho_2) + 2 + 2\delta_1.$$

Da auf einer durch p_{23} gehenden Geraden (y) Paare y, z liegen, *der feste Punkt selbst aber*

$$(\mu_1 - 1)(\nu_2 - 1) + (\mu_2 - 1)(\nu_1 - 1) - \delta_1(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 - 2\delta_1 - 4)$$

mal als Punkt z auftritt, ist auch (z) bekannt; da ferner

$$\sum v_3 = (\alpha - \delta_1)(\mu_1 + \mu_2 - 2 - 2\delta_1), \quad \sum c_{ik} = (x) + (y) + (z),$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned}(6)\ (g_{12}p_{23}f_1f_2f_2) = {} & \mu\nu\varrho + \mu\mu\varrho - \mu\nu - (2+\delta_1)\mu\varrho - (1+\delta_1)(\nu\varrho + \varrho\varrho) \\ & + (3 - \alpha + 3\delta_1)\mu + 2(1+\delta_1)\nu + (4 + 6\delta_1 + 2\delta_1^2)\varrho \\ & + 3(1+\delta_1)\alpha - 9 - 18\delta_1 - 9\delta_1^2.\end{aligned}$$

7) Schaar $g_1p_{23}f_1f_2f_3$.

Hier ergiebt sich (x) aus (5) § 3., wenn μ, ν, α durch $\nu, \varrho, \alpha+1$ ersetzt werden. Die Vielfachheit des z-Ortes in p_{23} beträgt

$$\mu\nu\nu - \nu - (\alpha+2)\mu + 3 - \delta_1(\nu\nu - 3\alpha - 8) \text{ [vgl. (4) § 3.]},$$

während auf einer beliebigen Geraden durch p_{23}

$$(g_1g_{23}f_1f_2f_3)_{\delta_2=0}$$

Paare y, z liegen; (z) *ist also gleich der Summe dieser beiden Zahlen*, deren zweite aus (2) durch Vertauschung von μ mit ϱ, δ_3 mit δ_1, δ_1 mit δ_2 hervorgeht. Der so entstehende Ausdruck giebt ausserdem als *Summe der Vielfachheiten* des y- und des z-Ortes:

$$v_2 + v_3 = \mu\nu + \mu\varrho - 2\delta_1(\nu + \varrho) - 6\mu - 6 + 18\delta_1$$

für einen beliebigen Ausnahmepunkt, dagegen

$$v_2 + v_3 - \delta_1(\nu + \varrho - 14)$$

für einen auf g_1 liegenden; es ist mithin auch

$$\sum(v_2 + v_3) = \alpha(v_2 + v_3) - \delta_1(\nu + \varrho - 14)$$

bekannt. — Die y- und die z-Curve treffen g_1 zusammen an

$$(y) + (z) - \delta_1[v_2 + v_3 - \delta_1(\nu + \varrho - 14)]$$

freien Stellen; zieht man hiervon ab die nach (6) bekannten Zahlen

$$(g_{12}p_{23}f_1f_2f_3), \quad (g_{13}p_{23}f_1f_2f_3),$$

so bleibt $c_{21} + c_{31}$, während

$$c_{23} = (y) + (z) - (g_1g_{23}f_1f_2f_3)_{\delta_2=0}$$

ebenfalls bekannt ist. Man erhält

$$\begin{aligned}(7)\ (g_1p_{23}f_1f_2f_3f_4) = {} & \mu\nu\varrho\varrho + \mu\nu\nu\varrho - \mu\nu\nu - \mu\varrho\varrho - \mu\nu\varrho - \delta_1(\nu\nu\varrho + \nu\varrho\varrho) \\ & - \alpha(\mu\nu + \mu\varrho) + (2\delta_1 - 1)(\nu\nu + \varrho\varrho) + (2\delta_1 - 2)\nu\varrho \\ & + (11 + 2\delta_1 + 3\delta_1\alpha)(\nu + \varrho) + 8(\alpha+1)\mu \\ & + (12 - 32\delta_1)\alpha - 54 - 64\delta_1.\end{aligned}$$

8) Schaar $(g_1f_1f_2f_3f_4)$.

Zu einem auf g_1 gegebenen Punkte x gehören *so viele Paare y, z, wie der Ausdruck* (6) § 3. *angiebt*, in welchem μ durch ϱ,

α durch $\alpha + 1$ zu ersetzen ist. Die Gleichung (4) liefert ausser dem Werthe von (y) noch

$$\sum v_2 = \alpha v_2 - \delta_1(\varrho\varrho - 6\alpha - 23),$$

wo

$$v_2 = \mu\varrho\varrho - 2\delta_1\varrho\varrho - (3\alpha + 8)\mu - 3\varrho + 12 + 12\delta_1\alpha + 40\delta_1.$$

Man hat weiter

$$c_{23} = (y) + (z) - (g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4),$$

was nach (7) bekannt ist;

$$c_{12} = (y) - \delta_1(v_2 - \varrho\varrho + 6\alpha + 23) - (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4),$$

was sich ebenfalls nach (5) berechnen lässt. Aus (y), Σv_2, c_{12} entsteht (z), Σv_3, c_{13} durch Vertauschung von ν mit ϱ. — Es wird hiernach

$$\begin{aligned}(8) \quad (g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) = {} & \mu\nu\nu\varrho\varrho - \delta_1 \cdot \nu\nu\varrho\varrho - (\alpha + \delta_1)(\mu\nu\nu + \mu\varrho\varrho) \\ & - \mu\nu\varrho - \nu\nu\varrho - \nu\varrho\varrho + 3\mu\nu + 3\mu\varrho \\ & + (3 + 8\delta_1 + 3\delta_1\alpha)(\nu\nu + \varrho\varrho) + 3\delta_1 \cdot \nu\varrho \\ & + (6\alpha^2 + 30\alpha + 18)\mu + (6\alpha + 24 - 12\delta_1)(\nu + \varrho) \\ & - 306 - \delta_1(30\alpha^2 + 190\alpha + 230).\end{aligned}$$

Diese Gleichung lehrt sowohl die *Ordnung* des durch

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_5 = 0$$

bestimmten (x)-Ortes, als die *Vielfachheit* desselben in den Ausnahmepunkten kennen.

9) Schaar $g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2$.

Einem gegebenen (x) entsprechen

$$(x) = (\nu_1 - 1)(\varrho_2 - 1) + (\nu_2 - 1)(\varrho_1 - 1)$$

Paare y, z. Die Vielfachheit des z-Ortes in p_{13} beträgt

$$(g_3^2 g_1 p_{12} f_1 f_2),$$

was nach (3) § 3. berechnet werden kann; demnach ist

$$(z) = (x) + (g_3^2 g_1 p_{12} f_1 f_2); \quad (y) = (x) + (g_2^2 g_1 p_{13} f_1 f_2).$$

Liegt x in dem Schnittpunkte von g_1 mit der Verbindungsgeraden $p_{12} p_{13}$, so giebt es auf dieser Geraden nur noch

$$(\nu_1 - 2)(\varrho_2 - 2) + (\nu_2 - 2)(\varrho_1 - 2)$$

Paare von getrennt liegenden Punkten y, z; und da *jedes verloren gehende Paar eine Coincidenz von y mit z anzeigt*, hat man

$$c_{23} = \nu_1 + \nu_2 + \varrho_1 + \varrho_2 - 6.$$

Endlich ist

$$c_{13} = (z), \quad c_{23} = (y),$$

$$\sum v_3 = (\alpha - \delta_1)(\nu_1 + \nu_2 - 2); \quad \sum v_2 = (\alpha - \delta_1)(\varrho_1 + \varrho_2 - 2).$$

Hieraus:

$$(9) \quad (g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3) = \mu\nu\varrho + \nu\nu\varrho + \nu\varrho\varrho - \nu\nu - \varrho\varrho - 2\nu\varrho - \mu\nu - \mu\varrho + 2\mu - \delta_1\nu\varrho + (2 + 3\delta_1 - \alpha)(\nu + \varrho) + 6\alpha + 2 - 12\delta_1.$$

10) Schaar $p_{12}p_{13}f_1f_2f_3$.

Nach (9) sind bekannt (x) und

$$v_1 = \nu\varrho - 3\nu - 3\varrho + 12.$$

Die Vielfachheit der y-Curve in p_{12} ist

$$(g_2{}^2 p_{13} f_1 f_2 f_3) \quad [\text{vgl. (5) § 3.}];$$

man hat also

$$(y) = (g_2{}^2 p_{13} f_1 f_2 f_3) + (g_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3)_{\delta_1 = 0}, \quad [\text{vgl. (6)}],$$

$$(z) = (g_3{}^2 p_{12} f_1 f_2 f_3) + (g_{13} p_{12} f_1 f_2 f_3)_{\delta_1 = 0}.$$

Der Coefficient von $-\delta_1$ in (6) giebt, nach Vertauschung von μ mit ν,

$$v_1 + v_2 = \nu\varrho + \mu\varrho + \varrho\varrho - 2\mu - 3\nu - 8\varrho - 3\alpha + 27,$$

und da v_1 bereits gefunden ist:

$$v_2 = \mu\varrho + \varrho\varrho - 5\varrho - 2\mu - 3\alpha + 15,$$

$$v_3 = \mu\nu + \nu\nu - 5\nu - 2\mu - 3\alpha + 15.$$

Die c_{12}, c_{13} bestimmen sich mit Hülfe von (6). — *Coincidenzen von y mit z können nur auf der Geraden $p_{12}p_{13}$ liegen*, welche letztere von dem x-Orte, ausser in den beiden festen Punkten, noch in einer bekannten Anzahl von Stellen getroffen wird. Zu diesen gehören jedenfalls die in den

$$(g_{123} f_1 f_2 f_3) = \sum_1^3 (\mu_i - 2)(\nu_k - 2)(\varrho_h - 2)$$

Tripeln *getrennt* liegender Punkte enthaltenen x; *ausserdem aber*

$$c_{23} = \mu\nu + \mu\varrho - 6\mu - 3\nu - 3\varrho + 28$$

andere, deren zugehörige y, z zusammenfallen. — Das Ergebniss ist:

$$(10) \quad (p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\nu\varrho + \mu\nu\nu\varrho + \mu\nu\varrho\varrho + \nu\nu\varrho\varrho - \mu\nu\nu - \mu\varrho\varrho - 2\mu\nu\varrho - \mu\mu\nu - \mu\mu\varrho + 2\mu\mu + 2\mu\nu + 2\mu - \nu - \varrho + 2\mu\varrho - 2\nu\varrho\varrho - 2\nu\nu\varrho + 4\nu\varrho + 3\nu\nu + 3\varrho\varrho - \alpha\mu\nu - \alpha\mu\varrho - \alpha\nu\nu - \alpha\nu\varrho - \alpha\varrho\varrho + 6\alpha\mu + 11\alpha(\nu + \varrho) + 6\alpha^2 - 70\alpha - 48.$$

11) Schaar $p_{12}f_1f_2f_3f_4$.

Die Mittel zur Berechnung der charakteristischen Zahlen für dieses Curventripel sind im Vorhergehenden enthalten.

Nach Vertauschung von μ mit ϱ, δ_1 mit δ_3 in (7) erhält man (z) und v_3. Die Zahlen (x), (y) bestimmt man wieder am bequemsten *mit Hülfe des Princips der speciellen Lage*, z. B.

$$(x) = (g_1{}^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4)_{\delta_1=0}.$$

Ferner hat man:

$$c_{12} = (g_1{}^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_2{}^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4)_{\delta_1=0};$$
$$c_{13} = (x) + (z) - (p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4);$$

endlich geben die in (5) mit $-\delta_1$ und $-\delta_1{}^2$ multiplicirten Glieder den Werth von $v_1 + v_2$. — Man findet

$$\begin{aligned}(11)\quad (p_{12}f_1f_2f_3f_4f_5) = {} & \mu\nu\nu\varrho\varrho + \mu\mu\nu\varrho\varrho - \nu\nu\varrho\varrho - \mu\mu\varrho\varrho - \mu\nu\varrho\varrho \\ & - \alpha(\mu\nu\nu + \mu\varrho\varrho + \nu\varrho\varrho + \mu\mu\nu) - 2\mu\mu\nu - 2\mu\nu\nu - 2\mu\nu\varrho \\ & - \mu\mu\varrho - \nu\nu\varrho + 11(\mu\varrho + \nu\varrho) + 14\mu\nu + 3\alpha\mu\nu + 8(\alpha+1)\varrho\varrho \\ & + (3\alpha+11)(\mu\mu+\nu\nu) + (12\alpha-54)\varrho + (6\alpha^2+18\alpha-60)(\mu+\nu) \\ & - 80\alpha^2 - 462\alpha + 174.\end{aligned}$$

Die Zahlen (8) *und* (11) *dienen zur Bestimmung des gesuchten Ausdrucks; mit Hülfe von* (1) § 2. *wird*

$$\begin{aligned}(12)\quad (f_1f_2f_3f_4f_5f_6) = {} & \mu\mu\nu\nu\varrho\varrho - \mu\mu\nu\varrho - \mu\nu\nu\varrho - \mu\nu\varrho\varrho \\ & + 3(\mu\mu\nu + \mu\nu\nu + \mu\mu\varrho + \mu\varrho\varrho + \nu\nu\varrho + \nu\varrho\varrho) \\ & - (\alpha+2)(\mu\mu\nu\nu + \mu\mu\varrho\varrho + \nu\nu\varrho\varrho) \\ & + (6\alpha+24)(\mu\nu+\mu\varrho+\nu\varrho) + (6\alpha^2+30\alpha+18)(\mu\mu+\nu\nu+\varrho\varrho) \\ & - (60\alpha+306)(\mu+\nu+\varrho) - 90\alpha^3 - 810\alpha^2 - 1716\alpha + 2358.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also *bei Gleichheit aller Gradzahlen und Symmetrie der Gleichungen* in x, y, z die Zahl der Lösungen

$$\begin{aligned}(13)\quad & 15n^6 - (360 + 90\alpha)n^4 + 360n^3 + (90\alpha^2 + 630\alpha + 990)n^2 \\ & - (360\alpha + 1836)n - 15\alpha^3 - 135\alpha^2 - 286\alpha + 393.\end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass die Gleichung (12) [und dasselbe gilt von (6) § 3.] *nicht mehr in Anspruch genommen werden darf, wenn einige der Gradzahlen Null sind.* Dieses ist in der Herleitung des Satzes (I) begründet. Enthielte die in § 1. mit φ bezeichnete Function *nicht die Coordinaten aller r Punkte, sondern nur* $x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}$ (wo $s < r$), so würde an die Stelle von (I) folgender Ausdruck treten:

$$n^{(1)}(x^{(1)}) + \cdots + n^{(s)}(x^{(s)}) - \sum (v_1 + \cdots + v_s) - \sum_1^s c_{ik},$$

der sich nicht durch die Specialisirung $n^{(s+1)} = \cdots = n^{(r)} = 0$ aus dem allgemeinen herleiten lässt. Fehlt z. B. z in f_5, so braucht man von den auf die Schaar 8) bezüglichen Zahlen nur $(x), (y), v_1, v_2, c_{12}$ zu kennen, um die Berechnung von $(g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5)$ auszuführen. — Im Uebrigen bleibt die Rechnung genau dieselbe, nur muss sie für derartige Fälle besonders wiederholt werden.

§ 5.

Punktepaare im Raume.

Im Folgenden bezeichnet δ_i, δ_{ii}, δ_{ik} die Zahl der Ausnahmepunkte, die bzw. in der Ebene e_i, der Geraden e_i^2, der Geraden $e_i e_k$ liegen; δ_{iik} ist $= 1$ oder 0, je nachdem der Punkt $e_i^2 e_k$ Ausnahmepunkt ist oder nicht.

Ohne weitere Rechnung bekannt sind *die nachstehenden Zahlen, welche den später zu entwickelnden zu Grunde gelegt werden:*

$$\text{a) } (e_1^3 g_{12}^2 f_1) = \nu_1 - 1; \quad \text{b) } (e_1^3 e_2 g_{12} f_1) = \nu_1; \quad \text{c) } (e_1^2 g_{12}^3 f_1) = 2\nu_1 - 2.$$

$$\text{d) } (e_1^2 e_2 g_{12}^2 f_1) = \mu_1 + 2\nu_1 - 1 - \delta_{11};$$

$$\text{e) } (e_1^2 e_2^2 g_{12} f_1) = \mu_1 + \nu_1 - \delta_{11} - \delta_{22};$$

$$\text{f) } (e_1 e_2 g_{12}^3 f_1) = 2\mu_1 + 2\nu_1 - 2; \quad \text{g) } (e_1 g_{12}^4 f_1) = 2\nu_1 - 2;$$

$$\text{h) } (e_1^3 e_2 f_1 f_2) = \nu_1 \nu_2 - \delta_2; \quad \text{i) } (e_1^3 g_{12} f_1 f_2) = \nu_1 \nu_2 - 1;$$

$$\text{k) } (g_{12}^4 f_1 f_2) = 2(\mu_1 - 1)(\nu_2 - 1) + 2(\mu_2 - 1)(\nu_1 - 1);$$

$$\text{l) } (e_1^2 e_2^2 f_1 f_2) = (\mu_1 - \delta_{11})(\nu_2 - \delta_{22}) + (\mu_2 - \delta_{11})(\nu_1 - \delta_{22}).$$

Die Gleichungen e) und l) gelten im Allgemeinen nicht mehr, wenn sich die Geraden e_1^2, e_2^2 treffen; *wohl aber* — und dieser Fall kommt allein in Betracht — *wenn der Schnittpunkt Ausnahmepunkt ist.*

Da die Berechnung der noch erforderlichen 16 Zahlen, welche wieder *durch Abtrennung einer Bedingung f und Einführung einer Schaar von Punktepaaren* geschieht, in allen Fällen leicht ist, sollen nur die Resultate und die zur Herleitung benutzten Zahlen angegeben werden.

$$(1) \quad (e_1^2 g_{12}^2 f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 + 2\nu_1 \nu_1 \\ - \delta_{11}(\nu_1 + \nu_2 - 2)$$

aus a), c) und d).

$$(2) \quad (e_1^2 e_2 g_{12} f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 - 1 - \delta_{11}(\nu_1 + \nu_2) - \delta_2 + \delta_{112}$$

aus b) und e), wegen $c = 1 - \delta_{112}$.

$$(3) \quad (e_1 g_{12}^3 f_1 f_2) = 2(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 + 1)$$

aus c), f) und g).

$$(4)\quad \begin{aligned}(e_1 e_2 g_{12}^2 f_1 f_2) = 2(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 \\ - \nu_2 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_{12}\end{aligned}$$

aus d) und f), wegen $c = \mu_1 + \nu_1 - \delta_{12}$.

$$(5)\quad (e_1^2 g_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu\nu\nu + \nu_1\nu_2\nu_3 - \delta_{11}(\nu\nu - 4) - \mu - \nu - \alpha + 2$$

aus i), (1) und (2).

$$(6)\quad \begin{aligned}(e_1 g_{12}^2 f_1 f_2 f_3) = \mu\mu\nu + \nu_1\nu_2\nu_3 + 2\mu\nu\nu - \mu\mu - \nu\nu - \mu\nu - \alpha \\ + 2 - \delta_1(\nu - 4)\end{aligned}$$

aus (1), (3), (4).

$$(7)\quad (e_1 e_2 g_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu\mu\nu + \mu\nu\nu - \mu - \nu - \delta_1\nu - \delta_2\mu + 2 + 4\delta_{12}$$

aus (2) und (4).

$$(8)\quad (g_{12}^3 f_1 f_2 f_3) = 2(\mu\mu\nu + \mu\nu\nu - \mu\mu - \nu\nu - \mu\nu + \mu + \nu)$$

aus (k) und (3).

$$(9)\quad \begin{aligned}(e_1 g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\nu\nu + \mu\nu\nu\nu - \mu\mu - \nu\nu - \mu\nu + 2\mu + 2\nu \\ - \alpha\mu - 2 - \delta_1(\nu\nu - 12)\end{aligned}$$

aus (5), (6), (7).

$$(10)\quad \begin{aligned}(g_{12}^2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\mu\nu + \mu\nu\nu\nu + 2\mu\mu\nu\nu - \mu\mu\mu - \nu\nu\nu - \mu\mu\nu \\ - \mu\nu\nu + 2\mu + 2\nu - \alpha(\mu + \nu - 10) - 4\end{aligned}$$

aus (6) und (8).

$$(11)\quad \begin{aligned}(g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) = \mu\mu\mu\nu\nu + \mu\mu\nu\nu\nu - \mu\mu\mu - \nu\nu\nu - \mu\nu\nu \\ - \mu\mu\nu + 2\mu\mu + 2\nu\nu + 2\mu\nu - 2\mu - 2\nu - \alpha(\mu\mu + \nu\nu - 34)\end{aligned}$$

aus (9) und (10).

$$(12)\quad (e_1^2 e_2 f_1 f_2 f_3) = \mu\nu\nu - \delta_{11}\nu\nu - \delta_2\mu + 3\delta_{11}\delta_2 - 1 + \delta_{112}$$

aus h), l) und (2).

$$(13)\quad (e_1^2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\nu\nu\nu - \mu - \nu - \alpha\mu + 4 - \delta_{11}(\nu\nu\nu - 4\alpha - 6)$$

aus (12) und (5), wegen $(x) = \nu_1\nu_2\nu_3 - \alpha - 1$.

$$(14)\quad \begin{aligned}(e_1 e_2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\nu\nu - \mu - \nu + 4 - \delta_1\nu\nu - \delta_2\mu\mu \\ + 6\delta_1\delta_2 + 6\delta_{12}\end{aligned}$$

aus (7) und (12).

$$(15)\quad \begin{aligned}(e_1 g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu\mu\nu\nu + \mu\nu\nu\nu - \mu\mu - \nu\nu - \mu\nu - \alpha\mu \\ - \delta_1\nu\nu + 2\mu + 2\nu - 2 + 12\delta_1\end{aligned}$$

aus (5), (6), (7).

$$(16)\quad \begin{aligned}(e_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) = \mu\mu\nu\nu\nu - \delta_1\nu\nu\nu - (\alpha + 1)\mu\mu - \nu\nu - \mu\nu \\ + 4\mu + 4\nu - 10 + 10\delta_1\alpha + 24\delta_1\end{aligned}$$

aus (13), (14), (15).

Die Zahlen (11) *und* (16) *sind es, aus welchen, nach* (2) § 2., *die gesuchte sich unmittelbar zusammensetzt.* Man findet:

$$(f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6) = \mu\mu\mu\nu\nu\nu - (\alpha + 1)(\mu\mu\mu + \nu\nu\nu) - \mu\mu\nu - \mu\nu\nu$$
$$+ 4(\mu\mu + \nu\nu + \mu\nu) - 10(\mu + \nu)$$
$$+ 20\alpha^2 + 82\alpha + 20.$$

§ 6.

Punktegruppen auf einer Fläche.

Die Aufgabe, Punktegruppen *auf einer gegebenen Fläche* $F = 0$ zu finden, welche $2r$ Bedingungen erfüllen, ist einerseits *ein specieller Fall der auf Gruppen im Raume bezüglichen Probleme*, sofern r Bedingungen nur aussagen, dass jeder Punkt auf F liegen soll; andererseits eine *Verallgemeinerung der für Punktegruppen in der Ebene zu stellenden*, da eine Gleichung

$$f_h(x^{(1)}; \cdots; x^{(r)}) = 0$$

in Verbindung mit $F = 0$, $2(r - 1)$-fach unendliche *Systeme von Curven auf* F darstellt, die in den Ausnahmepunkten und für $x^{(i)} = x^{(k)}$ das bekannte Verhalten zeigen.

Die Berechnung der fraglichen Zahlen ist nicht schwieriger als die für Gruppen in der Ebene, wie an dem Beispiele $r = 2$ kurz ausgeführt werden möge. F sei (als Punktfläche) *ohne Singularitäten*, und von der Ordnung m.

Von den bekannten Zahlen

$$(e_1{}^2 e_2 g_{12}) = m^2, \qquad (e_1 e_2 g_{12}{}^2) = 2m^2 - m,$$
$$(e_1{}^2 e_2 f_1) = (m - \delta_{11})(m\nu_1 - \delta_2); \quad (e_1{}^2 f_1 f_2) = (m - \delta_{11})(m\nu_1\nu_2 - \alpha - 1)$$

ausgehend, berechnet man leicht der Reihe nach die folgenden:

$$(1) \quad (e_1 e_2 g_{12} f_1) = m^2(\mu_1 + \nu_1) - m(1 + \delta_1 + \delta_2) + \delta_{12}.$$

$$(2) \quad (e_1 e_2 f_1 f_2) = m^2(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) - m[1 + \delta_1(\nu_1 + \nu_2) + \delta_2(\mu_1 + \mu_2)]$$
$$+ 2\delta_1\delta_2 + \delta_{12}.$$

$$(3) \quad (e_1 g_{12} f_1 f_2) = m^2(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \nu_1\nu_2) - m^2 - m(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)$$
$$- m(\alpha - 2) - \delta_1(m\nu_1 + m\nu_2 - 3).$$

$$(4) \quad (g_{12}{}^2 f_1 f_2) = m^2(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + 2\mu_1\nu_2 + 2\mu_2\nu_1)$$
$$- m(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)$$
$$- m^2(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2) + 2m - 2\alpha(m - 1).$$

$$(5)\quad (e_1 f_1 f_2 f_3) = m^2 \cdot \mu\nu\nu - \alpha m\mu - m\mu - \mu\nu - m^2 + 4m$$
$$- \delta_1 (m\nu\nu - 3\alpha - 5).$$

$$(6)\quad (g_{12} f_1 f_2 f_3) = m^2(\mu\mu\nu + \mu\nu\nu - \mu - \nu) - m(\mu\mu + \nu\nu + \mu\nu)$$
$$- (\alpha - 2)\, m(\mu + \nu) + 2m^2 - 2m + 8\alpha.$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$(f_1 f_2 f_3 f_1) = m^2(\mu\mu\nu\nu - \mu - \nu + 4) - \alpha(m + 1)(\mu\mu + \nu\nu)$$
$$- m(\mu\nu - 4\mu - 4\nu + 10) + 6\alpha^2 + 18\alpha.$$

Für $m = 1$ ergiebt sich hieraus die in (6) § 3. berechnete Zahl.

December 1881.

Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen.

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

Durch Einführung des Begriffes der ungleichmässigen Convergenz (nach heutiger Bezeichnung) hat Herr Seidel*) zuerst gezeigt, wie es zu erklären ist, dass eine unendliche Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen eines Arguments sind, doch eine unstetige Function dieses Arguments darstellen kann**). Nach ihm beruht dies auf Folgendem. Es sei $S_n(x)$ die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihe, $R_n(x)$ ihr Rest, $f(x)$ ihre Summe. An der Stelle x sei die dargestellte Function unstetig, dagegen in der Nachbarschaft von x stetig; man betrachte eine Stelle $x+\varepsilon$, so dass

$$f(x+\varepsilon) = S_n(x+\varepsilon) + R_n(x+\varepsilon);$$

man bestimme die Zahl n so, dass $R_n(x+\varepsilon) < \sigma$ wird, wo σ beliebig klein vorgegeben (was durch hinreichend grosse Wahl von n erreicht werden kann). Dadurch ist n in eine gewisse Abhängigkeit von ε gebracht, und zwar der Art, dass n unendlich gross wird, wenn man $\varepsilon = 0$ werden lässt; hierdurch aber ist die Convergenz an der Stelle x nicht aufgehoben, denn man muss sich vorstellen, dass n an der Stelle $\varepsilon = 0$ eine unstetige Function von ε ist, welche an ihr plötzlich wieder zu einem endlichen Werthe überspringt. Herr Seidel kommt zu diesem Resultate, indem er zeigt, dass das Unendlichwerden von n die einzige Möglichkeit bietet, um die durch Beispiele feststehende Thatsache zu erklären, dass Unstetigkeiten der dargestellten Function möglich sind. Es muss aber wünschenswerth sein, in jedem einzelnen Falle dies Resultat *direct* durch die Rechnung zu bestätigen, und dies soll im Folgenden für die Fourier'sche Reihe geschehen.

---

*) Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen; Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1848, Bd. V, p. 379.

**) Umgekehrt kann es sehr wohl eintreten, dass eine stetige Function dargestellt wird durch eine Reihe, deren einzelne Glieder unstetig sind; es muss dann nur an der betreffenden Stelle die Summe der Sprünge aller Glieder Null sein. Ein Beispiel liefert die Entwicklung einer complexen Function nach Lamé'schen Functionen zweiter Art (die im Unendlichen verschwinden); die letztern sind unstetig längs eines Theiles der reellen Axe, der im Innern des Convergenzgebietes liegen kann. Vgl. den Aufsatz des Verfassers im vorliegenden Bande, p. 323 ff.

Nach Dirichlet ist bei der letztern Reihe:

$$
\begin{aligned}
S_n(x+\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\lambda - x - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\lambda - x - \varepsilon)}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi} \lim \int_{-\frac{\pi+x+\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi-x-\varepsilon}{2}} f(2\mu + x + \varepsilon) \frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\, d\mu, \qquad h = 2n+1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Unter der Annahme, dass ε positiv sei, ersetzen wir das Integral rechts durch folgende Summe von drei Integralen:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} f(x+\varepsilon-2\mu) \frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\, d\mu + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi+x+\varepsilon}{2}} f(x+\varepsilon-2\mu) \frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\, d\mu \\
&\qquad + \int_0^{\frac{\pi-x-\varepsilon}{2}} f(x+\varepsilon+2\mu) \frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\, d\mu.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Jedes dieser Integrale behandeln wir einzeln. Wir setzen

$$f(x+\varepsilon-2\mu)\frac{\mu}{\sin\mu} = \varphi(\mu) + \psi(\mu),$$

wo $\varphi(\mu)$ eine Function ist, welche in dem Integrationsintervalle nur abnimmt, $\psi(\mu)$ eine solche, welche in ihm nur zunimmt*). Jedes der drei Integrale zerfällt dann in eine Summe von zweien, auf welche sich der Mittelwerthsatz des Herrn Du Bois-Reymond anwenden lässt.

Das erste Integral giebt:

---

*) Ueber die Möglichkeit einer solchen Zerlegung vergl. Du Bois-Reymond: Borchardt's Journal, Bd. 79, p. 54 ff.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon} \varphi(\mu)\,\frac{\sin h\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$= \varphi(0)\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \left[\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \varphi(0)\right]\int_{\xi h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu,$$

$$\text{wo}\quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon} \psi(\mu)\,\frac{\sin h\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$= \psi(0)\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \left[\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \psi(0)\right]\int_{\eta h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu,$$

$$\text{wo}\quad 0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon,$$

und hieraus ergiebt sich durch Addition:

$$(3)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon} f(x+\varepsilon-2\mu)\,\frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\,d\mu = f(x+\varepsilon)\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \Delta,$$

wo Δ *eine Grösse ist, welche verschwindet für* $\varepsilon = 0$, *und welche beliebig klein gemacht werden kann durch hinreichend grosse Wahl von* h, *und zwar gleichmässig für alle* ε, *die von Null verschieden sind.* In der That hat man

$$\Delta = \left[f(x+0)\,\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon} - f(x+\varepsilon)\right]\int_{\xi h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+ \left[\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \psi(0)\right]\int_{\eta h}^{\xi h} \frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu.$$

Hier ist rechts $f(x+0)$ für $f(x)$ zu setzen, weil das Argument von f bei der Integration von $x+\varepsilon$ bis x abnimmt und ε positiv vorausgesetzt war. Die ausgesprochenen Eigenschaften von Δ sind evident, so lange ξ und η von Null verschieden sind. Ist aber etwa $\xi = 0$, so führe man eine von Null verschiedene Grösse ε' ein, welche kleiner als $\frac{1}{2}\,\varepsilon$ ist und zerlege das Intervall in zwei Theile; dann wird: für $0 \leqq \xi' \leqq \varepsilon' \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon} \varphi(\mu)\,\frac{\sin h\mu}{\mu}\,d\mu = \varphi(0)\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + [\varphi(\varepsilon') - \varphi(0)]\int_{\xi' h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\right) - \varphi(\varepsilon')\right]\int_{\xi h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu.$$

Eine analoge Gleichung kann man für ψ bilden; darin mögen η und η' an Stelle von ξ und ξ' treten. Durch Addition ergiebt sich dann wieder (3), wenn rechts

$$\Delta = \left[f(x+\varepsilon-2\varepsilon')\,\frac{\varepsilon'}{\sin\varepsilon'} - f(x+\varepsilon)\right]\int_{\xi' h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+ [\psi(\varepsilon') - \psi(0)]\int_{\eta' h}^{\xi' h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+ \left[f(x+0) - f(x+\varepsilon-2\varepsilon')\,\frac{\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\right]\int_{\xi h}^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+ \left[\psi\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\right) - \psi(\varepsilon')\right]\int_{\eta h}^{\xi h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu.$$

Hierin können die beiden ersten Glieder beliebig klein gemacht werden dadurch, dass man ε' hinreichend klein wählt; in den beiden letzten aber sind ξ und η (weil $\geqq \varepsilon'$) von Null verschieden, also können ihre beiden zweiten Factoren durch hinreichend grosse Wahl von h sicher beliebig klein gemacht werden, wie es behauptet wurde.

Ebenso findet man für das zweite Glied der Summe (2) analog zu (3):

$$(4)\qquad \int_{\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon)} f(x+\varepsilon-2\mu)\,\frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\,d\mu = f(x-0)\,\frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon}\int_{\frac{1}{2}\varepsilon h}^{\frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon)h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \Delta',$$

wo:

$$\Delta' = \left[f(-\pi)\,\frac{\frac{1}{2}\,(\pi+x+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\,(\pi+x+\varepsilon)} - f(x-0)\,\frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon}\right]\int_{\xi' h}^{\frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon)h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+ \left[\psi\left(\frac{1}{2}\,(\pi+x+\varepsilon)\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\right]\int_{\eta' h}^{\xi' h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu,$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon \leqq \xi' \leqq \frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon), \quad \frac{1}{2}\varepsilon \leqq \eta' \leqq \frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon).$$

In Betreff der Grösse Δ' gilt offenbar folgendes: durch hinreichend grosse Wahl von h kann Δ' beliebig klein gemacht werden, gleichmässig für alle ε, auch für $\varepsilon = 0$; sollte gleichzeitig $\varepsilon = 0$ und $\xi' = 0$ sein, so benutzt man eine Hülfsgrösse ε', wie im vorigen Falle. Auf der rechten Seite von (4) war $f(x-0)$ für $f(x)$ zu setzen, weil das Argument von f bei der Integration abnimmt von x bis $-\pi$.

In derselben Weise formt man endlich das dritte Glied von (2) um; es wird:

$$(5)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)} f(x+\varepsilon+2\mu)\frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\,d\mu = f(x+\varepsilon)\int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \Delta'',$$

wo:

$$\Delta'' = \left[f(\pi)\frac{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)} - f(x+\varepsilon)\right]\int\limits_{\xi''h}^{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$+\left[\psi\left(-\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)\right)-\psi(0)\right]\int\limits_{\eta''h}^{\xi''h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu$$

$$0 \leqq \xi'' \leqq \frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon), \quad 0 \leqq \eta'' \leqq \frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon).$$

Auch Δ'' kann beliebig klein gemacht werden durch hinreichend grosse Wahl von h, gleichmässig für alle ε, einschliesslich $\varepsilon = 0$.

Die Gleichungen (4) und (5) können wir durch identische Umformung auf folgende Form bringen:

$$(6)\qquad \int\limits_{\frac{1}{2}\varepsilon}^{\frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon)} f(x+\varepsilon-2\mu)\frac{\sin h\mu}{\sin\mu}\,d\mu = f(x-0)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\int\limits_{\frac{1}{2}\varepsilon h}^{\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu + \delta'$$

$$= f(x-0)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\left[\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu\right]+\delta',$$

$$(7)\qquad \int\limits_0^{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)} f(x+\varepsilon+2\mu)\frac{\sin h\mu}{\mu}\,d\mu = f(x+\varepsilon)\cdot\frac{\pi}{2}+\delta'',$$

wo nun

$$\delta' = \Delta' - f(x-0)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\int\limits_{\frac{1}{2}(\pi+x+\varepsilon)h}^{\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu,$$

$$\delta'' = \Delta'' - f(x+\varepsilon)\int\limits_{\frac{1}{2}(\pi-x-\varepsilon)h}^{\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu.$$

In Betreff des Verschwindens bei wachsendem h, haben δ' und δ'' dieselben Eigenschaften wie Δ' und Δ''.

Aus (1), (2), (6) und (7) folgt jetzt:

$$(8)\qquad R_n(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon) - S_n(x+\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{\pi}f(x+\varepsilon)\left[\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu\right]$$

$$- \frac{1}{\pi}f(x-0)\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\left[\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu\right]$$

$$- \frac{1}{\pi}(\Delta + \delta' + \delta'').$$

Man erkennt hieraus, nach dem über Δ, δ' und δ'' Gesagten, dass es möglich ist $R_n(x+\varepsilon)$ beliebig klein zu machen durch hinreichend grosse Wahl von h, und zwar gleichmässig für alle ε, die von Null verschieden sind, dass aber h unbegrenzt wachsen muss, um dies zu erreichen, wenn $\varepsilon = 0$ wird. Also:

1) *Die Fourier'sche Reihe convergirt gleichmässig an einer Stelle, wo die dargestellte Function stetig ist*, was Herr Heine zuerst gezeigt hat.*)

2) *Die Convergenz derselben wird unendlich verzögert, wenn sich das Argument einer Stelle nähert, wo die dargestellte Function unstetig ist*, wie es Herr Seidel a. a. O. dargelegt hat.

Wenn die Fourier'sche Reihe an einer Sprungstelle dennoch convergirt, so liegt dies daran, dass $\lim\limits_{\varepsilon=0} R_n(x+\varepsilon)$ verschieden ist von $R_n(x)$. In der That hat man aus (8):

---

*) Ueber trigonometrische Reihen, Borchardt's Journal, Bd. 71, 1870. Vgl. auch desselben Verfassers Handbuch der Kugelfunctionen 2$^{\text{te}}$ Aufl. Th. I, p. 57 ff. Berlin 1878.

$$\lim_{\varepsilon=0} R_n(x+\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\Big[f(x+0)-f(x-0)\Big]\Big[\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu\Big]$$
$$-\frac{1}{\pi}(\delta'+\delta'')_{\varepsilon=0},$$

(woraus wieder hervorgeht, dass für $f(x+0)=f(x-0)$ gleichmässige Convergenz eintritt); dagegen ist:

$$R_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] - S_n(x)$$
$$= -\frac{1}{\pi}[f(x+0)-f(x-0)]\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu - \frac{1}{\pi}(\delta'+\delta'')_{\varepsilon=0}.$$

Wählt man n (oder h) so gross, dass $R_n(x)$ beliebig klein wird, so hat man erst $\varepsilon=0$ zu setzen und dann über h passend zu verfügen, denn um den Werth einer unendlichen Reihe zu berechnen, hat man, der Definition nach, erst das betreffende Argument einzusetzen und dann zu summiren; man hat also $\varepsilon h=0$ zu nehmen; so wird:

$$R_n(x) = -\frac{1}{\pi}(\delta'+\delta'')_{\varepsilon=0},$$

derselbe Werth, welcher sich für $\lim\limits_{\varepsilon=0} R_n(x+\varepsilon)$ ergiebt, wenn $f(x)$ in x stetig ist. —

Mit Hülfe der aufgestellten Formeln verificirt man auch die von P. du Bois-Reymond*) gemachte Bemerkung, dass man als Grenzwerth von $S_n(x)$ für $n=\infty$ jeden beliebigen Werth zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ erhalten kann, wenn man von $S_n(x+\varepsilon)$ ausgeht und zwischen ε und h beim Grenzübergange ($\varepsilon=0$, $h=\infty$) eine Relation als erfüllt annimmt; in der That folgt aus (1), (2), (3), (6) und (7) die a. a. O. aufgestellte Formel:

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ n=\infty}} S_n(x+\varepsilon) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] + \frac{1}{\pi}[f(x+0)-f(x-0)]\int_0^{\frac{1}{2}\varepsilon h}\frac{\sin\mu}{\mu}\,d\mu.$$

Die rechte Seite bleibt in der angegebenen Weise unbestimmt, wenn man festsetzt, dass εh für $\varepsilon=0$ und $h=\infty$ einen willkürlich vorgegebenen Werth annehmen soll; bei Summation der Fourier'schen Reihe im gewöhnlichen Sinne muss man $\varepsilon h=0$ setzen, wie oben.

Freiburg i. Br., d. 18. October 1881.

---

*) Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen, Math. Annalen Bd. VII, p. 241, 1874; vergl. auch die Monographie desselben Verfassers: Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, Tübingen 1880, p. 18.

Berichtigung zu dem Aufsatze: „Ueber die Fourier'sche Reihe.“

(Mathematische Annalen, Bd. XIX, pag. 236.)

Von

AXEL HARNACK in Dresden.

1. Auf Seite 251 der citirten Arbeit habe ich den Satz: „Bei einer in einem beliebigen Intervalle im Allgemeinen convergenten trigonometrischen Reihe ist $\operatorname{Lim} a_k = 0$ und $\operatorname{Lim} b_k = 0$ für $k = \infty$“, kurz zu beweisen gesucht; jedoch ist, worauf ich in Folge einer brieflichen Bemerkung des Herrn Cantor aufmerksam wurde, der Beweis unzureichend, wenn nicht die Voraussetzung hinzugefügt wird, dass a_k und b_k überhaupt eine bestimmte Grenze besitzen. Da dies an jener Stelle unzulässig ist, und da schon mehrfach die Versuche, den von Cantor (Annalen Bd. IV) gegebenen Beweis zu umgehen, gescheitert sind, so möge es gestattet sein, die Principien dieses Beweises in neuer Form zu reproduciren, um die Einfachheit desselben hervortreten zu lassen. Der Satz selbst lautet: „*Wenn für alle Werthe von x in einem beliebig kleinen Intervalle* $\operatorname{Lim}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$ *wird für* $n = \infty$, *so ist* $\operatorname{Lim} a_n = 0$ *und* $\operatorname{Lim} b_n = 0$.“ Man weist zuerst nach (S. 251 meines Aufsatzes), dass diese Bedingung nothwendig die andere involvirt: Es muss für alle Werthe von x in einem Intervall a bis b $\operatorname{Lim} a_n \sin nx$ (und ebenso $\operatorname{Lim} b_n \sin nx$) gleich 0 werden. Dies besagt, dass zu jedem x eine Stelle n angegeben werden kann, von der ab die Beträge $[a_n \sin nx] \cdots [a_{n+k} \sin (n+k)x] \cdots$. sämmtlich kleiner sind als eine beliebig kleine Zahl δ; (jedoch ist nicht gesagt, dass dasselbe n bei allen Werthen von x ausreicht). Diese Forderung ist nicht erfüllbar, ausser wenn von einer Stelle n ab sämmtliche Beträge: $[a_n] \cdots [a_{n+k}] \cdots$ kleiner sind als δ. Denn nimmt man an, dass dieses nicht der Fall ist, so liesse sich eine Reihe von unendlich vielen Gliedern: $a_{n_1}, a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdots$ bilden, deren Beträge sämmtlich gleich oder grösser sind als δ. Dann kann aber auch ein Werth x im beliebig vorgeschriebenen Intervalle a bis b (und folglich in jedem noch so kleinen Theile desselben) gefunden werden, bei welchem die Reihe:

$$a_{n_1} \sin n_1 x,\; a_{n_2} \sin n_2 x \cdots a_{n_k} \sin n_k x \cdots$$

nicht die Null zur Grenze hat. Es wird nämlich aus der Reihe der unbegrenzt wachsenden positiven ganzen Zahlen: $n_1, n_2 \cdots n_k \cdots$ stets eine andere unendliche Reihe: $n_1' n_2' \cdots n_k' \cdots$ entnommen werden können, zu welcher ein Werth x sich finden lässt, für welchen die Producte $n_1'x$, $n_2'x \cdots n_k'x \cdots$ von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ stets nur um weniger als eine beliebig kleine Zahl ε differiren, so dass also der Betrag des Sinus beliebig nahe an der Einheit, und folglich der Betrag des Gliedes $a_{n'k} \sin n'_k x$ beliebig nahe an einer von 0 verschiedenen Grösse δ liegt. Man setze:

$$n_1 x > y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{und} \quad n_1 x < y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

also

$$\frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1} < x < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

wobei y_1 eine noch zu bestimmende ganze ungerade Zahl ist. Der Werth von x fällt in das vorgeschriebene Intervall von a bis b, wenn

$$a < \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1}, \quad b > \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1},$$

also wenn

$$(n_1 a + \varepsilon) \frac{2}{\pi} < y_1 < (n_1 b - \varepsilon) \frac{2}{\pi}$$

ist.

Dieses Intervall enthält sicher eine ungerade Zahl, wenn

$$(n_1 (b - a) - 2\varepsilon) \frac{2}{\pi} \geqq 2, \quad \text{also} \quad n_1 \geqq \frac{\pi + 2\varepsilon}{b - a}$$

gewählt wird. Diese Forderung dient dazu, um einen unteren Werth für die zu bildende Reihe: n_1' zu fixiren, und in dem Umstande, dass lediglich eine untere Grenze fixirt zu werden braucht, liegt der Kern des ganzen Beweises. Denn wird nun y_1 irgendwie gemäss der obigen Ungleichung gewählt, so ist x auf ein Intervall beschränkt, das kurz mit

$$\alpha = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_1'}, \quad \beta = \frac{y_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_1'}$$

bezeichnet werden soll, und die Länge $\frac{2\varepsilon}{n_1'}$ besitzt. In diesem Intervalle soll nun x so bestimmt werden, dass für eine Zahl $n_2' > n_1'$

$$\frac{y_2 \frac{\pi}{2} - \varepsilon}{n_2'} < x < \frac{y_2 \frac{\pi}{2} + \varepsilon}{n_2'}$$

wird.

Alsdann muss aber y_2 der Ungleichung genügen:

$$(n_2'\alpha + \varepsilon)\frac{2}{\pi} < y_2 < (n_2'\beta - \varepsilon)\frac{2}{\pi},$$

es ist grösser als y_1; und dieses Intervall enthält sicher mindestens eine ungerade Zahl, wenn

$$n_2' \geqq \left(\frac{\pi + 2\varepsilon}{\beta - \alpha} = \frac{\pi + 2\varepsilon}{2\varepsilon}\, n_1'\right).$$

Damit wird wiederum nur eine untere Grenze fixirt, nach der n_2' aus der ursprünglichen Reihe der $n_1, n_2 \cdots$ zu entnehmen ist, und nach dem y_2 der vorgeschriebenen Ungleichung gemäss gewählt ist, bleibt die Grösse x immer noch auf ein endliches Intervall beschränkt, dessen Länge nunmehr $\frac{2\varepsilon}{n_2'}$ beträgt. In diesem Intervalle lässt sich ein neues angeben, für dessen Werthe eine Grösse $n_3'x$ der gestellten Forderung genügt, und sonach wird durch fortgesetzten Grenzprocess eine Stelle x definirt, bei welcher die Beträge von $\sin n_1'x$, $\sin n_2'x, \cdots$ $\sin n_k'x \cdots$ beliebig wenig von der Einheit verschieden sind, so dass auch die Reihe:

$$a_{n_1'} \sin n_1'x,\quad a_{n_2'} \sin n_2'x \cdots a_{n'_k} \sin n_k'x \cdots$$

der Voraussetzung zuwider nicht nach 0 convergirt. Es existirt daher keine Zahlenreihe $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdots$, deren Beträge sämmtlich gleich oder grösser sind als eine beliebige Zahl δ, d. h. $\operatorname{Lim} a_n = 0$.

2. Einfluss auf die in meiner Arbeit gegebenen Sätze hat aber ein Fehlschluss, der sich bereits in meiner früheren Mittheilung (Annalen Bd. XVII) befindet, und in die zweite Abhandlung übergegangen ist. Auf Seite 255 dieser letzteren ist bewiesen: Bildet man mit einer nebst ihrem Quadrat integrirbaren Function $f(x)$ die Coefficienten einer Fourier'schen Reihe, und bezeichnet $R_{n,m}$ die Summe:

$$R_{n,m} = \sum_{k=n}^{k=n+m} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

so ist, wenn δ eine willkürlich kleine Grösse bedeutet,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} R_{n,m}^2\, dx < \delta$$

lediglich durch Wahl von n unabhängig von m, woraus hervorgeht, dass auch zwischen beliebigen in das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ fallenden Grenzen x_0 und x_1

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{abs} R_{n,m}\, dx, \quad \text{sowie} \quad \operatorname{abs}\int_{x_0}^{x_1} R_{n,m}\, dx$$

kleiner als jedwede Zahl gemacht werden kann, lediglich durch Wahl von n unabhängig von m. Aus diesem Satze darf nun aber trotz der Unabhängigkeit von m nicht gefolgert werden, dass

$$\text{abs}\int_{x_0}^{x_1} R_{n,\infty}\,dx < \delta,$$

denn die Integrirbarkeit der Function $R_{n,m}$ bei noch so grossen Werthen von m gestattet keinen Schluss auf die Integrirbarkeit der Function $R_{n,\infty}$. Damit werden die in den Artikeln III. und IV. enthaltenen Aussagen, dass die Reihe „im Allgemeinen“ convergirt und so die Function $f(x)$ „im Allgemeinen“ darstellt, hinfällig, und es muss bei den im Artikel VI. bewiesenen bekannten Sätzen sein Bewenden haben: Jede trigonometrische Reihe, *welche eine integrirbare Function definirt,* ist eine Fourier'sche Reihe; und *wenn die Fourier'sche Reihe* an einer Stelle, an welcher $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ einen bestimmten Werth hat, *überhaupt convergirt,* so convergirt sie auch immer nach diesem Werthe. Die Convergenz der Reihe bildet also stets die Voraussetzung. Dieselbe Voraussetzung ist auch bei der im Artikel VIII. aufgestellten Regel zur Differentiation einzuführen: Die trigonometrische Reihe kann nach der angegebenen Regel differentiirt werden, *vorausgesetzt dass auch die Ableitung durch eine trigonometrische Reihe im Allgemeinen darstellbar ist.*

Der oben erwähnte Integralsatz weist aber auf folgendes Verhalten einer Fourier'schen Reihe hin, deren Coefficienten aus den Integralen einer stetigen (oder allgemeiner: einer nebst ihrem Quadrate integrirbaren) Function $f(x)$ gebildet sind, auch wenn die Reihe durchweg oder theilweise divergirt: Bezeichnet h ein beliebig kleines Intervall zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so kann man stets eine untere Grenze m für n bestimmen, so dass das Integral der Glieder

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx = S_n(x)$$

zwischen den Grenzen x und $x+h$, also $\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx$, für jeden Werth von x vom Integral $\int_x^{x+h} f(x)\,dx$ um weniger differirt als eine beliebig kleine Grösse $\delta \cdot h$; convergirt δ nach 0, so convergirt n nach ∞. Daraus folgt, dass der mittlere Werth der stetigen Function $S_n(x)$ für $n \geq m$ vom mittleren Werth der Function $f(x)$ im beliebig kleinen Intervall von x bis $x+h$ bei jedem Werthe von x beliebig wenig abweicht. Wird in dem Falle, dass $f(x)$ eine stetige Function ist, das Intervall h so klein gewählt, dass

$$\int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = hf(x) \pm (< \delta h)$$

so liefern die mittleren Werthe der Function $S_n(x)$ in jedem Intervalle von der Grösse h die Function $f(x)$ mit einer Abweichung, die kleiner ist als 2δ. Ein solches Verhalten einer Reihe kann als eine Darstellung der Function „im Mittel“ bezeichnet werden, und es bleiben die Sätze, wie ich sie formulirt habe, auch die im Artikel V. gegebenen, bestehen, wenn statt der Darstellung „im Allgemeinen“ die allerdings erhebliche Modification der Darstellung „im Mittel“ eingeführt wird. Eine Reihe, welche durch ihre Mittelwerthe eine Function darstellt, kann für jeden einzelnen Werth von x divergiren, während der mittlere Werth einer aus den Gliedern der Reihe gebildeten Summe für jedes beliebig kleine *aber endliche* Intervall h von dem Werthe $f(x)$ beliebig wenig abweicht; und um so weniger, je mehr Glieder summirt werden. In diesem Sinne ist jede stetige Function durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar.

Ueber Büschel von Kegelschnitten.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Die beiden letzten Aufsätze, welche ich in diesen Annalen publicirt habe*), hatten den doppelten Zweck, einmal die Invariantentheorie der ternären Formen in bestimmtem Sinne zu fördern, dann aber zu einer wirklich durchgeführten Theorie der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen Vorarbeiten zu sein. In gleichem Sinne mögen die Untersuchungen aufgefasst werden, die ich hier nachstehend veröffentliche, und in denen es sich um *die Theorie zweier ternärer quadratischer Formen* handelt. Das volle System zugehöriger Formen wurde nach meinen Angaben bereits in Clebsch's Vorlesungen über Geometrie (Bd. 1, pag. 288 ff.) durch Herrn Lindemann mitgetheilt. Dasselbe unterliegt im ersten Abschnitte des Folgenden einer näheren Untersuchung, indem ich nämlich eine Anzahl von Relationen explicite entwickele, die zwischen den Formen des Systems bestehen**). Ich wende mich sodann im zweiten Abschnitte zu der bekannten kanonischen Darstellung (oder „irrationalen Typik"), welche, geometrisch zu reden, durch die Existenz des gemeinsamen Polardreiecks der beiden vorgelegten Kegelschnitte ermöglicht ist. Zwei ternäre quadratische Formen haben keine rationale lineare Covariante. Soll also bei ihnen von einer *rationalen* typischen Darstellung die Rede sein, so muss man ihnen, wie es im dritten Abschnitte des Folgenden geschieht, eine lineare Form adjungiren. Ich verfolge diese Darstellung insbesondere für den Fall, dass diese lineare Form als simultane Covariante der beiden in Betracht kommenden Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitte oder auch mit einer Curve vierter Ordnung gegeben ist, wobei es zumal von Interesse wird, die typische Darstellung dieser zutretenden Curven auf möglichst niedrige Bildungen zurückzuführen.

---

*) Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$; über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$; beide in Bd. XVII.

**) Man vergleiche hierzu Rosanes im VI. Bande dieser Annalen; pag. 264 ff.; „Ueber Systeme von Kegelschnitten".

Abschnitt I.

Das simultane System von s und ϱ.

§ 1.

Aufstellung des Systems.

Von den beiden vorgelegten Kegelschnitten soll der eine, ϱ, in Liniencoordinaten, der andere, s, in Punktcoordinaten gegeben sein. Einzeln genommen haben dieselben die Systeme:

$$\text{(I)} \qquad r; \quad (\varrho\varrho x)^2 = r; \quad r_\varrho^2 = 6(1);$$

$$\text{(II)} \qquad s; \quad (ssu)^2 = \tau; \quad s_\tau^2 = 3(4);$$

(womit zugleich, wie immer im Folgenden, die Bezeichnungen, also hier r und τ für die Covarianten, (1) und (4) für die Invarianten, eingeführt sein sollen). Um die Formen des simultanen Systems zu gewinnen, haben wir (I) und (II) durch Ueberschiebung zu combiniren. So entstehen (vergl. Clebsch-Lindemann l. c.) ausser

$$\varrho, \; r, \; (1), \; s, \; \tau, \; (4)$$

im Ganzen noch 14 Formen, nämlich einmal:

$$s_\varrho = s_x u_\varrho s_\varrho; \quad s_\varrho^2 = 2(2); \quad (\varrho, \tau, x) = u_\varrho u_\tau (\varrho \tau x); \quad (\varrho, \tau, x)^2 = t;$$
$$(r, s, u) = r_x s_x (r s u); \quad (r, s, u)^2 = \sigma; \quad r_\tau = r_x u_\tau r_\tau; \quad r_\tau^2 = (3);$$

sodann die folgenden:

$$(\varrho, \sigma, x) = u_\varrho u_\sigma (\varrho \sigma x); \quad (\sigma, \tau, x) = u_\sigma u_\tau (\sigma \tau x); \quad (s, t, u) = r_x t_x (s t u);$$
$$(s, t, u) = s_x t_x (s t u); \quad r_x s_x t_x (r, s, t); \quad u_\varrho u_\sigma u_\tau (\varrho \sigma \tau) = (\varrho, \sigma, \tau).$$

Ich stelle die 20 Formen des Systems in der folgenden Tabelle zusammen, die nach dem Grade in den x und den u geordnet ist:

(*S*)

	0	1	2	3
0	(1), (2) (3), (4)		r s t	(r, s, t)
1		$s_\varrho; r_\tau$	(r, s, u) (r, t, u) (s, t, u)	
2	ϱ, σ, τ	(ϱ, σ, x) (ϱ, τ, x) (σ, τ, x)		
3	$(\varrho, \sigma, \tau,)$			

§ 2.

Darstellung der einfachsten Formen durch die Formen des Systems.

Alle simultanen Formen von s und ϱ sind *ganze* Functionen der Formen des Systems (S). Ich will nunmehr in diesem und den folgenden Paragraphen einige als solche Functionen darstellen und beginne mit den einfachsten derselben, nämlich den Ueberschiebungen der quadratischen Formen

$$r,\ s,\ t,\ \varrho,\ \sigma,\ \tau$$

übereinander. Indem wir die Producte der Invarianten (1), (2), (3), (4) mit (12), (13), (14), (24), . . . bezeichnen, erhalten wir nach leichter Rechnung:

a) zunächst für die einfachsten Ueberschiebungen je zweier Kegelschnitte:

$$(1)\quad r_\sigma{}^2=16(12);\ \ s_\sigma{}^2=(3);\ \ t_\varrho{}^2=(3);\ \ t_\tau{}^2=8(24);\ \ t_\sigma{}^2=2(23)+6(14);$$

$$(2)\ \left\{\begin{array}{l} (\varrho,\sigma,x)^2=2(2)r+2(1)s;\quad (\sigma,\sigma,x)^2=(3)r+16(12)s-4(1)t;\\ (\sigma,\tau,x)^2=(4)r+(3)s;\quad (\tau,\tau,x)^2=4(4)s;\quad (r,r,u)^2=8(1)\varrho;\\ \qquad (r,t,u)^2=(3)\varrho+2(1)\tau;\quad (s,t,u)^2=(4)\varrho+2(2)\tau;\\ \qquad\qquad (t,t,u)^2=8(24)\varrho-2(4)\sigma+(3)\tau; \end{array}\right.$$

$$(3)\ \left\{\begin{array}{l} r_\varrho=2(1)u_x;\quad r_\sigma=8(12)u_x-4(1)s_\varrho;\quad s_\sigma=\frac{1}{2}(3)u_x-\frac{1}{2}r_\tau;\\ \qquad s_\tau=(4)u_x;\quad t_\varrho=\frac{1}{2}(3)u_x-\frac{1}{2}r_\tau;\\ t_\sigma=\big(2(23)+2(14)\big)u_x-(3)s_\varrho-2(2)r_\tau;\quad t_\tau=4(24)u_x-2(4)s_\varrho; \end{array}\right.$$

b) sodann für die complicirteren Bildungen, bei denen in den Klammerfactoren Unterdeterminanten aus Punkt- oder Liniencoordinaten und Symbolen auftreten:

$$(4)\ \left\{\begin{array}{l} (ru\,\widehat{\varrho x})^2=2(1)u_x{}^2+r\varrho;\text{*)}\\ (ru\,\widehat{\sigma x})^2=r\sigma+4(1)s\varrho+8(12)u_x{}^2-4(1)(su\,\widehat{\varrho x})^2;\\ (su\,\widehat{\sigma x})^2=s\sigma-t\varrho+(tu\,\widehat{\varrho x})^2;\\ (tu\,\widehat{\sigma x})^2=t\sigma+(3)s\varrho-4(2)t\varrho+2(14)u_x{}^2-(3)(su\,\widehat{\varrho x})^2\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4(2)(tu\,\widehat{\varrho x})^2;\\ (ru\,\widehat{\tau x})^2=r\tau+2t\varrho+(3)u_x{}^2-2(tu\,\widehat{\varrho x})^2;\\ (su\,\widehat{\tau x})^2=s\tau+(4)u_x{}^2;\\ (tu\,\widehat{\tau x})^2=t\tau+2(4)s\varrho+4(24)u_x{}^2-2(4)(su\,\widehat{\varrho x})^2; \end{array}\right.$$

---

*) Hierbei bedeutet in bekannter Weise:

$$(ru\,\widehat{\varrho x})^2=\begin{vmatrix} r_1 & u_1 & \varrho_2x_3-\varrho_3x_2\\ r_2 & u_2 & \varrho_3x_1-\varrho_1x_3\\ r_3 & u_3 & \varrho_1x_2-\varrho_2x_1 \end{vmatrix}^2 \text{ etc.}$$

c) endlich für die simultanen Invarianten je dreier Kegelschnitte:

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{c}
(\varrho\varrho_1\varrho_2)^2=6(1);\quad (\varrho\varrho_1\sigma)^2=16(12);\quad (\varrho\varrho_1\tau)^2=(3);\\
(\varrho\sigma\sigma_1)^2=32(122)+2(13);\quad (\varrho\sigma\tau)^2=2(23)+6(14);\\
(\varrho\tau\tau_1)^2=8(24);\quad (\sigma\sigma_1\sigma_2)^2=24(123)-24(114);\\
(\sigma\sigma_1\tau)^2=(33)+16(124);\quad (\sigma\tau\tau_1)^2=4(34);\quad (\tau\tau_1\tau_2)^2=12(44);\\
(rr_1r_2)^2=48(11);\ (rr_1s)^2=16(12);\ (rr_1t)^2=8(13);\ (rss_1)^2=(3);\\
(rst)^2=6(14)+2(23);\quad (rtt_1)^2=(33)+16(124);\quad (ss_1s_2)^2=3(4);\\
(ss_1t)^2=8(24);\ (stt_1)^2=(34)+16(224);\ (tt_1t_2)^2=12(234)-12(144).
\end{array}\right.
$$

Indem ich unter x_1, x_2, x_3, sowie u_1, u_2, u_3 einen Augenblick ganz willkürliche Grössen verstehe, fasse ich diese Formeln folgendermassen zusammen:

$$
(6a)\quad \left\{\begin{array}{c}
(x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau,\ x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau,\ y)^2\\
=\left(x_1^2+4(2)x_1x_2+(3)x_2^2+2(4)x_2x_3\right)r_y^2\\
+\left(4(1)x_1x_2+16(12)x_2^2+2(3)x_2x_3+4(4)x_3^2\right)s_y^2\\
+\left(-4(1)x_2^2+2x_1x_3\right)t_y^2;
\end{array}\right.
$$

$$
(6b)\quad \left\{\begin{array}{c}
(u_1r+u_2s+u_3t,\ u_1r+u_2s+u_3t,\ v)^2\\
=\left(8(1)u_1^2+2(3)u_1u_\varrho+2(4)u_2u_3+8(24)u_3^2\right)v_\varrho^2\\
+\left(2u_1u_2-2(4)u_3^2\right)v_\sigma^2+\left(u_2^2+4(1)u_1u_3+4(2)u_2u_3+(3)u_3^2\right)v_\tau^2;
\end{array}\right.
$$

$$
(7a)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{3}(x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau,\ x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau,\ x_1\varrho+x_2\sigma+x_3\tau)^2\\
=\left\{\begin{array}{c}
2(1)x_1^3+16(12)x_1^2x_2+\left(32(122)+2(13)\right)x_1x_2^2\\
+\left(4(23)+12(14)\right)x_1x_2x_3+8(24)x_2x_3^2+\left(8(123)-8(114)\right)x_2^3\\
+\left((33)+16(124)\right)x_2x_3^2+4(44)x_3^3;
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
(7b)\quad \left\{\begin{array}{l}
(u_1r+u_2s+u_3t,\ u_1r+u_2s+u_3t,\ u_1r+u_2s+u_3t)^2\\
=\left\{\begin{array}{c}
16(11)u_1^3+16(12)u_1^2u_2+8(13)u_1^2u_3+(3)u_1u_2^2\\
+\left(12(14)+4(23)\right)u_1u_2u_3+\left((33)+16(124)\right)u_1u_3^2\\
+(4)u_2^3+8(24)u_2^2u_3+\left((34)+16(224)\right)u_2u_3^2\\
+\left(4(234)-4(144)\right)u_3^3.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Ich betrachte endlich noch die Determinante:

$$
H=\begin{vmatrix}
(\varrho\varrho x)^2 & (\varrho\sigma x)^2 & (\varrho\tau x)^2\\
(\varrho\sigma x)^2 & (\sigma\sigma x)^2 & (\sigma\tau x)^2\\
(\varrho\tau x)^2 & (\sigma\tau x)^2 & (\tau\tau x)^2
\end{vmatrix},
$$

für die ich folgenden Werth finde:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} r & 2(2)r+2(1)s & t \\ 2(2)r+2(1)s & (3)r+16(12)s-4(1)t & (4)r+(3)s \\ t & (4)r+(3)s & 4(4)s \end{vmatrix} \\ &= \left\{\begin{aligned} &-(44)r^3+\big(2(34)-16(224)\big)r^2s-\big((33)-32(124)\big)rs^2 \\ &+\big(4(23)-12(14)\big)rst-16(114)s^3+4(24)r^2t \\ &+4(13)s^2t-(3)rt^2-16(12)st^2+4(1)t^3. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

Entsprechend kommt:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (rru)^2 & (rsu)^2 & (rtu)^2 \\ (rsu)^2 & (ssu)^2 & (stu)^2 \\ (rtu)^2 & (stu)^2 & (ttu)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 8(1)\varrho & \sigma & (3)\varrho+2(1)\tau \\ \sigma & \tau & (4)\varrho+2(2)\tau \\ (3)\varrho+2(1)\tau & (4)\varrho+2(2)\tau & 8(24)\varrho-2(4)\sigma+(3)\tau \end{vmatrix} \\ &= \left\{\begin{aligned} &-8(144)\varrho^3+2(34)\varrho^2\sigma-8(24)\varrho\sigma^2+2(4)\sigma^3 \\ &-\big((33)-32(124)\big)\varrho^2\tau+\big(4(23)-12(14)\big)\varrho\sigma\tau \\ &+\big(4(13)-32(122)\big)\varrho\tau^2-(3)\sigma^2\tau+8(12)\sigma\tau^2-4(11)\tau^3. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

§ 3.

Die Determinante *D*.

Eine besondere Beachtung verdient folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} r_\varrho^2 & r_\sigma^2 & r_\tau^2 \\ s_\varrho^2 & s_\sigma^2 & s_\tau^2 \\ t_\varrho^2 & t_\sigma^2 & t_\tau^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(1) & 16(12) & (3) \\ 2(2) & (3) & 3(4) \\ (3) & 2(23)+6(14) & 8(24) \end{vmatrix},$$

die sich später als *Tactinvariante* der beiden Kegelschnitte erweisen wird. Ich will dieselbe mit D und ihre Unterdeterminanten (zur Vermeidung überflüssiger Nenner) mit $D\cdot\mathsf{A}_i$, $D\cdot\mathsf{B}_i$, $D\cdot\Gamma_i$ bezeichnen, so dass man zuvörderst hat:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &D\cdot\mathsf{A}_1=2(234)-18(144), \\ &D\cdot\mathsf{A}_2=3(34)-16(224), \\ &D\cdot\mathsf{A}_3=4(223)+12(124)-(33), \\ &D\cdot\mathsf{B}_1=2(233)+6(134)-128(1224), \quad \Big|\; D\cdot\Gamma_1=48(124)-(33), \\ &D\cdot\mathsf{B}_2=48(124)-(33), \quad \Big|\; D\cdot\Gamma_2=2(23)-18(14), \\ &D\cdot\mathsf{B}_3=2(23)-18(14), \quad \Big|\; D.\Gamma_3=6(13)-32(122). \end{aligned}\right.$$

Die Ausrechnung giebt dann:

$$D = 72(1234) - 108(1144) - 256(12224) + 4(2233) - (333); \tag{2}$$

ferner:

$$D \cdot (\mathsf{AB\Gamma}) = 1; \tag{3}$$

und endlich, indem wir mit x_1, x_2, x_3 wieder willkürliche Grössen bezeichnen:

$$\begin{aligned} D(\mathsf{B\Gamma}x) &= 6(1)x_1 + 16(12)x_2 + (3)x_3, \\ D(\mathsf{\Gamma A}x) &= 2(2)x_1 + (3)x_2 + 3(4)x_3, \\ D(\mathsf{AB}x) &= (3)x_1 + \big(2(23) + 6(14)\big)x_2 + 8(24)x_3. \end{aligned} \tag{4}$$

§ 4.

Formes gauches.

Unter den Formen des Systems (S) befinden sich folgende „formes gauches“:

(ϱ, σ, x), (ϱ, τ, x), (σ, τ, x), (r, s, u), (r, t, u), (s, t, u), (r, s, t), (ϱ, σ, τ).

Die Quadrate und die Producte je zweier dieser Formen, sowie ihre geraden Ueberschiebungen sind, wie man weiss, ganze Functionen der übrigen Formen. Ich will sie hier nicht alle als solche darstellen, sondern nur an einigen Beispielen zeigen, wie man die Rechnungen anzulegen hat.

Zu dem Zwecke beginne ich mit dem Quadrate von $(\varrho\sigma x)$. Es ist:

$$\begin{aligned} \big((\varrho, \sigma, x)\big)^2 &= u_\varrho u_\sigma u_{\varrho_1} u_{\sigma_1} (\varrho\sigma x)(\varrho_1\sigma_1 x) = u u_\sigma u_{\varrho_1} (\varrho_1 \sigma_1 x) \big\{ u_\sigma (\varrho\sigma_1 x) \\ &\qquad - u_\varrho (\sigma\sigma_1 x) + u_x (\varrho\sigma\sigma_1) \big\}, \\ &= \sigma \Big\{ \varrho \cdot (\varrho\sigma x)^2 - \frac{1}{2} \big(u_{\sigma_1} (\varrho\varrho_1 x) - u_x (\varrho\varrho_1\sigma) \big) \Big\}^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2} u_\varrho u_{\varrho_1} \big(u_{\varrho_1} (\sigma\sigma_1 x) - u_x (\sigma\sigma_1\varrho_1) \big) \big(u_\varrho (\sigma\sigma_1 x) - u_x (\sigma\sigma_1\varrho) \big), \\ &= \sigma\varrho(\varrho\sigma x)^2 - \frac{\sigma}{2} \big(r u \, \widehat{\sigma x} \big)^2 - \frac{1}{2} \varrho \big(\widehat{\sigma\sigma_1} u \, \widehat{\varrho x} \big)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{4} \Big\{ u_\varrho \big(u_{\varrho_1} (\sigma\sigma_1 x) - u_x (\sigma\sigma_1\varrho_1) \big) - u_{\varrho_1} \big(u_\varrho (\sigma\sigma_1 x) - u_x (\sigma\sigma_1\varrho) \big) \Big\}^2, \\ &= \sigma\varrho(\varrho\sigma x)^2 - \frac{\sigma}{2} \big(r u \, \widehat{\sigma x} \big)^2 - \frac{1}{2} \varrho \big(\widehat{\sigma\sigma_1} \, u \, \widehat{\varrho x} \big)^2 + \frac{1}{4} u_x^2 \big(\widehat{\sigma\sigma_1} \, r \, u \big)^2. \end{aligned}$$

Analog kommt:

$$\big((\tau, \varrho, x)\big)^2 = \varrho\tau \cdot (\tau\varrho x)^2 - \frac{\tau}{2} \big(r u \, \widehat{\tau x} \big)^2 - \frac{1}{2} \varrho \big(\widehat{\tau\tau_1} \, u \, \widehat{\varrho x} \big)^2 + \frac{1}{4} u_x^2 \big(\widehat{\tau\tau_1} \, r \, u \big)^2,$$

$$\begin{aligned} \big((\sigma, \tau, x)\big)^2 &= \sigma\tau \cdot (\sigma\tau x)^2 - \frac{\tau}{2} \big(\widehat{\sigma\sigma_1} \, u \, \widehat{\tau x} \big)^2 - \frac{1}{2} \sigma \big(\widehat{\tau\tau_1} \, u \, \widehat{\sigma x} \big)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{4} u_x^2 \big(\widehat{\tau\tau_1} \, \widehat{\sigma\sigma_1} \, u \big)^2. \end{aligned}$$

Hier sind nun noch rechter Hand die Werthe aus § 2. einzutragen.

Natürlich steht nichts im Wege, in ähnlicher Weise Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen zu behandeln. Ich wähle beispielsweise das Product:

$$u_\varrho u_\tau(\varrho\tau x) \cdot v_\varrho v_\tau(\varrho\tau x).$$

Die betreffende Rechnung verläuft folgendermassen:

$$\begin{aligned}
u_\varrho v_{\varrho_1} u_\tau v_{\tau_1}(\varrho\tau x)(\varrho_1\tau_1 x) &= v_{\varrho_1} u_\tau v_{\tau_1}(\varrho\tau x)\left\{u_{\varrho_1}(\varrho\tau_1 x) - u_{\tau_1}(\varrho\varrho_1 x) + u_x(\varrho\varrho_1\tau_1)\right\}, \\
&= u_{\varrho_1} v_{\varrho_1} v_{\tau_1}(\varrho\tau x)\left\{u_{\tau_1}(\varrho\tau x) + u_\varrho(\tau\tau_1 x) - u_x(\varrho\tau\tau_1)\right\} \\
&\qquad - \frac{1}{2} u_\tau v_{\tau_1}\left(ru\;\widehat{\tau_1 x}\right)\left(rv\;\widehat{\tau x}\right), \\
&= \frac{t}{2}\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) - 2(4) u_{\varrho_1} v_{\varrho_1}\left(su\;\widehat{\varrho x}\right)\left(sv\;\widehat{\varrho x}\right) \\
&\qquad - \frac{1}{2} v_{\tau_1}\left(rv\;\widehat{\tau x}\right)\left(u_{\tau_1}\left(ru\;\widehat{\tau x}\right) - u_x\left(ru\;\widehat{\tau\tau_1}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$= \left\{\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) - (4)\varrho\left(sv\;\widehat{\varrho x}\right)^2 \\
&\qquad - (4) v_\varrho^2\left(su\;\widehat{\varrho x}\right)^2 + (4)\left(s_{\varrho_1}\left(uv\;\widehat{\varrho x}\right) + (suv)(\varrho\varrho_1 x)\right)^2 \\
&- \frac{1}{4}\tau\left(rv\;\widehat{\tau x}\right)^2 - \frac{1}{4} v_\tau^2\left(ru\;\widehat{\tau x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(r_{\tau_1}\left(uv\;\widehat{\tau x}\right) + (ruv)(\tau\tau_1 x)\right)^2 \\
&\qquad + (4) u_x v_x u_\sigma v_\sigma,
\end{aligned}\right.$$

$$= \left\{\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) - (4)\left(\varrho\left(sv\;\widehat{rx}\right)^2 + v_\varrho^2\left(su\;\widehat{\varrho x}\right)\right)^2 \\
&- \frac{1}{4}\left(\tau\left(rv\;\widehat{\tau x}\right)^2 + v_\tau^2\left(ru\;\widehat{\tau x}\right)^2\right) + 2(24)\left(uv\;\widehat{\varrho x}\right)^2 + (4) r_x s_x (ruv)(suv) \\
&+ \frac{1}{4}(3)\left(uv\;\widehat{\tau x}\right)^2 + (4) r_x s_x (ruv)(suv) + \frac{1}{2}(4)\sigma v_x^2 + \frac{1}{2}(4) v_\sigma^2 u_x^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}(4)\left(uv\;\widehat{\sigma x}\right),
\end{aligned}\right.$$

$$= \left\{\begin{aligned}
&(4)\left(r(suv)^2 + s(ruv)^2\right) + \frac{1}{2} t\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) \\
&- (4)\left(\varrho\left(sv\;\widehat{\varrho x}\right)^2 + v_\varrho^2\left(su\;\widehat{\varrho x}\right)^2\right) - \frac{1}{4}\left(\tau\left(rv\;\widehat{\tau x}\right)^2 + v_\tau^2\left(ru\;\widehat{\tau x}\right)^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}(4)(\sigma v_x^2 + v_\sigma^2 u_x^2) + 2(24)\left(uv\;\widehat{\varrho x}\right)^2 - \frac{3}{2}(4)\left(uv\;\widehat{\sigma x}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4}(3)\left(uv\;\widehat{\tau x}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

§ 5.

Die Formen *l*, *m*, *n*, *U*.

Es kommt mir nun noch darauf an, die in § 2. eingeführte Determinante *H* genauer zu untersuchen und insbesondere nachzuweisen, dass sich die Quadrate und Producte unserer drei Kegelschnitte **r, s, t** aus den Unterdeterminanten von H linear zusammensetzen. **Es hat** dies zu geometrischer Folge, dass die sechsfach unendlich vielen zerfallenden Curven vierter Ordnung, welche durch die vier gemeinsamen Tangenten von irgend zwei Kegelschnitten der Schaar

$$\lambda r + \mu s + r t$$

gebildet werden, linear unabhängig sind: denn die Gleichungen dieser Curven vierter Ordnung sind geradezu durch lineare Verbindungen jener Unterdeterminanten gegeben. Um die etwas lange Rechnung in einzelne Schritte zu zerlegen, bringe ich im gegenwärtigen Paragraphen nur erst Hülfsbetrachtungen, die der Theorie der ternären cubischen Formen entnommen sind.

Unter x_1, x_2, x_3 abermals willkürliche Grössen verstanden, setze man

$$(1)\quad (x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau) = U = U_x^3,$$

wo also:

$$(2)\quad \begin{aligned} U_1 &= (x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ \varrho)^2, \\ U_2 &= (x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ \sigma)^2, \\ U_3 &= (x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ \tau)^2. \end{aligned}$$

Nun ist nach § 4. Formel (6a):

$$(3)\quad \begin{aligned} &(x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ y)^2 \\ &= \big(x_1^2 + 4(2)x_1x_2 + (3)x_2^2 + 2(4)x_2x_3\big)r_y^2 \\ &+ \big(4(1)x_1x_2 + 16(12)x_2^2 + 2(3)x_2x_3 + 4(4)x_3^2\big)s_y^2 \\ &+ \big(-4(1)x_2^2 + 2x_1x_3\big)t_y^2 \\ &= l_x^2 r_y^2 + m_x^2 s_y^2 + n_x^2 t_y^2, \end{aligned}$$

wo die l, m, n die Formen bedeuten:

$$(4)\quad \begin{aligned} l &= x_1^2 + 4(2)x_1x_2 + (3)x_2^2 + 2(4)\,x_2x_3, \\ m &= 4(1)x_1x_2 + 16(12)x_2^2 + 2(3)x_2x_3 + 4(4)x_3^2, \\ n &= -4(1)\,x_2^2 + 2\,x_1x_3. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Formel (3) die y der Reihe nach durch ϱ, σ, τ, so wird (Formel (2)):

$$\begin{aligned} U_1 &= 6(1)\,l + 2(2)\,m + (3)\,n, \\ U_2 &= 16(12)\,l + (3)\,m + \big(2(23) + 6(14)\big)\,n, \\ U_3 &= (3)\,l + 3(4)\,m + 8(24)\,n, \end{aligned}$$

und wenn wir diese Gleichungen nach l, m, n auflösen und gleichzeitig von der Bezeichnung des § 3. Gebrauch machen:

$$(5)\qquad l = U_A,\quad m = U_B,\quad n = U_\Gamma.$$

Da sonach l, m, n Polaren von U sind, bestehen zwischen ihnen viele Relationen, von denen ich hier nur diejenigen ableite, die ich im folgenden Paragraphen benöthige. Ich benutze dabei der Kürze halber die bekannte von Aronhold gegebene Formel:

$$\begin{aligned}&6\,U_x''\,U_x'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)^2\\ &= u_x^2(U U_1 U_2)(U U_1 U_3)(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3) = T u_x^2.\end{aligned}$$

Man hat zunächst:

$$\begin{aligned}
&12\,U_A''\,U_A'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mll_1)(nll_1) \qquad = T u_A(\mathsf{AB\Gamma}),\\
&12\,U_B''\,U_B'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mm_1m_2)(nm_1m_2) = \quad 0 \quad,\\
&12\,U_\Gamma''\,U_\Gamma'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mn_1n_2)(nn_1n_2) \quad = \quad 0 \quad,\\
&12\,U_B''\,U_\Gamma'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mm_1n_1)(mm_1n_1) = \quad 0 \quad,\\
&12\,U_\Gamma''\,U_A'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mn_1l)(nn_1l) \qquad = \frac{T}{2}\,u_\Gamma(\mathsf{AB\Gamma}),\\
&12\,U_A''\,U_B'''(U U_2 U_3)(U_1 U_2 U_3)(U U_1 u)\,U_B\,U_\Gamma\\
&\qquad = 12(mnu)(mlm_1)(nlm_1) \qquad = \frac{T}{2}\,u_B(\mathsf{AB\Gamma}),
\end{aligned}$$

und berechnet hiernach für die zweiten Ueberschiebungen der in den x quadratischen Form:

$$(6)\quad (mnu) = \begin{cases} u_1\big(2(1)x_1^2 + 4(13)x_2^2 + 16(14)x_2x_3 + (3)x_1x_3 + 16(12)x_1x_2\big)\\ + u_2\big(4(4)x_3^2 + (3)x_2x_3 - 2(1)x_1x_2\big)\\ + u_3\big(-8(11)x_2^2 - (3)x_3^2 - 16(12)x_2x_3 - 2(1)x_1x_3\big)\end{cases}$$

mit den in den u quadratischen Formen:

$$(\mathrm{I})\qquad (ll_1u)^2,\quad (mm_1u)^2,\quad (nn_1u)^2,\quad (mnu)^2,\quad (nlu)^2,\quad (lmu)^2$$

die folgenden Werthe:

$$(7)\qquad \frac{T}{12D}\,u_A,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \frac{T}{24D}\,u_\Gamma,\quad \frac{T}{24D}\,u_B.$$

Genau ebenso berechnet man natürlich die zweiten Ueberschiebungen der Formen (I) mit den folgenden beiden in den x quadratischen Formen:

$$(6a)\quad (n,l,u)=\left\{\begin{aligned}&u_1\big(-2(2)x_1^2-4(14)x_2^2-(4)x_1x_3-(3)x_1x_2\big)\\&+u_2\big(x_1^2-(4)x_2x_3+2(2)x_1x_2\big)\\&+u_3\big(8(12)x_2^2+(4)x_3^2+(3)x_2x_3+2(2)x_1x_3+4(1)x_1x_2\big),\end{aligned}\right.$$

$$(6b)\quad (l,m,u)=\left\{\begin{aligned}&u_1\big((33)-16(124)\big)x_2^2+4(44)x_3^2+4(34)x_2x_3+8(24)x_1x_3\\&\qquad\qquad+\big(2(23)-2(14)x_1x_2\big)\\&+u_2\Big(\big(2(14)-2(23)\big)x_2^2-8(24)x_2x_3-4(4)x_1x_3-(3)x_1x_2\Big)\\&+u_3\Big(2(1)x_1^2+\big(32(122)-2(13)\big)x_2^2+\big(2(23)-2(14)\big)x_2x_3\\&\qquad\qquad+(3)x_1x_3+16(12)x_1x_2\Big).\end{aligned}\right.$$

Die resultirenden Werthe sind:

$$(7a)\quad\begin{array}{llllll}0, & \frac{T}{12D}u_B, & 0, & \frac{T}{24D}u_\Gamma, & 0, & \frac{T}{24D}u_\Delta;\\ 0, & 0, & \frac{T}{12D}u_\Gamma, & \frac{T}{24D}u_B, & \frac{T}{24D}u_\Delta, & 0.\end{array}$$

Wir berechnen endlich vermöge der Formel

$$(lmu)\,(lnn_1)\,(mnn_1)=\frac{T}{12D}u_\Gamma$$

die in (7) und (7a) noch unbekannte Invariante T. Es ist:

$$n=-4(1)x_2^2+2x_1x_3,$$

also:

$$(nnu)^2=-2u_2^2+16(1)u_2u_3,$$

und nach der 3. der Formeln (6):

$$\begin{aligned}&(lmu)(lnn_1)(mnn_1)\\&=u_1\Big(-2\big((33)-16(124)\big)+64(124)\Big)+u_2\Big(-2\big(2(14)-2(23)\big)-32(14)\Big)\\&\qquad+u_3\Big(-2\big(32(122)-2(13)\big)+8(13)\Big)\\&=u_1\big(96(124)-2(33)\big)+u_2\big(4(23)-36(14)\big)\\&\qquad+u_3\big(12(13)-64(122)\big)=2Du_\Gamma;\end{aligned}$$

somit:

$$\frac{T}{12D}u_\Gamma=2Du_\Gamma,$$

oder:

$$(8)\qquad T=24D^2.$$

§ 6.

Die Determinante H.

Ich werde nun die Quadrate und Producte je zweier der Formen r, s, t, also die Ausdrücke

$$\text{(I)} \qquad r^2, \; s^2, \; t^2, \; rs, \; rt, \; st$$

geradezu als lineare Functionen der Unterdeterminanten H_{ik} der Determinante

$$H = \begin{vmatrix} (\varrho\varrho x)^2 & (\varrho\sigma x)^2 & (\varrho\tau x)^2 \\ (\varrho\sigma x)^2 & (\sigma\sigma x)^2 & (\sigma\tau x)^2 \\ (\varrho\tau x)^2 & (\sigma\tau x)^2 & (\tau\tau x)^2 \end{vmatrix}$$

hinschreiben. Hierzu dienen uns die Formeln (7) des vorigen Paragraphen. Wir haben dem Früheren zufolge (vgl. § 4. Formel 6a):

$$(y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau, \; y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau, \; x)^2 = g_y{}^2 = rl_y{}^2 + sm_y{}^2 + tn_y{}^2$$

und

$$2u_H^2 = (ggu)^2,$$

somit:

$$u_H^2 = \frac{1}{2}\left\{r^2(llu)^2 + s^2(mmu)^2 + t^2(nnu)^2 + 2st(mnu)^2 + 2rt(nlu)^2 \right.$$
$$\left. + 2rs(lmu)^2\right\}.$$

Diese Formel combiniren wir nun durch zweimalige Ueberschiebung mit den im vorigen Paragraphen betrachteten in den x quadratischen Formen:

$$(m, n, u), \quad (n, l, u), \quad (l, m, u).$$

So kommt:

$$\begin{aligned} 2m_H n_H(mnu) &= 2Dr(ru_A + su_B + tu_\Gamma), \\ 2n_H l_H(nlu) &= 2Ds(ru_A + su_B + tu_\Gamma), \\ 2l_H m_H(lmu) &= 2Dt(ru_A + su_B + tu_\Gamma). \end{aligned}$$

Die gesuchten Formeln sind daher:

$$\begin{array}{l|l|l} r^2 = m_H n_H(mn\,\widehat{\mathsf{B\Gamma}}), & rs = n_H l_H(nl\,\widehat{\mathsf{B\Gamma}}), & rt = l_H m_H(lm\,\widehat{\mathsf{B\Gamma}}), \\ rs = m_H n_H(mn\,\widehat{\mathsf{\Gamma A}}), & s^2 = n_H l_H(nl\,\widehat{\mathsf{\Gamma A}}), & st = l_H m_H(lm\,\widehat{\mathsf{\Gamma A}}), \\ rt = m_H n_H(mn\,\widehat{\mathsf{AB}}), & st = n_H l_H(nl\,\widehat{\mathsf{AB}}), & t^2 = l_H m_H(lm\,\widehat{\mathsf{AB}}). \end{array}$$

Ich will dieselben der Rechnung noch zugänglicher machen, indem ich vermöge der Formeln

$$P_{i1} = m_H n_H(mn)_i, \quad P_{i2} = n_H l_H(nl)_i, \quad P_{i3} = l_H m_H(lm)_i$$

gewisse Hülfsgrössen P_{ik} einführe. Man hat dann aus Formel (6) des § 5. zur Berechnung der P_{ik}:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
P_{11} &= 2(1)H_{11}+4(13)H_{22}+16(14)H_{23}+(3)H_{13}+16(12)H_{12},\\
P_{21} &= 4(4)H_{33}+(3)H_{23}-2(1)H_{13},\\
P_{31} &= -8(11)H_{22}-(3)H_{33}-16(12)H_{23}-2(1)H_{12},\\
P_{12} &= -2(2)H_{11}-4(14)H_{22}-(4)H_{13}-(3)H_{12},\\
P_{22} &= H_{11}-(4)H_{23}+2(2)H_{12},\\
P_{32} &= 8(12)H_{22}+(4)H_{33}+(3)H_{23}+2(2)H_{13}+4(1)H_{12},\\
P_{13} &= \big((33)-16(124)\big)H_{22}+4(44)H_{33}+4(34)H_{23}+8(24)H_{13}\\
&\qquad +\big(2(23)-2(14)\big)H_{12},\\
P_{23} &= \big(2(14)-2(23)\big)H_{22}-8(24)H_{23}-4(4)H_{13}-(3)H_{12},\\
P_{33} &= 2(1)H_{11}+\big(32(122)-2(13)\big)H_{22}+\big(2(23)-2(14)\big)H_{23}\\
&\qquad +(3)H_{13}+16(12)H_{12},
\end{aligned}
$$

und hieraus die gesuchten Werthe (vgl. § 3., Formel 4):

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
Dr^2 &= 6(1)P_{11}+16(12)P_{21}+(3)P_{31};\\
Ds^2 &= 2(2)P_{12}+(3)P_{22}+3(4)P_{32};\\
Dt^2 &= (3)P_{13}+\big(2(23)+6(14)\big)P_{23}+8(24)P_{33};\\
Drs &= 2(2)P_{11}+(3)P_{21}+3(4)P_{31}=6(1)P_{12}+16(12)P_{22}+(3)P_{32};\\
Drt &= (3)P_{11}+\big(2(23)+6(14)\big)P_{21}+8(24)P_{31}\\
&= 6(1)P_{13}+16(12)P_{23}+(3)P_{33};\\
Dst &= (3)P_{12}+\big(2(23)+6(14)\big)P_{22}+8(24)P_{32}\\
&= 2(2)P_{13}+(3)P_{23}+3(4)P_{33}.
\end{aligned}
$$

Abschnitt II.

Irrationale Typik.

§ 7.

Einleitung.

In den folgenden Paragraphen handelt es sich einmal um eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen der irrationalen Typik, sodann um eine Vervollständigung der Entwicklungen des ersten, hier vorangehenden Abschnitts. Einmal nämlich gebe ich explicite Formeln, um die hauptsächlichen Formen des Systems (S) durch die Ecken, bez. die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks auszudrücken. Sodann aber benutze ich die so gewonnenen Resultate, um die Quadrate der Functionaldeterminanten (r, s, t) und (ϱ, σ, τ), was oben noch nicht geschehen war, durch die geraden Formen des Systems auszudrücken.

Die Einführung des Polardreiecks geschehe in der Weise, dass man die Determinante

$$(r+\lambda s,\ r+\lambda s,\ r+\lambda s)^2$$

gleich Null setzt und die so entstehende cubische Gleichung

$$(1)\qquad (4)\lambda^3+(3)\lambda^2+16(12)\lambda+16(11)=0$$

auflöst. Ihre Wurzeln mögen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genannt werden.

Constatiren wir vor allen Dingen, dass die Discriminante:

$$\Delta^2=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 & \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 & \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3 & \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4\end{vmatrix}$$
$$=\left\{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)\right\}^2$$

in den Coefficienten von (1) berechnet gleich $\frac{64(11)}{(4)^4}\cdot D$ wird. Hierin liegt der Beweis für die schon oben ausgesprochene Behauptung, dass D die Tactinvariante des Kegelschnittbüschels ist (vergl. Clebsch-Lindemann pag. 298).

§ 8.

Die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks.

Die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks, ξ, η, ζ, sind die Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte $r+\lambda_i s$. Man hat daher als Definition von u_ξ, u_η, u_ζ die folgenden Formeln:

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_\xi^2 &= 8(1)\varrho+2\lambda_1\sigma+\lambda_1^2\tau,\\ u_\eta^2 &= 8(1)\varrho+2\lambda_2\sigma+\lambda_2^2\tau,\\ u_\zeta^2 &= 8(1)\varrho+2\lambda_3\sigma+\lambda_3^2\tau. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt durch directe Auflösung:

$$(2)\quad \begin{cases} 8(1)\Delta\varrho=(\lambda_2\lambda_3^2-\lambda_3\lambda_2^2)u_\xi^2+(\lambda_3\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_3^2)u_\eta^2+(\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_2\lambda_1^2)u_\zeta^2,\\ 2\Delta\sigma=(\lambda_2^2-\lambda_3^2)u_\xi^2+(\lambda_3^2-\lambda_1^2)u_\eta^2+(\lambda_1^2-\lambda_2^2)u_\zeta^2,\\ \Delta\tau=(\lambda_3-\lambda_2)u_\xi^2+(\lambda_1-\lambda_3)u_\eta^2+(\lambda_2-\lambda_1)u_\zeta^2, \end{cases}$$

sowie des Ferneren:

$$(3)\quad \begin{cases} 2\Delta(\sigma,\tau,x)=u_\eta u_\zeta(\eta\zeta x)+u_\zeta u_\xi(\zeta\xi x)+u_\xi u_\eta(\xi\eta x),\\ 8(1)\Delta(\tau,\varrho,x)=\lambda_1 u_\eta u_\zeta(\eta\zeta x)+\lambda_2 u_\zeta u_\xi(\zeta\xi x)+\lambda_3 u_\xi u_\eta(\xi\eta x),\\ 16(1)\Delta(\varrho,\sigma,x)=\lambda_1^2 u_\eta u_\zeta(\eta\zeta x)+\lambda_2^2 u_\zeta u_\xi(\zeta\xi x)+\lambda_3^2 u_\xi u_\eta(\xi\eta x). \end{cases}$$

Aus der dritten der Formeln (2) ergiebt sich noch:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\Delta^3(\tau\tau\tau)^2=6\Delta(\xi\eta\zeta)^2, \quad \text{also} \quad (\xi\eta\zeta)^2=\Delta^2\cdot 12(44),\\ &(\xi\eta\zeta)=\sqrt{12(4)}\,\Delta, \end{aligned}$$

sodann aus Formel (1):

$$u_\xi u_\eta u_\zeta(\xi\,\eta\,\zeta) = 16(1)\Delta(\varrho,\sigma,\tau),$$

also:

$$(5)\qquad (\varrho,\sigma,\tau) = \frac{\sqrt{12}(4)}{16(1)}\,u_\xi u_\eta u_\zeta.$$

§ 9.

Die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks.

Um die r, s, t durch die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks auszudrücken, führe ich drei neue Formen R, S, T mittelst der Gleichungen ein:

$$(1)\qquad \begin{aligned} r &= r_\varrho{}^2 R + r_\sigma{}^2 S + r_\tau{}^2 T,\\ s &= s_\varrho{}^2 R + s_\sigma{}^2 S + s_\tau{}^2 T,\\ t &= t_\varrho{}^2 R + t_\sigma{}^2 S + t_\tau{}^2 T. \end{aligned}$$

Ihre zweiten Ueberschiebungen mit ϱ, σ, τ, $u_\xi{}^2$, $u_\eta{}^2$, $u_\zeta{}^2$ haben die Werthe:

$$(2)\qquad \begin{array}{llllll} R_\varrho{}^2=1; & R_\sigma{}^2=0; & R_\tau{}^2=0; & R_\xi{}^2=8(1); & R_\eta{}^2=8(1); & R_\zeta{}^2=8(1);\\ S_\varrho{}^2=0; & S_\sigma{}^2=1; & S_\tau{}^2=0; & S_\xi{}^2=2\lambda_1; & S_\eta{}^2=2\lambda_2; & S_\zeta{}^2=2\lambda_3;\\ T_\varrho{}^2=0; & T_\sigma{}^2=0; & T_\tau{}^2=1; & T_{\xi^2}^2=\lambda_1{}^2; & T_{\eta^2}^2=\lambda_2{}^2; & T_{\zeta^2}^2=\lambda_3{}^2. \end{array}$$

Man hat daher unmittelbar:

$$(3)\qquad \begin{cases} (\xi\eta\zeta)^2 R = 8(1)\{(\eta\zeta x)^2 + (\zeta\xi x)^2 + (\xi\eta x)^2\},\\ (\xi\eta\zeta)^2 S = 2\{\lambda_1(\eta\zeta x)^2 + \lambda_2(\zeta\xi x)^2 + \lambda_3(\xi\eta x)^2\},\\ (\xi\eta\zeta)^2 T = \{\lambda_1{}^2(\eta\zeta x)^2 + \lambda_2{}^2(\zeta\xi x)^2 + \lambda_3{}^2(\xi\eta x)^2\}. \end{cases}$$

Des Weiteren erhält man den Formeln (3) des vorigen Paragraphen entsprechend:

$$(4)\begin{cases} (\xi\eta\zeta)^3(S,T,u) = 2\,\{(\lambda_2\lambda_3{}^2-\lambda_3\lambda_2{}^2)(\zeta\xi x)(\xi\eta x)u_\xi\\ \qquad\qquad +(\lambda_3\lambda_1{}^2-\lambda_1\lambda_3{}^2)(\xi\eta x)(\eta\zeta x)u_\eta+(\lambda_1\lambda_2{}^2-\lambda_2\lambda_1{}^2)(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)u_\zeta\},\\ (\xi\eta\zeta)^3(T,R,u)=8(1)\,\{(\lambda_2{}^2-\lambda_3{}^2(\zeta\xi x)(\xi\eta x)u_\xi+(\lambda_3{}^2-\lambda_1{}^2)(\xi\eta x)(\eta\zeta x)u_\eta\\ \qquad\qquad +(\lambda_1{}^2-\lambda_2{}^2)(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)u_\zeta\},\\ (\xi\eta\zeta)^3(R,S,u)=16(1)\{(\lambda_3-\lambda_2)(\zeta\xi x)(\xi\eta x)u_\xi+(\lambda_1-\lambda_3)(\xi\eta x)(\eta\zeta x)u_\eta\\ \qquad\qquad +(\lambda_2-\lambda_1)(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)u_\zeta\}, \end{cases}$$

endlich für die Determinanten:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\xi\eta\zeta)(R,S,T) &= 16(1)\Delta\cdot(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)(\xi\eta x),\\ (R,S,T) &= \frac{4(1)}{\Delta^3(4)^1}(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)(\xi\eta x), \end{aligned}$$

und:

$$(rst) = D(RST) = \frac{1}{16(1)\Delta}\cdot(\eta\zeta x)(\zeta\xi x)(\xi\eta x).$$

§ 10.

Ueber die Quadrate der Functionaldeterminanten (r, s, t), (ϱ, σ, τ).

Um die Quadrate von (r, s, t), bez. (ϱ, σ, τ) zu berechnen, beweise ich vermöge der nunmehr entwickelten Formeln deren Identität mit den am Schlusse des § 2. betrachteten Determinanten. In der That hat man:

$$\begin{vmatrix} (rru)^2 & (rsu)^2 & (rtu)^2 \\ (rsu)^2 & (ssu)^2 & (stu)^2 \\ (rtu)^2 & (stu)^2 & (ttu)^2 \end{vmatrix} = D^2 \begin{vmatrix} (RRu)^2 & (RSu)^2 & (RTu)^2 \\ (RSu)^2 & (SSu)^2 & (STu)^2 \\ (RTu)^2 & (STu)^3 & (TTu)^2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{D^2 \cdot 256\,\Delta^2(11)}{(\xi\eta\zeta)^{12}} \begin{vmatrix} \left(\widehat{\eta\zeta}\,\widehat{\eta\zeta}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\eta\zeta}\,\widehat{\zeta\xi}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\eta\zeta}\,\widehat{\xi\eta}\,u\right)^2 \\ \left(\eta\zeta\,\widehat{\zeta\xi}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\zeta\xi}\,\widehat{\zeta\xi}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\zeta\xi}\,\widehat{\xi\eta}\,u\right)^2 \\ \left(\widehat{\eta\zeta}\,\widehat{\xi\eta}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\zeta\xi}\,\widehat{\xi\eta}\,u\right)^2 & \left(\widehat{\xi\eta}\,\widehat{\xi\eta}\,u\right)^2 \end{vmatrix} = -\frac{D^2 \cdot 256\,\Delta^2(11)}{(\xi\eta\zeta)^6} \begin{vmatrix} 0 & u_\zeta{}^2 & u_\eta{}^2 \\ u_\zeta{}^2 & 0 & u_\xi{}^2 \\ u_\eta{}^2 & u_\xi{}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{512(11)D^2\Delta^2}{(\xi\eta\zeta)^6}\, u_\xi{}^2 u_\eta{}^2 u_\zeta{}^2 = \frac{512(11)D^2\Delta^2}{(\xi\eta\zeta)^6}\;\frac{128(11)}{(44)}\Big((\varrho\sigma\tau)\Big)^2$$

$$= \frac{512 \cdot 128(1)^4 D^2 \Delta^2}{(4)^8 \cdot 8\Delta^6}\Big((\varrho\sigma\tau)\Big)^2 = \frac{64 \cdot 128(1)^4}{(4)^8 \cdot \Delta^4} \cdot \frac{(4)^8}{64^2(1)^4}\Delta^4\Big((\varrho\sigma\tau)\Big)^2 = 2\Big((\varrho,\sigma,\tau)\Big)^2,$$

und ganz ähnlich:

$$\begin{vmatrix} (\varrho\varrho x)^2 & (\varrho\sigma x)^2 & (\varrho\tau x)^2 \\ (\varrho\sigma x)^2 & (\sigma\sigma x)^2 & (\sigma\tau x)^2 \\ (\varrho\tau x)^2 & (\sigma\tau x)^2 & (\tau\tau x)^2 \end{vmatrix} \cdot 256(11)\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} (\xi\xi x)^2 & (\xi\eta x)^2 & (\xi\zeta x)^2 \\ (\xi\eta x)^2 & (\eta\eta x)^2 & (\eta\zeta x)^2 \\ (\xi\zeta x)^2 & (\eta\zeta x)^2 & (\zeta\zeta x)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\eta\zeta x)^2(\zeta\xi x)^2(\xi\eta x)^2 = 512(11)\Delta^2\Big((r, s, t)^2\Big)^2.$$

Wir haben also unmittelbar nach § 2.:

$$2\Big((r,s,t)\Big)^2 = \begin{cases} -(44)r^3 + \Big(2(34) - 16(224)\Big)r^2 s - \Big((33) - 32(124)\Big)r s^2 \\ \qquad + \Big(4(23) - 12(14)\Big)rst \\ -16(114)s^3 + 4(24)r^2 t + 4(3)s^2 t - (3)rt^2 - 16(12)st^2 \\ \qquad + 4(1)t^3, \end{cases}$$

$$2\Big((\varrho,\sigma,\tau)\Big)^2 = \begin{cases} -8(144)\varrho^3 + 2(34)\varrho\sigma^2 + 2(4)\sigma^3 - \Big((33) - 32(124)\Big)\varrho^2\tau \\ \qquad + \Big(4(23) - 12(14)\Big)\varrho\sigma\tau \\ + \Big(4(13) - 32(122)\Big)\varrho\tau^2 - (3)\sigma^2\tau + 8(12)\sigma\tau^2 - 4(11)\tau^3. \end{cases}$$

Abschnitt III.

Rationale Typik.

§ 11.

Typische Darstellung von zwei Kegelschnitten und einer beliebigen geraden Linie.

Wir adjungiren nunmehr den beiden Kegelschnitten ϱ und s eine beliebige gerade Linie ω_x, und wollen diese drei Gebilde in der Weise typisch darstellen, dass wir als Ecken des Coordinatendreiecks die Pole von ω_x in Bezug auf ϱ, σ, τ wählen. Man hat dann:

$$(1) \qquad \omega_\varrho u_\varrho = u_1, \quad \omega_\sigma u_\sigma = u_2, \quad \omega_\tau u_\tau = u_3$$

und es erscheinen hiernach die Coefficienten ω_1, ω_2, ω_3 der angenommenen Geraden unmittelbar als die Invarianten

$$(2) \qquad \omega_1 = \omega_\varrho^2, \quad \omega_2 = \omega_\sigma^2, \quad \omega_3 = \omega_\tau^2.$$

Es handelt sich jetzt darum, die drei Kegelschnitte r, s, t in der Weise darzustellen, dass möglichst *niedere* simultane Bildungen von ϱ, s, ω bei der Darstellung benutzt werden. Zu dem Zwecke gehe ich von den Formeln (6) des § 2., bez. den Formeln (3) des § 5. aus. Es ist denselben zufolge:

$$(x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ y)^2 = l r_y^2 + m s_y^2 + n t_y^2,$$

also:

$$\begin{aligned} l(ru\omega)^2 + m(su\omega)^2 + n(tu\omega)^2 &= (x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau,\ \widehat{u\omega})^2 \\ &= 2(x_1 u_\varrho^2 + x_2 u_\sigma^2 + x_3 u_\tau^2)(x_1 \omega_\varrho^2 + x_2 \omega_\sigma^2 + x_3 \omega_\tau^2) \\ &\qquad - 2(x_1 u_\varrho \omega_\varrho + x_2 u_\sigma \omega_\sigma + x_3 u_\sigma \omega_\sigma)^2 \\ &= 2(x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau)\omega_x - 2u_x^2, \end{aligned}$$

oder:

$$(3) \qquad u_x^2 = \omega_x(x_1\varrho + x_2\sigma + x_3\tau) - \frac{1}{2}\Big(l(ru\omega)^2 + m(su\omega)^2 + n(tu\omega)^2\Big).$$

Hier braucht man die u nun nur durch die Symbole von r, s, t zu ersetzen. So kommt:

$$\begin{aligned} r &= \omega_x(x_1 r_\varrho^2 + x_2 r_\sigma^2 + x_3 r_\tau^2) - \frac{1}{2}\Big(l(rr\omega)^2 + m(rs\omega)^2 + n(rt\omega)^2\Big), \\ s &= \omega_x(x_1 s_\varrho^2 + x_2 s_\sigma^2 + x_3 s_\tau^2) - \frac{1}{2}\Big(l(rs\omega)^2 + m(ss\omega)^2 + n(st\omega)^2\Big), \\ t &= \omega_x(x_1 t_\varrho^2 + x_2 t_\sigma^2 + x_3 t_\tau^2) - \frac{1}{2}\Big(l(rt\omega)^2 + m(st\omega)^2 + n(tt\omega)^2\Big) \end{aligned}$$

und hieraus nach den Formeln des § 1. das definitive Resultat:

$$\begin{aligned}
r &= \omega_x\Big(6(1)x_1 + 16(12)x_2 + (3)x_3\Big)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(8(1)\omega_1 l + \omega_2 m + \big((3)\omega_1 + 2(1)\omega_3\big)n\Big),\\
s &= \omega_x\Big(2(2)x_1 + (3)x_2 + 3(4)x_3\Big)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(\omega_2 l + \omega_3 m + \big((4)\omega_1 + 2(2)\omega_2\big)n\Big),\\
t &= \omega_x\Big((3)x_1 + \big(2(23) + 6(14)\big)x_2 + 8(24)x_3\Big)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(\big((3)\omega_1 + 2(1)\omega_3\big)l + \big((4)\omega_1 + 2(2)\omega_2\big)m\\
&\qquad + \big(8(24)\omega_1 - 2(4)\omega_2 + (3)\omega_3\big)n\Big).
\end{aligned} \tag{4}$$

Ersetzt man in Formel (3) die u durch die Symbole a eines *beliebigen* weiteren Kegelschnittes a_x^2, so erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
a_x^2 &= \omega_x(x_1 a_\varrho^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2)\\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(l(ar\omega)^2 + m(as\omega)^2 + n(at\omega)^2\Big).
\end{aligned} \tag{4a}$$

Hier treten rechter Hand im Ganzen 13 Invarianten auf:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ a_\varrho^2,\ a_\sigma^2,\ a_\tau^2,\ (a\omega r)^2,\ (a\omega s)^2,\ (a\omega t)^2. \tag{5}$$

Es ist dies genau die richtige Zahl. Denn drei beliebige Kegelschnitte bringen $3 \cdot 6 = 18$ Constante mit sich, denen sich sodann noch die 3 Constante der geraden Linie ω zugesellen, während 8 Constante wegen der linearen Transformationen der Ebene in Abzug zu bringen sind. Die 13 Invarianten (5) sind daher von einander unabhängig.

§ 12.

Typische Darstellung einer Curve vierter Ordnung durch Kegelschnittbüschel und gerade Linie.

Wir wollen nunmehr eine beliebige Curve vierter Ordnung a_x^4 auf das Coordinatensystem des vorigen Paragraphen beziehen. Aus der Formel (3) daselbst ergiebt sich sofort

$$\begin{aligned}
a_x^2 a_\varrho^2 &= \omega_x(x_1 a_\varrho^2 a_{\varrho_1}^2 + x_2 a_\varrho^2 a_\sigma^2 + x_3 a_\varrho^2 a_\tau^2)\\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(l a_\varrho^2 (a\omega r)^2 + m a_\varrho^2 (a\omega s)^2 + n a_\varrho^2 (a\omega t)^2\Big),\\
a_x^2 a_\sigma^2 &= \omega_x(x_1 a_\varrho^2 a_\sigma^2 + x_2 a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2 + x_3 a_\sigma^2 a_\tau^2)\\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(l a_\sigma^2 (a\omega r)^2 + m a_\sigma^2 (a\omega s)^2 + n a_\sigma^2 (a\omega t)^2\Big),\\
a_x^2 a_\tau^2 &= \omega_x(x_1 a_\varrho^2 a_\tau^2 + x_2 a_\sigma^2 a_\tau^2 + x_3 a_\tau^2 a_{\tau_1}^2)\\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(l a_\tau^2 (a\omega r)^2 + m a_\tau^2 (a\omega s)^2 + n a_\tau^2 (a\omega t)^2\Big),
\end{aligned} \tag{1}$$

sowie

$$(1\,\mathrm{a})\quad a_x^4 = \begin{cases} \omega_x^2 (x_1 a_\varrho^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2)(x_1 a_{\varrho_1}^2 + x_2 a_{\sigma_1}^2 + x_3 a_{\tau_1}^2) \\ -\omega_x (x_1 a_\varrho^2 + x_2 a_\sigma^2 + x_3 a_\tau^2)\big(l(a\omega r)^2 + m(a\omega s)^2 + n(a\omega t)^2\big) \\ + \frac{1}{4}\big(l(a\omega r)^2 + m(a\omega s)^2 + n(a\omega t)^2\big) \\ \qquad \cdot \big(l(a\omega r_1)^2 + m(a\omega s_1)^2 + n(a\omega t_1)^2\big). \end{cases}$$

Die $3 \cdot 6 + 15 = 33$ Coefficienten

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{gathered} a_\varrho^2 a_i a_k;\quad a_\sigma^2 a_i a_k;\quad a_\tau^2 a_i a_k; \\ a_1^4,\ a_1^3 a_2,\ \cdots,\ a_3^4 \end{gathered}$$

erscheinen also ohne Weiteres durch folgende 28 Invarianten ausgedrückt:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{II\,a}) & (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \\ (\mathrm{II\,b}) & a_\varrho^2 a_{\varrho_1}^2,\ a_\varrho^2 a_\sigma^2,\ a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2,\ a_\varrho^2 a_\tau^2,\ a_\sigma^2 a_\tau^2,\ a_\tau^2 a_{\tau_1}^2, \\ (\mathrm{II\,c}) & a_\varrho^2 (a\omega r)^2,\ a_\varrho^2 (a\omega s)^2;\ a_\varrho^2 (a\omega t)^2;\ a_\sigma^2 (a\omega r)^2;\ a_\sigma^2 (a\omega s)^2; \\ & \qquad a_\sigma^2 (a\omega t)^2;\ a_\tau^2 (a\omega r)^2;\ a_\tau^2 (a\omega s)^2;\ a_\tau^2 (a\omega t)^2; \\ (\mathrm{II\,d}) & (a\omega r)^2 (a\omega r_1)^2;\ (a\omega r)^2 (a\omega s)^2;\ (a\omega r)^2 (a\omega t)^2; \\ & (a\omega s)^2 (a\omega s_1)^2;\ (a\omega s)^2 (a\omega t)^2;\ (a\omega t)^2 (a\omega t_1)^2. \end{array}$$

Aber nur 22 dieser Invarianten können von einander unabhängig sein. Denn die Curve vierter Ordnung zusammen mit den beiden Kegelschnitten des Büschels und der geraden Linie ω liefern $15 + 2 \cdot 6 + 3 = 30$ Constante, von denen wegen der linearen Transformationen der Ebene noch 8 in Abzug zu bringen sind. *In der That gelingt es nun, die sechs Invarianten* (II d) *als Functionen der* 22 *anderen darzustellen.* Hierzu dienen die Entwickelungen des § 6. Ersetzen wir in der dort gegebenen Determinante H die willkürlichen x durch $\widehat{a\omega}$, so erhalten wir die Determinante:

$$H = \begin{vmatrix} 2a_\varrho^2\omega_1 - 2a_1^2 & a_\varrho^2\omega_2 + a_\sigma^2\omega_1 - 2a_1 a_2 & a_\varrho^2\omega_3 + a_\tau^2\omega_1 - 2a_1 a_3 \\ a_\varrho^2\omega_2 + a_\sigma^2\omega_1 - 2a_1 a_2 & 2a_\sigma^2\omega_2 - 2a_2^2 & a_\sigma^2\omega_3 + a_\tau^2\omega_2 - 2a_2 a_3 \\ a_\varrho^2\omega_3 + a_\tau^2\omega_1 - 2a_1 a_3 & a_\sigma^2\omega_3 + a_\tau^2\omega_2 - 2a_2 a_3 & 2a_\tau^2\omega_3 - 2a_3^2 \end{vmatrix},$$

deren Unterdeterminanten (die wieder H_{ik} genannt sein sollen) die folgenden Werthe haben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} H_{11} &= -(a_\sigma^2\omega_3 - a_\tau^2\omega_2)^2 - 4a_2^2 a_\tau^2\omega_3 - 4a_3^2 a_\sigma^2\omega_2 + 4a_2 a_3 a_\sigma^2\omega_3 \\ &\qquad + 4a_2 a_3 a_\tau^2\omega_2, \\ H_{22} &= -(a_\tau^2\omega_1 - a_\varrho^2\omega_3)^2 - 4a_3^2 a_\varrho^2\omega_1 - 4a_1^2 a_\tau^2\omega_3 + 4a_3 a_1 a_\tau^2\omega_1 \\ &\qquad + 3a_3 a_1 a_\varrho^2\omega_3, \\ H_{33} &= -(a_\varrho^2\omega_2 - a_\sigma^2\omega_1)^2 - 4a_1^2 a_\sigma^2\omega_2 - 4a_2^2 a_\varrho^2\omega_1 + 4a_1 a_2 a_\varrho^2\omega_2 \\ &\qquad + 4a_1 a_2 a_\sigma^2\omega_1, \end{aligned}$$

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
H_{23} = &-(a_\varrho^2\omega_3 - a_\tau^2\omega_1)(a_\sigma^2\omega_1 - a_\varrho^2\omega_2) - 2a_1a_2a_\varrho^2\omega_3 - 2a_1a_2a_\tau^2\omega_1\\
&-2a_1a_3a_\varrho^2\omega_2 - 2a_1a_3a_\sigma^2\omega_1 + 4a_2a_3a_\varrho^2\omega_1\\
&+2a_1^2a_\sigma^2\omega_3 + 2a_1^2a_\tau^2\omega_2,\\
H_{31} = &-(a_\sigma^2\omega_1 - a_\varrho^2\omega_2)(a_\tau^2\omega_2 - a_\sigma^2\omega_3) - 2a_2a_3a_\sigma^2\omega_1 - 2a_2a_3a_\varrho^2\omega_2\\
&-2a_2a_1a_\sigma^2\omega_3 - 2a_1a_2a_\tau^2\omega_2 + 4a_3a_1a_\sigma^2\omega_2\\
&+2a_2^2a_\tau^2\omega_1 + 2a_2^2a_\varrho^2\omega_3,\\
H_{12} = &-(a_\tau^2\omega_2 - a_\tau^2\omega_3)(a_\varrho^2\omega_3 - a_\tau^2\omega_1) - 2a_1a_3a_\tau^2\omega_2 - 2a_3a_1a_\sigma^2\omega_3\\
&-2a_2a_3a_\tau^2\omega_1 - 2a_2a_3a_\varrho^2\omega_3 + 4a_1a_2a_\tau^2\omega_3\\
&+2a_3^2a_\varrho^2\omega_2 + 2a_3^2a_\sigma^2\omega_1,
\end{aligned}
$$

sich also aus den 22 ersten Invarianten (II) zusammensetzen. Aus diesen H_{ik} bilde man sodann dem § 6. zufolge Grössen P_{ik}. Dann geben die Schlussformeln des § 6. gerade das hier gewünschte Resultat. Man erhält nämlich:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
D(ar\omega)^2(ar_1\omega)^2 &= 6(1)P_{11} + 16(12)P_{21} + (3)P_{31},\\
D(as\omega)^2(as_1\omega)^2 &= 2(2)P_{12} + (3)P_{22} + 3(4)P_{32},\\
D(at\omega)^2(at_1\omega)^2 &= (3)P_{13} + \big(2(23) + 6(14)\big)P_{23} + 8(24)P_{33},\\
D(as\omega)^2(at\omega)^2 &= (3)P_{12} + \big(2(23) + 6(14)\big)P_{22} + 8(24)P_{32}\\
&= 2(2)P_{13} + (3)P_{23} + 3(4)P_{33},\\
D(at\omega)^2(as\omega)^2 &= 6(1)P_{13} + 16(12)P_{23} + (3)P_{33}\\
&= (3)P_{11} + \big(2(23) + 6(14)\big)P_{21} + 8(24)P_{31},\\
D(ar\omega)^2(as\omega)^2 &= 2(2)P_{11} + (3)P_{21} + 3(4)P_{31}\\
&= 6(1)P_{12} + 16(12)P_{22} + (3)P_{32}.
\end{aligned}
$$

Ich erwähne noch den speciellen Fall, in welchem s die Polare von ϱ in Bezug auf a_x^4 ist, also

$$s = a_\varrho^2 a_x^2$$

statthat. Es wird dann:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&a_\varrho^2a_{\varrho_1}^2 = 2(2);\quad a_\varrho^2a_\sigma^2 = (3);\quad a_\varrho^2a_\tau^2 = 3(4);\quad a_\varrho^2(a\omega r)^2 = \omega_2;\\
&a_\varrho^2(a\omega s)^2 = \omega_3;\quad a_\varrho^2(a\omega t)^2 = (4)\omega_1 + 2(2)\omega_3;
\end{aligned}
$$

es bleiben also von den 22 Invarianten (IIa), (IIb), (IIc) nur die folgenden 16 übrig:

(IIIa) $(1);\quad (2);\quad (3);\quad (4);\quad \omega_1;\quad \omega_2;\quad \omega_3;$

(IIIb) $a_\sigma^2a_{\sigma_1}^2;\quad a_\sigma^2a_\tau^2;\quad a_\tau^2a_{\tau_1}^2;$

(IIIc) $a_\sigma^2(a\omega r)^2;\quad a_\sigma^2(a\omega s)^2;\quad a_\sigma^2(a\omega t)^2;$
$a_\tau^2(a\omega r)^2;\quad a_\tau^2(a\omega s)^2;\quad a_\tau^2(a\omega t)^2.$

Dieselben sind wieder von einander unabhängig. Denn von den 22 im Allgemeinen vorhandenen unabhängigen Invarianten sind hier, wo s nicht mehr willkürlich ist, die früher für s mitgezählten 6 willkürlichen Constanten in Abzug zu bringen.

§ 13.

Typische Darstellung von drei Kegelschnitten.

Es möge jetzt ausser den beiden Kegelschnitten ϱ und s noch ein dritter $p = p_x^2$ gegeben sein. Drei Kegelschnitte geben in mannigfachster Weise zu linearen Covarianten Anlass. Indem ich eine derselben auswähle und an Stelle der in § 11. eingeführten geraden Linie ω treten lasse, ermöglicht sich eine typische Darstellung, bei welcher nur die Invarianten und simultanen Invarianten der drei Kegelschnitte benutzt werden.

Ich setze insbesondere

$$\omega_x = p_\varrho p_\tau (\varrho \tau x). \tag{1}$$

Dann folgt aus den Formeln (4) des § 11., die ich hier noch einmal hersetze:

$$\begin{aligned} r &= \omega_x\big(6(1)\,x_1 + 16(12)\,x_2 + (3)\,x_3\big) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\Big(8(1)\omega_1 l + \omega_2 m + \big((3)\,\omega_1 + 2(1)\,\omega_3\big)n\Big), \\ s &= \omega_x\big(2(2)\,x_1 + (3)\,x_2 + 3(4)\,x_3\big) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\Big(\omega_2 l + \omega_3 m + \big((4)\,\omega_1 + 2(2)\,\omega_2\big)n\Big), \\ p &= \omega_x\big(x_1 p_\varrho^2 + x_2 p_\sigma^2 + x_3 p_\tau^2\big) \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\Big(l(p\omega r)^2 + m(p\omega s)^2 + n(p\omega t)^2\Big), \end{aligned} \tag{2}$$

dass sich die typischen Coefficienten der Formen r, s, p unmittelbar durch folgende 13 Invarianten darstellen:

(IIa) $\quad (1);\ (2);\ (3);\ (4);$

(IIb) $\quad p_\varrho^2;\ p_\sigma^2;\ p_\tau^2;$

(IIc) $\quad \omega_1 = \omega_\varrho^2;\ \omega_2 = \omega_\sigma^2;\ \omega_3 = \omega_\tau^2;$

(IId) $\quad (p\omega r)^2;\ (p\omega s)^2;\ (p\omega s)^2.$

Hier sind die Formen (IIa) und (IIb) hinreichend einfach. Dagegen werde ich versuchen, die Formen (IIc) und (IId) noch auf niedere Bildungen zurückzuführen. Ich setze dabei zur Abkürzung

$$(p\,p'\,u)^2 = u_\pi^2.$$

Uebrigens benutze ich die Formeln des § 8. Man hat denselben zufolge:

$$(3)\left\{\begin{aligned} \omega_x{}^2 &= \big(p_\varrho\, p_\tau\,(\varrho\,\tau\,x)\big)^2 \\ &= \left\{\begin{aligned} &(4)\,r_\pi{}^2 s + (4)\,s_\pi{}^2 r + t p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 - \tfrac{1}{2}\,t t_\pi{}^2 - (4)\,p_\varrho{}^2\big(p s\ \widehat{\varrho x}\big)^2 \\ &-\tfrac{1}{2}\,p_\tau{}^2\big(p r\ \widehat{\tau x}\big)^2 + (4)\,p_\sigma{}^2\varrho + 2(24)\,(\pi\,\varrho\,x)^2 - \tfrac{3}{2}\,(4)\,(\pi\,\sigma\,x)^2 \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}\,(3)\,(\pi\,\tau\,x)^2, \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

also:

$$(4)\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= -(4)\,p_\varrho{}^2 p_\sigma{}^2 + \tfrac{1}{2}(3)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 - (1)\,p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 + (24)\,r_\pi{}^2 + 3(14)\,s_\pi{}^2 - \tfrac{1}{4}(3)\,t_\pi{}^2, \\ \omega_2 &= -4(24)\,p_\varrho{}^2 p_\sigma{}^2 + 2\big((23) - (14)\big)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 + (4)\,p_\sigma{}^2 p_\sigma{}^2 - \tfrac{1}{2}(3)\,p_\sigma{}^2 p_\tau{}^2 \\ &\quad + \Big(4(224) - \tfrac{1}{4}(34)\Big)\,r_\pi{}^2 + \Big(\tfrac{1}{4}(33) - 4(124)\Big)\,s_\pi{}^2 \\ &\quad + \big(3(14) - (23)\big)\,t_\pi{}^2, \\ \omega_3 &= -2(44)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 + 4(24)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 - (4)\,p_\sigma{}^2 p_\tau{}^2 + \tfrac{3}{2}(44)\,r_\pi{}^2 + \tfrac{1}{2}(34)\,s_\pi{}^2 \\ &\qquad - 2(24)\,t_\pi{}^2, \end{aligned}\right.$$

und

$$(5a)\quad (p\,\omega\,r)^2 = \left\{\begin{aligned} &-2(4)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 p_\sigma{}^2 + (3)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 - 2(1)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 + \tfrac{(4)}{2}\,r_\pi{}^2 p_\sigma{}^2 \\ &-\tfrac{(3)}{4}\,r_\pi{}^2 p_\tau{}^2 + 4(14)\,s_\pi{}^2 p_\varrho{}^2 + (1)\,t_\pi{}^2 p_\tau{}^2 - \tfrac{1}{2}(3)\,t_\pi{}^2 p_\varrho{}^2 \\ &\qquad + \Big(\tfrac{1}{12}(33) - (4)(124)\Big)\,p_\pi{}^2, \end{aligned}\right.$$

$$(5b)\quad (p\,\omega\,s)^2 = \left\{\begin{aligned} &-(4)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 + 2(2)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 - \tfrac{1}{2}\,p_\sigma{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 + \tfrac{1}{2}(4)\,r_\pi{}^2 p_\tau{}^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}(4)\,s_\pi{}^2 p_\sigma{}^2 + \tfrac{1}{2}(4)\,t_\pi{}^2 p_\varrho{}^2 + \tfrac{1}{4}(3)\,s_\pi{}^2 p_\tau{}^2 - (2)\,t_\pi{}^2 p_\tau{}^2 \\ &\qquad - 2(24)\,s_\pi{}^2 p_\varrho{}^2 + \Big(\tfrac{4}{3}(224) - \tfrac{1}{4}(34)\Big)\,p_\pi{}^2, \end{aligned}\right.$$

$$(5c)\quad (p\,\omega\,t)^2 = \left\{\begin{aligned} &-2(44)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 + 4(24)\,p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 - 2(4)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}(3)\,p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 - (1)\,p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 + 2(44)\,p_\varrho{}^2 r_\pi{}^2 + 4(14)\,p_\tau{}^2 s_\pi{}^2 \\ &+ \tfrac{2}{3}(24)\,p_\varrho{}^2 t_\pi{}^2 + \tfrac{1}{2}(4)\,p_\sigma{}^2 t_\pi{}^2 - \tfrac{1}{4}(3)\,p_\tau{}^2 t_\pi{}^2 \\ &\qquad + p_\pi{}^2\Big(\tfrac{1}{3}(234) - 3(144)\Big) \end{aligned}\right.$$

Es lassen sich also die Invarianten (II) *auf die* (IIa), (IIb) *und übrigens die Invarianten* p_π^2, r_π^2, s_π^2, t_π^2 *zurückführen, überhaupt also die typischen Coefficienten von* r, s, p *durch folgende* 11 *Invarianten ausdrücken:*

$$\text{(III)}\qquad (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ p_\varrho^2,\ p_\sigma^2,\ p_\tau^2,\ p_\pi^2,\ r_\pi^2,\ s_\pi^2,\ t_\pi^2.$$

Die Kegelschnitte enthalten $3\cdot 6 = 18$ Constante. Bringt man hier von wegen der linearen Transformationen der Ebene 8 Einheiten in Abzug, so bleiben noch 10 Willkürlichkeiten. *Die* 11 *Invarianten* (III) *sind also nicht von einander unabhängig, sondern es besteht zwischen ihnen eine Relation, die aufzustellen bleibt.*

Derselbe Umstand stellt sich im erhöhten Maasse ein, wenn wir noch einen vierten Kegelschnitt q_x^2 hinzunehmen und diesen auf unsere typische Darstellung beziehen. Wir haben nach § 11. Formel (4a):

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} q_x^2 &= \omega_x(x_1 q_\varrho^2 + x_2 q_\sigma^2 + x_3 q_\tau^2) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\Big(l(q\omega r)^2 + m(q\omega s)^2 + (q\omega t)^2\Big) \end{aligned}$$

und finden für die hier rechter Hand auftretenden Invarianten:

$$(q\omega r)^2,\quad (q\omega s)^2,\quad (q\omega t)^2$$

die folgenden Werthe:

$$\text{(7a)}\quad (q\omega r)^2 = \begin{cases} -2(4)p_\varrho^2 q_\varrho^2 p_\sigma^2 + (3)p_\varrho^2 q_\varrho^2 p_\tau^2 - 2(1)q_\varrho^2 p_\tau^2 p_\tau^2 \\ +(4)(pqr)^2 p_\sigma^2 + 2(24)r_\pi^2 q_\varrho^2 - \frac{1}{2}(4)r_\pi^2 q_\sigma^2 \\ -\frac{1}{2}(3)(pqr)^2 p_\tau^2 + 2(14)s_\pi^2 q_\varrho^2 - 4(14)(pqs)^2 p_\varrho^2 \\ -(1)\,t_\pi^2 q_\tau^2 + 2(1)\,(pqt)^2 q_\tau^2 + q_\pi^2\Big(\frac{1}{4}(33) - 8(124)\Big) \\ +6(14)\Big(sq\,\widehat{\varrho\pi}\Big)^2 - \frac{1}{2}(3)\Big(tq\,\widehat{\varrho\pi}\Big)^2, \end{cases}$$

$$\text{(7b)}\quad (q\omega s)^2 = \begin{cases} -(4)p_\varrho^2 p_\varrho^2 q_\tau^2 + 2(2)p_\varrho^2 p_\tau^2 q_\tau^2 - \frac{1}{2}p_\sigma^2 p_\tau^2 q_\tau^2 + (4)r_\pi^2 q_\tau^2 \\ -\frac{1}{2}(4)(pqr)^2 p_\tau^2 + (4)(pqs)^2 p_\sigma^2 - \frac{1}{2}(4)s_\pi^2 q^{\ 2} + (4)t_\pi^2 q_\varrho^2 \\ +(4)(pqt)^2 p_\varrho^2 + \frac{1}{4}(3)s_\pi^2 q_\tau^2 - (2)t_\pi^2 q_\tau^2 - 4(24)(pqs)^2 p_\varrho^2 \\ +\frac{1}{4}(34)q_\pi^2 + 2(24)\Big(sq\,\widehat{\varrho\pi}\Big)^2 - \frac{3}{2}(4)\Big(tq\,\widehat{\varrho\pi}\Big)^2, \end{cases}$$

$$(7\text{c})\quad (q\omega t)^2 = \begin{cases} \quad -2(44)p_\varrho{}^2 p_\varrho{}^2 q_\varrho{}^2 + 4(24)p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 q_\varrho{}^2 - (4)p_\varrho{}^2 p_\sigma{}^2 q_\tau{}^2 \\ + \frac{1}{2}(3)p_\varrho{}^2 p_\tau{}^2 q_\tau{}^2 - (1)p_\tau{}^2 p_\tau{}^2 q_\tau{}^2 - (4)p_\sigma{}^2 p_\tau{}^2 q_\varrho{}^2 + (44)r_\pi{}^2 q_\varrho{}^2 \\ + (44)(pqr)^2 p_\varrho{}^2 - (34)(pqs)^2 p_\varrho{}^2 + 2(24)r_\pi{}^2 q_\tau{}^2 \\ - 2(24)(pqr)^2 p_\tau{}^2 + 2(14)s_\pi{}^2 q_\tau{}^2 + 2(14)(pqs)^2 p_\tau{}^2 \\ - \frac{1}{2}(4)t_\pi{}^2 q_\sigma{}^2 + (4)(pqt)^2 p_\sigma{}^2 - \frac{1}{4}(3)t_\pi{}^2 q_\tau{}^2 \\ + q_\pi{}^2\big((234) - 3(144)\big) + (34)\big(sq\,\widehat{\varrho\pi}\big)^2 - 4(24)\big(tq\,\widehat{\varrho\pi}\big)^2. \end{cases}$$

Die typischen Coefficienten von r, s, p, q drücken sich also durch folgende 20 Invarianten aus:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{array}{l} (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ p_\varrho{}^2,\ p_\sigma{}^2,\ p_\tau{}^2,\ p_\pi{}^2,\ r_\pi{}^2,\ s_\pi{}^2,\ t_\pi{}^2, \\ (pqr)^2,\ (pqs)^2,\ (pqt)^2,\ q_\pi{}^2,\ q_\varrho{}^2,\ q_\sigma{}^2,\ q_\tau{}^2,\ \big(sq\,\widehat{\varrho\pi}\big)^2,\ \big(tq\,\widehat{\varrho\pi}\big)^2. \end{array}$$

Nun haben 4 Kegelschnitte 24 Constante und es sind also unter den vorstehenden Invarianten nur $24 - 8 = 16$ unabhängige. Anders ausgedrückt: *Zwischen den* 20 *Invarianten* (IV) *bestehen* 4 *Relationen.*

§ 14.

Typische Darstellung von Curve vierter Ordnung und Kegelschnitt.

Es sei nun endlich eine Curve vierter Ordnung $a_x{}^4$ und ein einzelner Kegelschnitt ϱ vorgelegt. Wir bilden uns

$$(1\text{a})\qquad a_x{}^2 a_\varrho{}^2 = s_x{}^2,$$

sodann das System von ϱ und s, setzen ferner:

$$(1\text{b})\qquad a_x{}^2 a_\tau{}^2 = p_x{}^2,\qquad a_x{}^2 a_\sigma{}^2 = q_x{}^2,$$

berechnen:

$$(1\text{c})\qquad p_\varrho p_\tau(\varrho\tau x) = \omega_x$$

und verwenden nunmehr die typische Darstellung des vorigen Paragraphen. Dann folgt (vgl. § 12., Formel (IIIa), (IIIb), (IIIc)), dass sich die typischen Coefficienten von $a_x{}^4$ und ϱ durch folgende Invarianten ausdrücken lassen:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{c} (1),\ (2),\ (3),\ (4),\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \\ p_\tau{}^2,\ p_\sigma{}^2 = q_\tau{}^2,\ q_\sigma{}^2, \\ (p\omega r)^2,\ (p\omega s)^2,\ (p\omega t)^2,\ (q\omega r)^2,\ (q\omega s)^2,\ (q\omega t)^2. \end{array}$$

Diese selbst reduciren sich aber nach § 13., Formel (4), (5), (6), (8) auf folgende:

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ p_\varrho^2,\ p_\sigma^2,\ p_\tau^2,\ p_\pi^2,\ r_\pi^2,\ s_\pi^2,\ t_\pi^2,\ (pqr)^2,\ (pqs)^2,$$
$$(pqt)^2,\ q_\pi^2,\ q_\varrho^2,\ q_\sigma^2,\ q_\tau^2,\ \left(sq\,\widehat{\varrho\pi}\right)^2,\ \left(tq\,\widehat{\varrho\pi}\right)^2,$$

die ihrerseits wieder nach Formel (1) auf folgende zurückkommen:

$$\text{(II)}\quad \begin{gathered} (1);\ (2);\ (3);\ (4);\ a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2;\ a_\sigma^2 a_\tau^2;\ a_\tau^2 a_{\tau_1}^2; \\ a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abr)^2;\ a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abs)^2;\ a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abt)^2;\ a_\sigma^2 b_\tau^2 (abr)^2; \\ a_\sigma^2 b_\tau^2 (abs)^2;\ a_\sigma^2 b_\tau^2 (abt)^2;\ (abc)^2 a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2;\ (abc)^2 a_\tau^2 b_\sigma^2 c_{\tau_1}^2; \\ a_\sigma^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 \left(\widehat{sc}\,\varrho\,\widehat{ab}\right);\ a_\sigma^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 \left(\widehat{tc}\,\varrho\,\widehat{ab}\right)^2. \end{gathered}$$

Diess sind 17 Invarianten. Die Curve vierter Ordnung hat 15, der Kegelschnitt ϱ 6 Constante; *von den* 17 *Invarianten* (II) *sind daher nur* 13 *unabhängig.*

Erlangen, im Januar 1882.

Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires.

Par

H. POINCARÉ à Paris.

---

1. Les fonctions que je veux étudier dans ce travail ont les plus grandes analogies avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. On sait quels services les transcendantes à deux périodes ont rendus à l'analyse; et on comprend que tous les géomètres ont dû avoir l'idée qu'il y avait lieu de les généraliser. Les fonctions elliptiques ont pour propriété essentielle de se reproduire quand on augmente leur argument ζ de l'une des périodes. Le plan se trouve partagé en une infinité de parallélogrammes qui forment une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permutent quand on augmente ζ de l'une des périodes.

Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme $F(\zeta)$ qui ne change pas quand on applique à ζ l'une des substitutions linéaires en nombre infini:

$$S_i = \left(\zeta, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right).$$

Je suppose que l'indice i prend toutes les valeurs 0, 1, 2, $\cdots$ ad inf. et que l'on a:

$$\alpha_0 = \delta_0 = 1, \quad \gamma_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1.$$

En d'autres termes je cherche, s'il y a une fonction uniforme $F(\zeta)$ jouissant de la propriété:

$$F(\zeta) = F\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right).$$

Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est à dire que la portion du plan où la fonction F existe, peut être divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \cdots, R_i, \cdots$ telles que quand ζ parcourt R_0, $\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront comme dans le cas des fonctions elliptiques une sorte de damier dont l'ensemble ne variera pas, mais dont les cases se permuteront, quand on appliquera à ζ l'une des substitutions S_i. A chacune des substitutions S_i correspond de la sorte une des régions R_i.

Si l'on appelle *points correspondants* les divers points $\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$, la fonction F reprendra la même valeur en deux points correspondants et il y aura dans chacune des régions R_i un point correspondant à un point donné et un seul. Deux régions R seront dites *limitrophes* quand elles seront contigües tout le long d'un arc de leur périmètre. Les substitutions qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 seront des *substitutions fondamentales* dont toutes les substitutions S_i seront des combinaisons. Il en résulte que le groupe sera complètement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales et par conséquent quand on connaîtra le polygone R_0 et les polygones limitrophes.

2. Je vais chercher d'abord à former tous les groupes discontinus formés de substitutions S_i où les coëfficients α_i, β_i, γ_i, δ_i sont réels.

Je les appelle groupes Fuchsiens. Dans ce cas, il est aisé de voir que les régions R_i qui forment le *damier* peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de l'axe des quantités réelles (que j'appelle pour abréger X) et ayant des côtés de deux sortes; ceux de la 1ère sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la 2e sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone R_0 en un polygone limitrophe R_1, et par conséquent l'un des côtés de la 1ère sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la 1ère sorte sont en nombre pair et se répartissent en paires de côtés conjugués (ab, cd). Si a', b', c', d' sont les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, on devra avoir:

$$\frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'}=\frac{c-c'}{c-d'}\,\frac{d-d'}{d-c'}\,. \tag{1}$$

Cette condition est suffisante pour qu'il existe une substitution S_i à coëfficients réels, qui change ab en cd; cette substitution est d'ailleurs parfaitement déterminée. Il resulte de là que si l'on se donne le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, les substitutions fondamentales, et par conséquent le groupe lui-même seront parfaitement déterminés.

Nous avons vu qu'on ne pouvait avoir deux points correspondants à l'intérieur de R_0; les points du périmètre, au contraire, se correspondent deux à deux, de manière qu'un côté corresponde à son conjugué. De plus deux ou un plus grand nombre de sommets pourront être des points correspondants. Je dirai alors qu'ils appartiennent à un même cycle.

Voici une règle pratique pour former les cycles; on partira d'un sommet quelconque, on considérera le côté suivant (en parcourant le périmètre de R_0 dans un sens convenu), si ce côté est de la 1ère sorte, puis le côté conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant s'il est de la 1ère sorte, puis son conjugué, etc.; on ne sera arrêté que si l'on arrive à un côté de la 2e sorte, auquel cas le cycle sera *ouvert*, ou si l'on retombe sur le sommet qui a servi de point de départ, auquel cas le cycle sera *fermé*. Tous les sommets rencontrés de la sorte formeront un cycle.

Un cycle fermé sera de la 1ère catégorie si tous ses sommets sont au-dessus de X et de la 2e dans le cas contraire.

Nous avons vu que pour déterminer un groupe Fuchsien il suffit de connaître R_0 et la distribution de ses côtés en paires. On connaît en effet les substitutions fondamentales, et on peut construire les polygones limitrophes de R_0, puis les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe Fuchsien existe, il faut et il suffit que les polygones obtenus de la sorte recouvrent toute une partie du plan et ne la recouvrent qu'une fois, de manière à former un damier.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi? Je les ai déterminées par des procédés empruntés à la géométrie non-euclidienne; j'ai montré qu'outre la condition (1), le polygone R_0 est assujetti à la condition suivante:

La somme des angles qui correspondent aux divers sommets d'un cycle de la 1ère catégorie doit être une partie aliquote de 2π.

3. Pour former tous les groupes Fuchsiens, il suffira donc de former tous les polygones R_0 qui satisfont à ces deux conditions. En voici quelques exemples.

1er cas. Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la 1ère sorte dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant: $A_1, A_2 \cdots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \cdots, B_2, A_1$; les côtés A_1A_2, A_1B_2; A_2A_3, B_2B_3; $\cdots$; A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}; $\cdots$; A_nA_{n+1}, B_nA_{n+1}; seront conjugués, il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets:

$$A_1;\ A_2,\ B_2;\ A_3,\ B_3;\ A_4,\ B_4;\ \cdots;\ A_n,\ B_n;\ A_{n+1}.$$

Le polygone R_0 satisfera à la condition (1) et de plus les angles A_1, A_2+B_2, A_3+B_3, $\cdots$, A_n+B_n, A_{n+1} seront des parties aliquotes de 2π.

Si je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à A_1A_{n+1} et que cette droite est perpendiculaire à X, R_0 se trouvera divisé en deux polygones $R_0'=\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\cdots\mathsf{A}_{n+1}$, et $R_0''=\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3\cdots\mathsf{B}_n\mathsf{A}_{n+1}$ dont tous les angles seront des parties aliquotes de π. Chacun des polygones R_i du damier se trouvera de même divisé en deux polygones R_i' et R_i''. Le damier sera ainsi formé d'une infinité de polygones R_i', R_i'' et de telle sorte que deux polygones limitrophes soient dérivés l'un de l'autre par une transformation par *rayons vecteurs réciproques* qui n'altère pas leur frontière commune. Si on suppose en particulier $n=2$, on retombera sur le cas examiné par M. Schwarz au tome 75 du Journal de Crelle.

2^d cas. Je suppose que les sommets du polygone R_0 soient au nombre de $2n$ et que les côtés opposés soient conjugués. Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme des angles doit être une partie aliquote de 2π. Si n est impair, il y a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang impair, l'autre de tous les sommets de rang pair. La somme de tous les angles de rang pair, comme celle de tous les angles de rang impair devront diviser 2π.

3^e cas. R_0 a 8 sommets $ABCDEFGH$; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la 2^e sorte; les côtés AB et CD, EF et GH sont conjugués; tous les cycles sont *ouverts;* un pareil polygone n'est assujetti à *aucune* condition.

4^e cas. L'un des cas particuliers les plus remarquables est celui où les coëfficients des S_i sont entiers, et qui a fait l'objet des savantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'ai supposé jusqu'ici que les coëfficients des S_i étaient réels; il est facile de faire une première généralisation. Posons:

$$t=\frac{a\xi+b}{c\xi+d},\qquad t_i=\frac{a\left[\dfrac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right]+b}{c\left[\dfrac{\alpha_i\xi+\beta_i}{\gamma_i\xi+\delta_i}\right]+d},$$

a, b, c, d étant quatre constantes imaginaires telles que:

$$ad-bc=1.$$

A la substitution S_i correspond la substitution linéaire:

$$T_i=(t,\ t_i)$$

dont les coëfficients sont imaginaires. Mais de même que les substitutions S_i conservent X et changent également en lui-même le demi-plan qui est au-dessus de cet axe; de même les substitutions T_i conserveront un certain cercle qui a pour équation:

$$\text{partie imaginaire de } \frac{dt-c}{bt-a}=0$$

et que j'appellerai *cercle fondamental.* De plus si les substitutions S_i

forment un groupe discontinu, il en sera de même des substitutions T_i; à chacune d'elles correspondra, comme dans le cas précédent, une case d'un certain damier formé par des polygones R dont les côtés de la 1ère sorte sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental et ceux de la 2e sorte sont des arcs du cercle fondamental. Mais la surface totale de ce damier sera finie (contrairement à ce qui avait lieu dans le cas précédent) car elle ne recouvrira que l'intérieur du cercle fondamental ou une partie seulement de ce cercle. Nous conserverons le nom de Fuchsiens à ces groupes dont les groupes à substitutions réelles ne sont que des cas particuliers.

Reste à examiner le cas le plus général, celui où l'on ne fait aucune hypothèse sur les substitutions S_i. Dans ce cas il y a encore des groupes discontinus que j'ai appelés Kleinéens et dont j'ai démontré l'existence et étudié le mode de génération par des procédés empruntés à la géométrie non-euclidienne à trois dimensions. Dans certains cas particuliers des méthodes plus simples peuvent être employées, mais dans le cas le plus général les conditions aux quelles sont assujettis les groupes Kleinéens sont très compliquées et ne peuvent être énoncées ici. Nous aurons encore un damier dont les cases, en nombre infini, seront des polygones limités par des arcs de cercle, et dont la surface totale sera en général finie.

5. De l'existence des groupes discontinus, on pourrait sans doute par des procédés analogues à ceux de M. Schwarz déduire celle de fonctions uniformes reproduites par les substitutions de ce groupe; mais on n'aurait pas ainsi l'expression explicite de ces transcendantes. Aussi est-il préférable d'employer d'autres méthodes. Mon point de départ est ce fait que la série

$$\sum_i \text{mod.}\ \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

(où m est un entier plus grand que 1) est convergente. Je m'appuie sur ce que l'aire totale du damier est finie: Dans les cas particuliers où cela ne serait pas, un changement linéaire convenablement choisi de la variable nous ramènerait au cas général. La série:

$$\Theta(\zeta) = \sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) \frac{1}{(\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}}$$

où $\mathrm{H}(\zeta)$ est une fonction rationnelle quelconque, est convergente et définit une fonction uniforme de ζ.

Cette fonction jouit de la propriété:

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) = \Theta(\zeta)\ (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}.$$

De plus le nombre des zéros et des infinis de cette fonction intérieurs à R_0 est toujours fini, ce que j'établis par la considération de l'intégrale:

$$\int \frac{\Theta'(\zeta)\,d\zeta}{\Theta(\zeta)}$$

si aucun des angles de R_0 n'est nul, et par un raisonnement plus compliqué dans le cas contraire. $\Theta(\zeta)$ s'appellera une fonction thétafuchsienne ou thétakleinéenne selon que le groupe correspondant sera Fuchsien ou Kleinéen.

Soit $F(\zeta)$ le quotient de deux fonctions telles que $\Theta(\zeta)$ correspondant à une même valeur de m. Il est clair, qu'à l'intérieur de R_0, cette fonction n'aura qu'un nombre fini de zéros et d'infinis et qu'elle jouira de la propriété:

$$F\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) = F(\zeta).$$

Nous appellerons fonction Fuchsienne (ou Kleinéenne) toute fonction jouisant de ces deux propriétés.

Occupons-nous d'abord des fonctions Fuchsiennes. Si le polygone R_0 n'admet pas de cycle ouvert les fonctions Θ et F n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont la circonférence est pour elles une ligne singulière essentielle. Dans certains cas particuliers même, les transcendantes n'existent pas dans tout le cercle fondamental, mais seulement dans un domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental. Si au contraire R_0 admet des cycles ouverts, les fonctions Θ et F existent dans tout le plan et leurs points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Supposons de nouveau que R_0 n'admette pas de cycle ouvert. Si $H(\zeta)$ a des infinis intérieurs au cercle fondamental, la fonction Θ aura des infinis et on sera certain qu'elle n'est pas identiquement nulle. Mais si $H(\zeta)$ ne devient pas infini à l'intérieur du cercle fondamental, la fonction Θ sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle, et pourra même être identiquement nulle. Et en effet on voit aisément que toutes les fonctions Θ *sans infini* peuvent (*pour une même valeur de m*) s'exprimer linéairement par un nombre fini d'entre elles. Ces relations linéaires, dont l'existence se démontre aisément a priori, peuvent être *effectivement* écrites, grâce à la considération de fonction auxiliaires de la forme:

$$(2) \qquad \sum \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)}{\zeta-\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}}\,\frac{1}{(\gamma_i a+\delta_i)^{2m}}.$$

C'est de la même manière qu'on arrive à exprimer une fonction Fuchsienne donnée à l'aide de séries telles que Θ et cela d'une infinité de manières; mais je ne puis insister davantage sur ce point, cela m'entrainerait trop loin.

Passons maintenant aux fonctions Kleinéennes. Les unes existeront dans tout le plan et auront des points singuliers isolés; les autres n'existeront que dans un certain domaine. La limite de ce domaine n'est pas une courbe analytique; la tangente en un de ses points est généralement déterminée, mais il n'en est pas de même du rayon de courbure.

6. Entre deux fonctions Fuchsiennes (ou Kleinéennes) F et F_1 correspondant à un même groupe, il y a toujours une relation algébrique; car à une valeur de F correspondent un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement. Toutes les fonctions qui correspondent à un même groupe s'exprimeront donc rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Quel est le genre de cette relation? La géométrie de situation permet aisément de le déterminer. Soit $2n$ le nombre des côtés de la 1ère sorte, p celui des cycles fermés. Le genre sera: $\frac{n+1-p}{2}$ s'il n'y a pas de cycle ouvert et $n-p$ s'il y en a. Reprenons les exemples que nous avons envisagés plus haut. Dans le 1er cas le genre est nul; dans le 2e il est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ selon que n'est pair ou impair; dans le 3e il est égal à 2.

7. Nous allons voir maintenant comment les fonctions x et y définies plus haut permettent d'intégrer certaines équations linéaires du 2d ordre. Soit:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\zeta}}, \quad v_2 = \zeta\sqrt{\frac{dx}{d\zeta}}$$

la fonction v_1 et v_2 seront des intégrales d'une équation linéaire du 2e ordre de la forme:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y), \tag{4}$$

φ étant rationnel en x et en y; et y étant lié à x par la relation algébrique (3). Ici x est une fonction Fuchsienne ou Kleinéenne du rapport ζ des intégrales. *Il existe donc des équations linéaires de la forme* (4) *telles que la variable indépendante soit une fonction uniforme du rapport des intégrales.*

Il s'agit maintenant, étant donnée une équation de la forme (4), de reconnaître si x est fonction Fuchsienne ou fonction Kleinéenne ou encore, fonction non uniforme du rapport des intégrales et dans les deux premiers cas, d'exprimer x à l'aide des séries Θ. Le second problème peut se résoudre à l'aide des considérations dont j'ai parlé plus haut et qui permettent d'exprimer toute fonction Fuchsienne par les séries Θ. Disons quelques mots du premier problème.

Les conditions auxquelles sont assujetties les coëfficients de l'équation (4) pour que x soit fonction uniforme du rapport des intégrales sont très-compliquées; voici quelle est la forme la plus simple sous laquelle on pourra les présenter; on pourra exprimer les coëfficients de l'équation (4) en fonctions transcendantes, mais *uniformes* d'un nombre égal de paramètres auxiliaires convenablement choisis. Les conditions cherchées se réduiront alors à un certain nombre d'inégalités ou d'égalités *algébriques* entre les parties réelles et imaginaires de ces nouveaux paramètres. Je ne puis ici entrer dans plus de détails.

8. J'ajouterai cependant quelques mots en ce qui concerne le cas le plus simple, celui où l'équation (4) est de la forme:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v \cdot \frac{P_n}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda}$$

P_n étant un polynôme de degré n en x.

Supposons d'abord:

$$(5) \qquad \alpha \leq 2, \ \beta \leq 2, \cdots, \lambda \leq 2, \ n \leq \alpha + \beta + \cdots + \lambda - 2.$$

C'est le cas où les intégrales sont *régulières*, (suivant l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de chacun des points singuliers $a, b, \cdots, l, \infty$. Pour que x soit une fonction uniforme du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit nulle ou soit une partie aliquote de l'unité. Mais cette condition n'est pas suffisante. Si de plus les coëfficients de P_n satisfont à certaines *inégalités*, x sera fonction *Kleinéenne* du rapport des intégrales, s'ils satisfont en outre à certaines *égalités*, x sera fonction *Fuchsienne* de ce rapport. Donc, si l'on suppose remplie la condition relative aux équations déterminantes, il suffit pour que x soit fonction uniforme du rapport (ζ) des intégrales, que certaines quantités soient comprises entre certaines limites; pour que ce soit une fonction Fuchsienne de ce rapport ζ, il faut en outre que ces quantités prennent certaines valeurs déterminées.

Si x est fonction Fuchsienne de z, cette fonction n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Si nous supposons de plus que les racines de chaque équation déterminante soient égales, nous verrons aisément que x ne peut prendre aucune des valeurs $a, b, \cdots, l, \infty$ quand ζ est intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que les inégalités (4) cessent d'avoir lieu, de telle sorte que les intégrales deviennent *irrégulières*. Dans ce cas, x pourra encore être fonction Fuchsienne de ζ, mais cette fonction, au lieu d'exister dans tout le cercle fondamental, n'existera plus que dans un domaine limité par une infinité de circonférences qui coupent orthogonalement ce cercle.

9. Nous avons vu qu'une fonction Fuchsienne peut s'exprimer à l'aide de séries telles que Θ; mais on en peut trouver beaucoup d'autres expressions. Si par exemple x ne peut devenir infini quand ζ est intérieur au cercle fondamental, on pourra exprimer cette fonction par une série toujours convergente et ordonnée suivant les puissances croissantes de $\zeta - \zeta_0$ (ζ_0 étant le centre du cercle fondamental). Dans le cas contraire on pourra représenter x d'une infinité de manières comme le quotient de deux pareilles séries dont on pourra calculer les coëfficients par récurrence. Enfin nous pourrons encore exprimer une fonction Fuchsienne d'une infinité de manières à l'aide de séries telles que (2).

10. J'ai démontré le théorème suivant:

On peut toujours construire une fonction Fuchsienne $F(\zeta)$ n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et ne pouvant prendre à l'intérieur de ce cercle aucune des $n+1$ valeurs données:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty.$$

Le calcul numérique des constantes qui servent à construire cette fonction est assez long; mais si au lieu de calculer exactement ces constantes, on n'en prend que des valeurs approchées, on aura construit, au lieu de $F(\zeta)$, une fonction Kleinéenne jouissant des mêmes propriétés.

Ce théorème a une première conséquence importante. Soit une relation algébrique quelconque:

$$f(x, y) = 0$$

admettant comme points singuliers

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

Faisons-y

$$x = F(\zeta)$$

$F(\zeta)$ étant la fonction définie plus haut; tant que ζ sera à l'intérieur du cercle fondamental, x ne pourra passer par aucun des points singuliers; si ζ sort de ce cercle, x cessera d'exister. Il résulte de là que y est une fonction uniforme de ζ qui n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental et on voit aisément que cette fonction est une fonction Fuchsienne.

Donc les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions Fuchsiennes d'un même paramètre ζ.

11. Considérons maintenant une équation linéaire quelconque:

$$(6) \quad \frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3} \frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0 .$$

Je suppose que les P soient des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique:

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

et qu'on ait fait disparaitre le coëfficient de $\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}$ ce qui est toujours possible. Soient:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

les points singuliers de l'équation (7) et les infinis des P. Faisons, comme dans le paragraphe précédent:

$$x = F(\zeta).$$

On démontrerait par un raisonnement tout semblable à celui qui précède que les n intégrales de l'équation (6) sont des fonctions $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta), \cdots, \varphi_n(\zeta)$ uniformes en ζ et n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Ces fonctions, comme $F(\zeta)$ d'ailleurs, peuvent s'exprimer par des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$ et dont les coëfficients se calculent par récurrence.

12. Je dis que n fonctions:

$$\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \cdots, \varphi_n(\zeta)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes, si elles sont uniformes et si elles jouissent de la propriété:

$$\varphi_\lambda\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right) = \mathsf{A}^i_{1,\lambda}\varphi_1(\zeta) + \mathsf{A}^i_{2,\lambda}\varphi_2(\zeta) + \cdots + \mathsf{A}^i_{n,\lambda}\varphi_n(\zeta). \tag{8}$$

Les A sont des constantes dont le déterminant est l'unité, et les substitutions $\left(\zeta, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right)$ sont toutes celles d'un groupe fuchsien G. Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = \mathsf{A}^i_{1,\lambda}y_1 + \mathsf{A}^i_{2,\lambda}y_2 + \cdots + \mathsf{A}^i_{n,\lambda}y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ du paragraphe précédent sont évidemment des fonctions zétafuchsiennes, ce qui me permet d'énoncer le résultat suivant:

Toute équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques est intégrable par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Mais le procédé indiqué au paragraphe précédent n'est pas unique; au lieu de substituer $F(\zeta)$ à la place de x dans l'équation (6) on aurait pu substituer une infinité d'autres fonctions fuchsiennes et on aurait également obtenu pour les intégrales un système de fonctions zétafuchsiennes. On aurait pu aussi substituer à la place de x une infinité de fonctions Kleinéennes, et les intégrales auraient été des fonctions zétakleinéennes, formées avec un groupe Kleinéen comme les fonctions zétafuchsiennes le sont avec un groupe Fuchsien. Le nombre des integrations de l'équation (6) à l'aide des transcendantes nouvelles est donc infini.

13. Nous ne pourrons dire toutefois que nous avons intégré l'équation (6) que quand nous aurons donné une expression explicite des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$; nous en avons une déjà, il est vrai, sous la forme de séries toujours convergentes et ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$; ou bien encore sous la forme d'un quotient de deux pareilles séries. Mais on peut en donner une expression différente analogue à celle des fonctions Fuchsiennes à l'aide des séries Θ.

Soient (en reprenant les constantes A du paragraphe précédent)

$$a^i_{1,\lambda},\ a^i_{2,\lambda},\ \cdots,\ a^i_{n,\lambda}$$

les mineurs du déterminant des A^i.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme données, et j'énvisage n fonctions rationnelles de ζ, $H_1(\zeta), H_2(\zeta), \cdots, H_n(\zeta)$. Je forme les n séries

$$(9)\quad \Phi_\lambda(\zeta) = \sum_i \left[a^i_{\lambda.1} H_1\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) + a^i_{\lambda.2} H_2\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + a^i_{\lambda.n} H_n\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)\right](\gamma_i\zeta+\delta_i)^{-2m}.$$

Ces séries sont convergentes pourvu que m soit assez grand. Elles jouissent de la propriété:

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right) = [\mathsf{A}^i_{1.\lambda}\Phi_1(\zeta) + \mathsf{A}^i_{2.\lambda}\Phi_2(\zeta) + \cdots + \mathsf{A}^i_{n.\lambda}\Phi_n(\zeta)](\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}.$$

Les n fonctions:

$$\frac{\Phi_\lambda(\zeta}{\Theta(\zeta)}$$

où $\Theta(\zeta)$ est la série du paragraphe (5), sont des fonctions zétafuchsiennes et si l'on considérait un système quelconque de fonctions zétafuchsiennes, on verrait que ces fonctions peuvent toujours s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries de la forme $\Theta(\zeta)$ et de séries de la forme (9).

14. Je n'ai pu donner ici les démonstrations de ces théorèmes, je n'ai pu qu'énoncer des résultats en supprimant tous les raisonnements intermédiaires que je publierai prochainement dans un travail de longue haleine. L'énoncé des résultats eux-mêmes n'a pu être complet, je prie le lecteur de vouloir bien m'excuser.

Je ne parlerai pas ici des applications des fonctions fuchsiennes à l'arithmétique, et au calcul des intégrales abéliennes de 1ère espèce et je me bornerai à résumer en ces quelques lignes les résultats de ce travail:

Si l'on envisage une équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques, on peut exprimer la variable indépendante et les intégrales en fonctions uniformes d'un même paramètre ζ.

*Ces fonctions uniformes peuvent d'une infinité de manières s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries à coëfficients entiers ou rationnels**).

Paris, 17. Décembre 1881.

---

*) Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn Poincaré resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den Comptes Rendus dieses Jahres mitgetheilt hat. Es wird kaum nöthig sein, dieselben der Beachtung der Mathematiker noch besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Functionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den Abel'schen Functionen erfolgreiche Concurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coëfficienten bestimmt sind. Indem ich Herrn Poincaré im Namen der Annalenredaction den besonderen Dank dafür ausspreche, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte entgegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Functionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. Schwarz und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der „fonctions fuchsiennes“, über die Hr. Fuchs selbst nirgends publicirt hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Functionen, welche Hr. Poincaré mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn Poincaré auf die Existenz dieser Functionen aufmerksam gemacht (siehe Comptes Rendus 1881, I, p. 1484). Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein specieller Fall jener allgemeineren Functionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. Schottky im 83ten Bande von Borchardt's Journal. Es werden dort (pag. 346 ff.) Functionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduciren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Uebrigens möchte ich auch auf die Dyck'schen Arbeiten im 17ten und 18ten Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseintheilungen der allgemeinsten hier in Betracht kommen Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. — Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu constatiren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf Riemann'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen functionentheoretischen Programm's, welches Riemann in seiner Doctordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. December 1881.

F. Klein.

Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

Von

Felix Klein in Leipzig.

Im Anschlusse an die vorstehende Note des Hrn. Poincaré will ich einige Sätze veröffentlichen, welche sich auf demselben Gebiete bewegen und der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht unwerth erscheinen. Allerdings muss ich gestehen, dass ich den Hauptsatz bislang nur durch gewissermassen irreguläre Methoden bewiesen habe. Hoffentlich gelingt es mir, dieselben zu ordnen und völlig durchsichtig zu gestalten, und werde ich dieselben dann in ausgearbeiteter Form dem Publicum unterbreiten.

Sei eine Riemann'sche Fläche gegeben, deren p ich, um nicht immer der Ausnahmestellung der niedersten Fälle gedenken zu müssen, grösser als Eins voraussetzen will. So ziehe ich auf derselben irgend p sich selbst und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte A_1, $A_2, \cdots, A_p$. Ich betrachte sodann solche auf der Fläche existirende complexe Functionen des Ortes*), ξ, welche nirgendwo verzweigt sind, auch nirgendwo Kreuzungspunkte besitzen; und die sich nach Durchlaufung eines beliebigen auf der Fläche construirbaren geschlossenen Weges linear $\left(\text{also in der Form } \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)$ reproduciren. Man zeigt leicht, dass es, von linearen Substitutionen abgesehen, denen man das einzelne ξ unterwerfen mag, allemal genau ∞^{3p-3} derartige Functionen ξ giebt. Ich sage nun, *dass unter diesen ξ immer eine und nur eine ausgezeichnete Function η existirt, welche von unserer zerschnittenen Fläche eine besonders einfache Abbildung liefert.* Um nicht durch den Werth $\eta = \infty$ behindert zu sein, will ich mir die complexen Werthe von η auf einer Kugel gedeutet denken. *Dann überdeckt auf der η-Kugel das Bild unserer zerschnittenen Riemann'schen Fläche einen $2p$-fach*

---

*) Wegen dieser Redeweise und den sonstigen im Texte zu Grunde gelegten Anschauungen vergl. meine neuerdings erschienene Schrift: Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig, B. G. Teubner, 1882.

zusammenhängenden, überall einfach ausgebreiteten Flächentheil. — Dieser Flächentheil hat den verschiedenen Ufern der Rückkehrschnitte A_1, $A_2, \cdots, A_p$ entsprechend natürlich $2p$ Randcurven; ich will dieselben resp. mit $A_1', A_2', \cdots, A_p'$ und $A_1'', A_2'', \cdots, A_p''$ bezeichnen.

Alles Folgende ist nun eine einfache Consequenz aus dem hiermit gegebenen Hauptsatze.

Zunächst ist deutlich, dass jede Randcurve A_i' aus der zugehörigen A_i'' durch eine lineare Substitution von η hervorgeht. Wendet man diese Substitution, im positiven oder negativen Sinne, auf unsere Abbildung an, so legt sich ein zweiter Bereich, der die analytische Fortsetzung des ersten ist, neben diesen. Die beiden Bereiche haben die Randcurve A_i' (oder A_i'') gemein, aber collidiren übrigens in keiner Weise. *Die unendlich vielen analytischen Fortsetzungen unserer Abbildung überdecken also die η-Kugel nirgends mehrfach.* Je weiter man sie vervielfältigt, um so mehr nähern sie sich gewissen in unendlicher Zahl vorhandenen singulären Punkten, welche sie indess niemals wirklich erreichen.

Es folgt also: *Von den singulären Werthen η abgesehen entspricht jedem η ein und nur ein Punkt unserer Riemann'schen Fläche.* Oder, indem wir zu den algebraischen Gleichungen übergehen, welche durch die Riemann'sche Fläche definirt werden: *Ist $f(w, z) = 0$ irgend eine algebraische Gleichung, die zu unserer Fläche gehört, so lassen sich w und z als solche eindeutige Functionen von η darstellen, welche sich bei den linearen Substitutionen, die η erfährt, ungeändert reproduciren.* Umgekehrt, wenn wir von dem Fundamentalbereiche auf der η-Kugel und den zugehörigen linearen Substitutionen ausgehen und wir construiren irgend zwei eindeutige Functionen w und z von η, die sich bei diesen Substitutionen reproduciren, und die innerhalb des Fundamentalbereiches nirgendwo eine wesentlich singuläre Stelle besitzen, so besteht zwischen w und z eine algebraische Gleichung, von deren zweckmässig zerschnittener Riemann'scher Fläche der Fundamentalbereich eine conforme Abbildung liefert.

Nun erwachsen aber die linearen Transformationen, denen η unterworfen wird, durch Combination und Wiederholung aus den p linearen Substitutionen, welche die A_i' in die A_i'' überführen. Diese „erzeugenden" Substitutionen sind durch die Gestalt des Fundamentalbereiches an gewisse Ungleichheiten gebunden, aber übrigens unabhängig. Sie enthalten also $3p$ veränderliche Parameter, von denen aber, da η von vorneherein durch ein beliebiges $\frac{a\eta + b}{c\eta + d}$ ersetzt werden kann, drei als unwesentlich in Abzug kommen. *Wir werden also zu einer Darstellung sämmtlicher Gleichungen $f(w, z) = 0$ von gegebenem p geführt, welche genau so viele wesentliche Constanten enthält, als nach der Riemann'schen*

Theorie Moduln vorhanden sind. Und es ist also eine Methode gewiesen, um *alle* Gleichungen, welche zu einem gegebenen p gehören, in independenter Weise aufzustellen.

Ich wünsche nun, wie ich es in meiner Schrift that*), die Aufmerksamkeit insbesondere auf solche Riemann'sche Flächen, beziehungsweise Gleichungen zu lenken, welche durch eindeutige Operationen, mögen dieselben nun directe oder inverse (symmetrische) sein, in sich übergehen. Die Anzahl derselben sei N. Man zeigt, dass η einer jeden solchen Operation entsprechend *lineare* Umformungen erfährt, und *dass also in einem solchen Falle die Gruppe der η-Substitutionen, welche wir seither betrachteten, als ausgezeichnete Untergruppe vom Index N in einer umfassenderen Gruppe linearer Substitutionen enthalten ist;* — ein Satz der sofort umgekehrt werden kann.

Unter den so ausgezeichneten Flächen will ich diejenigen noch näher discutiren, welche *symmetrisch* sind. Es lassen sich dieselben, wie ich l. c. ausführte, durch den Umstand charakterisiren, dass unter den zu ihnen gehörigen algebraischen Gleichungen $f(w, z) = 0$ solche sind, welche durchaus *reelle* Coefficienten besitzen. Als *Curve* gedeutet möge ein solches f λ reelle Züge aufweisen. Dann hat die Riemann'sche Fläche, wie ich mich ausdrückte, λ Uebergangscurven. Und zwar hat man nach dem Werthe von λ und der Lage der Uebergangscurven gegeneinander $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Flächenarten zu unterscheiden, die sich in zwei Hauptclassen einordnen**). Bei den Flächen der ersten Classe kann λ nach Belieben $0, 1, \cdots, p$ sein; die Uebergangscurven müssen aber so liegen, dass die Fläche, längs derselben zerschnitten, noch nicht in Stücke zerfällt. Bei den Flächen der anderen Classe tritt ein solches Zerfallen ein; es ist überdiess $0 < \lambda \leqq p + 1$ und die Differenz $p - \lambda$ eine ungerade Zahl.

Bezüglich dieser symmetrischen Flächen besteht nun zunächst der allgemeine Satz, *dass den λ Uebergangscurven auf der η-Kugel allemal Kreise entsprechen.* Dann aber kann man mit Leichtigkeit angeben, wie man den Fundamentalbereich auf der η-Kugel auszuwählen hat, um jede symmetrische Fläche wenigstens einmal zu erhalten.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst eine symmetrische Fläche der ersten Classe, und verlegen auf ihr λ von den p Rückkehrschnitten in die λ Uebergangscurven, während wir die übrigen $p - \lambda$, was immer möglich ist, sich selbst symmetrisch wählen. *Dann kann man dem Fundamentalbereiche auf der η-Kugel eine solche Lage geben, dass er in Bezug auf den Kugelmittelpunkt sich selbst symmetrisch (also „diametral symmetrisch") ist.* Die beiden Randcurven, welche demselben Rückkehrschnitte A_i entsprechen, sind selbst diametral. Und zwar entsprechen sich auf diesen beiden Randcurven im Falle der λ Uebergangscurven die diametralen Punkte, während auf den übrigen Randcurvenpaaren die zusammengehörigen Punkte gegen die diametrale Lage um 180° gedreht erscheinen. — Das Wichtige ist nun die evidente Bemerkung, dass rückwärts ein so auf der η-Kugel construirter Bereich auch nothwendig zu einer symmetrischen Riemann'schen Fläche der ersten Classe mit λ Uebergangscurven Anlass giebt. —

---

*) Cf. pag. 71 ff.

**) Vergl. auch diesen Annalenband, pag. 159, 160.

Bei der zweiten Classe symmetrischer Flächen verfahre ich in der Weise, dass ich nur $(\lambda - 1)$ der Rückkehrschnitte $A_1, \cdots, A_p$ mit ebensovielen Uebergangscurven zusammenfallen lasse, und die übrigen $(p - \lambda + 1)$ Rückkehrschnitte zu symmetrischen Paaren ordne. *Man kann dann der Abbildung auf der η-Kugel eine solche Gestalt ertheilen, dass sie in Bezug auf einen Meridian, der ganz im Inneren der Abbildung verläuft, symmetrisch ausfällt. Dieser Meridian repräsentirt diejenige Uebergangscurve unserer **Riemann**'schen Fläche, welche nicht als Rückkehrschnitt benutzt wurde.* Den übrigen $(\lambda - 1)$ Uebergangscurven entsprechen dann auf der η-Kugel je zwei zu diesem Meridiane symmetrische Kreise, deren symmetrische Punkte zusammengehören. Die übrigen $2(p - \lambda + 1)$ Randcurven des Bildes aber treten zu je 2 in der Art zu Paaren zusammen, dass immer zwei Paare und auch die Zuordnungen, vermöge deren die Curven im Paare verbunden sind, zu einander in Bezug auf den Meridian symmetrisch sind. — Auch hier wieder gilt die oben bemerkte wichtige, aber evidente Umkehrung. —

Unter den letztgenannten Abbildungen ist augenscheinlich diejenige besonders einfach, welche $\lambda = (p + 1)$ entspricht. Es lässt sich alsdann die ganze auf der η-Kugel in Betracht zu ziehende Figur durch symmetrische Reproduction eines Ausgangsbereiches gewinnen, der von irgend $(p + 1)$ sich nicht schneidenden Kreisen begrenzt wird. Diess ist eben diejenige Figur, welche Hr. Schottky, wie ich in meiner Schlussbemerkung zu Hrn. Poincaré's Note hervorgehoben habe, gelegentlich in Betracht gezogen hat, allerdings ohne ihre principielle Wichtigkeit zu betonen.

Leipzig, den 12. Januar 1882.

Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres.

Par

Emile Picard à Paris.

(I) On sait que **Clebsch** a étendu aux surfaces algébriques la notion de genre si importante dans la théorie des courbes planes (Comptes rendus, décembre 1868) et cette étude a fait depuis l'objet des travaux de plusieurs géomètres, parmi lesquels je citerai M. **Nöther** (Mathematische Annalen). Je considérerai seulement ici des surfaces n'ayant d'autre singularité que des courbes doubles et je supposerai de plus qu'en tous les points de la courbe double, les deux plans tangents à la surface sont distincts. Je rappelle que le genre d'une surface d'ordre n est, d'après **Clebsch**, le nombre des coëfficients restant arbitraires dans une surface d'ordre $n - 4$, passant par la courbe double.

Considérons une surface n'ayant d'autre singularité que celles qui ont été indiquées et telle que les coordonnées d'un quelconque de ses points puissent s'exprimer par des fonctions abéliënnes de deux paramètres α et β. L'objet de cette étude est de montrer *que le genre d'une telle surface est au plus égal à l'unité**): c'est, on le voit, une proposition toute semblable à un théorème bien connu dans la theorie des courbes planes. Nous suivrons la même marche dans la démonstration, aussi m'arrêterai-je tout d'abord sur la proposition relative aux courbes planes et qui peut s'énoncer ainsi: si les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe plane irréductible de degré m

$$F(x, y) = 0 \tag{I}$$

peuvent s'exprimer par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre z, le genre de la courbe ne peut être supérieur à l'unité.

---

*) Cf. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1881, I, p. 1495 ff.

Nous supposerons, comme on le fait souvent dans la théorie des fonctions abéliennes, que l'équation (1) contienne un terme de degré m par rapport à y, et que le rapport $\frac{y}{x}$ ait m valeurs finies et distinctes pour x infini.

Soit $\int \frac{f(x, y)\, dx}{F'_y(x, y)}$ une intégrale abélienne de première espèce relative à l'équation (1).

J'envisage l'expression

$$(2) \qquad \frac{f(x, y)\, \frac{dx}{dz}}{F'_y(x, y)}$$

qui est manifestement, comme x et y, une fonction doublement périodique de z, mais nous allons voir qu'elle n'a pas de pôles et qu'elle se réduit par suite à une constante.

Examinons d'abord ce qu'elle devient pour un pôle $z = \alpha$ de x. Dans le voisinage de $x = \infty$, on aura, puisque l'intégrale est de première espèce

$$\frac{f(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{x^m},$$

$P\left(\frac{1}{x}\right)$ représentant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ et prenant une valeur différente de zéro pour $x = \infty$; m est un entier égal ou supérieur à deux. Si maintenant n désigne le degré de multiplicité du pôle de α; on aura

$$\frac{f(x, y)}{F'_y(x, y)} = (z - \alpha)^{mn}\, P(z - \alpha),$$

$P(z - \alpha)$ représentant d'une manière générale une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - \alpha$, et par suite

$$\frac{f(x, y)\, \frac{dx}{dz}}{F'_y(x, y)} = (z - \alpha)^{(m-1)n-1}\, P(z - \alpha).$$

Or on a certainement

$$(m - 1)\, n > 1,$$

puisque n n'est pas nul et que $m \geq 2$. Par suite l'expression (2) a une valeur finie pour $z = \alpha$.

Soit maintenant z_0 une valeur de z, telle que la valeur correspondante x_0 de x soit un point critique de la fonction algébrique de x, définie par l'équation (1) et désignons par y_0 la valeur de y pour $z = z_0$. A une valeur de z voisine de z_0 correspondent une valeur de x et une valeur de y. Supposons que cette dernière fasse partie d'un certain système circulaire de racines de l'équation (1), relatif au point critique x_0 et soit p le degré de ce système circulaire. Je suppose que ce degré soit réduit autant que possible, c'est à dire que ce ne puisse être qu'après un nombre de tours égal à p ou à un multiple de p de la variable x autour de x_0 que la fonction algébrique y reprenne la même valeur. Il est facile de voir que, dans ces conditions, $z = z_0$ devra être une racine de l'équation $x = x_0$ avec un degré de multiplicité égal à un multiple λp de p $(\lambda \geq 1)$. En effet soit q ce degré de multiplicité; z ayant tourné une fois autour de z_0, x a tourné q fois autour de x_0 et y a nécessairement repris la même valeur; donc $q = \lambda p$.

On a nécessairement d'ailleurs dans le voisinage de $x = x_0$

$$\frac{f(x, y)}{F_y'(x, y)} = \frac{M(x)}{(x - x_0)^{\frac{p}{q}}},$$

$M(x)$ prenant une valeur finie et différente de zéro pour $x = x_0$ et l'entier positif ou négatif q satisfaisant à l'inégalité $q < p$.

$(x - x_0)$ contenant d'autre part en facteur $(z - z_0)^{\lambda p}$, on aura:

$$\frac{f(x, y)\dfrac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)} = (z - z_0)^{\lambda(p-q)-1} P,$$

P prenant une valeur finie et différente de zéro pour $z = z_0$. Mais on a

$$\lambda(p - q) \geq 1,$$

puisque $p - q > 0$ et que l'entier λ est au moins égal à l'unité. Par suite l'expression (2) garde une valeur finie pour $z = z_0$.

Il est donc établi que pour toute valeur finie de z, l'expression (2) a une valeur finie parfaitement déterminée. Cette expression, étant d'ailleurs une fonction doublement périodique, se réduit à une constante.

Ceci posé, supposons que le genre de l'équation (I) soit supérieur à un, il existera au moins une seconde intégrale de première espèce, soit:

$$\int \frac{f_1(x, y)\, dx}{F_y'(x, y)}$$

et l'expression $\dfrac{f_1(x, y)\dfrac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)}$ se réduira aussi à une constante.

Le quotient $\dfrac{f_1(x, y)}{f(x, y)}$ serait donc aussi constant: conclusion inadmissible, car il ne peut exister deux relations distinctes entre x et y.

(II) Nous allons suivre une marche toute semblable pour démontrer le théorème précédemment énoncé. Au lieu d'employer les coordonnées ordinaires x, y, z pour un point de la surface, prenons les coordonnées homogènes x, y, z, t, et soit alors

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de la surface. Nous pouvons supposer que x, y, z, t sont des fonctions uniformes et continues des paramètres α et β

$$x = P_1(\alpha, \beta), \quad y = P_2(\alpha, \beta), \quad z = P_3(\alpha, \beta), \quad t = P_4(\alpha, \beta)$$

et se reproduisant comme les fonctions Θ à un facteur exponentiel près (le même pour toutes) par l'addition à α et β de périodes correspondantes. Il pourra arriver que pour des systemes de valeurs (a, b), un ou plusieurs des rapports $\frac{P_i}{P_j}$ soient indéterminés, mais ces couples de valeurs (a, b) seront en nombre limité, abstraction faite, bien entendu, de multiples des périodes. Ceci revient à dire que pour une fonction abélienne de deux variables α et β, il y a seulement un nombre limité de couples de valeurs de α et β (en faisant abstraction de multiples des périodes), pour lesquelles la fonction est indéterminée. Nous pouvons de plus supposer que les quatre fonctions P ne s'annulent simultanément que pour un nombre limité de couples de valeurs des variables. Cette dernière supposition, dont la justification présente quelques longueurs, n'est d'ailleurs pas indispensable pour notre objet; arrêtons nous simplement sur ce point que pour toute valeur $(\alpha_1 \beta_1)$ de α et β, ne coincidant pas avec un système de valeurs (a, b), et annulant les quatre quantités P, on peut choisir trois des quantités P de telle manière que leur quotient par la quatrième aient pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ des valeurs finies, parfaitement déterminées. Tout d'abord il est clair que ces quotients auront des valeurs parfaitement déterminées, puisque le couple (α_1, β_1) ne coincide pas avec un couple (a, b) d'indétermination. Il s'agit seulement de voir qu'en prenant convenablement une des quantités P et divisant par elle les trois autres, les quotients ont une valeur finie. Or toute quantité P peut se mettre sous la forme:

$$\varphi_n(\alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1) + \varphi_{n+1}(\alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1) + \cdots$$

les φ étant des polynomes homogènes en $\alpha - \alpha_1$ et $\beta - \beta_1$, d'ordres marqués par l'indice. Or prenons pour polynome diviseur celui pour lequel le premier indice n est le plus petit possible: il pourra y en avoir plusieurs pour lesquels n aura la même valeur minima, on prendra l'un quelconque d'entre eux; il est clair que de cette manière, chacun des quotients aura une valeur finie.

Ces préliminaires posés, soit maintenant

$$Q(x, y, z, t) = 0,$$

une surface d'ordre $(n - 4)$ passant par la courbe double de la surface, j'envisage l'expression:

$$(\mu) = \frac{Q(x, y, z, t)\begin{vmatrix} x & y & t \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_z'(x, y, z, t)}.$$

Il est aisé de voir que c'est une fonction quadruplement périodique des variables α et β. En effet chacune des fonctions x, y, z, t se reproduit, par l'addition à α et β de multiples des périodes, multiplié par une expression de la forme $e^{A\alpha+B\beta+C}$, où A, B et C sont des constantes.

Donc $Q(x, y, z, t)$ se reproduit multiplié par $e^{(n-4)(A\alpha+B\beta+C)}$, le dénominateur qui est de degré $(n-1)$ se reproduit multiplié par $e^{(n-1)(A\alpha+B\beta+C)}$, il reste à considérer le déterminant entrant en facteur au numérateur; on reconnaîtra sans peine qu'il se reproduit multiplié par $e^{3(A\alpha+B\beta+C)}$ et par conséquent l'expression (μ) est quadruplement périodique. Nous allons montrer que cette fonction, comme l'expression analogue rencontrée plus haut pour les courbes planes, se réduit a une constante.

(III) Considérons d'abord un système de valeurs (α, β), non équivalent à un système (a, b) précédemment défini, et de plus ne donnant pas un point de la courbe double; je dis que l'expression (μ) a dans ce cas une valeur finie parfaitement déterminée. La proposition est évidente si on n'a pas pour ces valeurs $f_z' = 0$, mais remarquons que l'on a:

$$\begin{aligned} x f_x' + y f_y' + z f_z' + t f_t' &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} f_x' + \frac{\partial y}{\partial \alpha} f_y' + \frac{\partial z}{\partial \alpha} f_z' + \frac{\partial t}{\partial \alpha} f_t' &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} f_x' + \frac{\partial y}{\partial \beta} f_y' + \frac{\partial z}{\partial \beta} f_z' + \frac{\partial t}{\partial \beta} f_t' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut:

$$\frac{\begin{vmatrix} y & z & t \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_x'} = \frac{\begin{vmatrix} z & t & x \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_y'} = \frac{\begin{vmatrix} t & x & y \\ \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_z'}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_t'};$$

or (α, β) ne donnant pas par hypothèse un point de la courbe double, les quatre dénominateurs précédents ne seront pas nuls, et la proposition est dès lors établie. Ceci suppose que le couple (α, β) n'annule pas les quatre quantités P; mais c'est là une difficulté qui se lève aisément. Nous pouvons supposer, comme nous l'avons montré, que $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ aient en (α, β) des valeurs finies, parfaitement déterminées. Si nous revenons, pour un instant, aux coordonnées ordinaires x, y, z, admettons que la dérivée partielle f_z' ne soit pas nulle, l'expression (μ) s'écrira maintenant

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{f_z'(x, y, z)}$$

et on voit qu'elle a en (α, β) une valeur bien déterminée.

(IV) Soit maintenant (α_1, β_1) un couple de valeurs des paramètres donnant un point de la courbe double; je suppose d'ailleurs que $(\alpha_1 \beta_1)$ n'est pas équivalent à un couple (a, b) et j'admets d'abord que $(\alpha_1 \beta_1)$ n'annule pas les quatre fonctions P. Soit t différent de zéro, c'est à dire que $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ ont pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ des valeurs finies. Revenons, comme plus haut, aux coordonnées ordinaires; l'expression (μ) aura les différentes formes

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)}{f_x'(x, y, z)}, \qquad \frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)}{f_y'(x, y, z)},$$

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)}{f_z'(x, y, z)}$$

et

$$\frac{Q(x, y, z)\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_t'(x, y, z)}.$$

Les quatre dénominateurs sont nuls ici pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, mais nous avons maintenant à faire intervenir l'hypothèse que $Q(x, y, z)$ passe par la courbe double de la surface. Soit pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, x_1, y_1 et z_1 les valeurs de x, y et z. Par le point (x_1, y_1, z_1) passent deux nappes de la surface, ayant par hypothèse deux plans tangents différents. Considérons un axe de coordonnées, qui ne soit parallèle à aucun de ces plans tangents; soit l'axe des z. Pour l'une des nappes, on aura dans le voisinage de x_1, y_1

$$(1)\qquad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \varphi(x - x_1,\, y - y_1),$$

φ ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier.

Pour l'autre nappe, on aura pareillement:

$$(2)\qquad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \psi(x - x_1,\, y - y_1)$$

et on n'a pas à la fois $a = a'$ et $b = b'$.

L'équation de la surface donnée pourra évidemment se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, z) \\ &= [z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1)]\,[z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1)] \\ &\quad + P(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1), \end{aligned}$$

P ne renfermant que des termes en $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$ de degré supérieur au second.

On aura:

$$\begin{aligned} f'_z(x, y, z) = z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1) + z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1) \\ + P'_z(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1). \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_1$ on a $x = x_1$, $y = y_1$ et $z = z_1$. Si nous donnons à α et β des valeurs voisines de α_1 et β_1, x, y et z prendront des valeurs voisines de x_1, y_1, z_1 correspondant à des points situés sur l'une ou l'autre des nappes (1) et (2): soit, pour fixer les idées, la nappe (1). Alors, en remplaçant dans $f'_z(x, y, z)$ z par sa valeur tirée du développement (1), on a:

$$f'_z = (a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) + S(x - x_1,\, y - y_1),$$

S ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier.

Passons maintenant à l'expression de $Q(x, y, z)$.

Soit

$$Q(x, y, z) = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + P(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1)$$

cette surface est tangente au point (x_1, y_1, z) à l'intersection des nappes (1) et (2), puis qu'elle doit passer par cette intersection. On a donc:

$$\begin{vmatrix} A & B & -C \\ a & b & +1 \\ a' & b' & +1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$A(b - b') + B(a' - a) - C(ab' - ba') = 0$$

relation qui peut s'écrire

$$(3)\qquad (A + Ca)(b - b') - (B + Cb)(a - a') = 0;$$

or en remplaçant dans $Q(x, y, z)$, z par sa valeur tirée de l'équation (1) on a:

$$Q(x, y, z) = (A + Ca)(x - x_1) + (B + Cb)(y - y_1) + \cdots$$

les termes qui suivent étant de degré supérieur au premier, on a donc

$$\frac{Q(x,y,z)}{f_z'(x,y,z)} = \frac{(A+Ca)(x-x_1)+(B+Cb)(y-y_1)+\cdots}{(a-a')(x-x_1)+(b-b')(y-y_1)+\cdots}$$

et on voit d'après la relation (3) que les coefficients de $x - x_1$ et $y - y_1$ sont proportionnels dans le numérateur et dans le dénominateur. Par suite si le point x, y, z se rapproche sur la nappe (1) du point x_1, y_1, z_1, de telle manière que $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ n'ait pas pour limite $\frac{a'-a}{b-b'}$, l'expression précédente tendra vers une limite parfaitement déterminée. Or cette circonstance est évidemment réalisable et d'une infinité de manières: par suite l'expression (μ), quand α et β tendent respectivement vers α_1 et β_1, tend vers une limite déterminée; nous n'avons, il est vrai, examiné la question que quand α et β tendent vers α_1 et β_1 de telle manière que $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ n'ait pas pour limite $\frac{a'-a}{b-b'}$, mais le cas particulier laissé de côté n'a aucune importance pour la suite de notre démonstration.

J'ai supposé que le couple de valeurs (α_1, β_1) n'annulait pas à la fois les quatre quantités P; il est entièrement évident, d'après les remarques précédemment faites, que cette hypothèse n'amène aucune modification dans la démonstration, si on suppose, bien entendu, que (α_1, β_1) n'est pas équivalent à un couple (a, b).

(V) Nous avons étudié l'expression (μ) pour tout système de valeurs (α_1, β_1) non équivalent à un système (a, b). Cette étude nous a montré que pour un tel système de valeurs, la fonction avait une valeur finie bien déterminée, du moins quand α et β se rapprochaient de α_1 et β_1 d'une manière quelconque, c'est à dire en laissant de côté certains cas tout particuliers. Mais si l'on considère une fonction abélienne de deux variables α et β, on reconnait aisément qu'elle doit nécessairement devenir infinie pour une infinité de couples non équivalents de valeurs de ces variables, c'est à dire qu'il y a une infinité de systèmes (A, B) non équivalents tels que α et β se rapprochant de A et B d'une manière quelconque, la fonction devienne infinie. Or pour l'expression (μ) qui vient d'être étudiée, les couples (a, b), en nombre fini si l'on fait abstraction des multiples des périodes, seraient les seuls qui pourraient la rendre infinie. Cette expression doit par suite se réduire nécessairement à une constante.

(VI) La démonstration s'achève maintenant comme dans le cas des courbes planes. Si la surface est d'un genre supérieur au premier, il existera un second polynome $Q_1(x, y, z, t)$ permettant de former une seconde expression analogue à l'expression (μ). Chacune d'elles étant constante, leur quotient $\frac{Q_1(x, y, z, t)}{Q(x, y, z, t)}$ serait lui-même constant pour tous les points de la surface; mais cette conclusion est inadmissible, car on ne peut avoir deux relations distinctes entre les coordonnées d'un point d'une surface. La proposition énoncée est donc complètement établie: le genre de la surface proposée ne peut être supérieur à l'unité.

Paris, le 19. Janvier 1882.

Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen.

Von

G. Leonhardt in Stettin.

Im 18ten Bande dieser Zeitschrift, Heft 2, pag. 195ff. hat Herr Neumann ausgehend von Formeln, welche die Kegelfunctionen $K_q^{(\mu)}$ und $L_q^{(\mu)}$ durch nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihen ausdrücken, einige Integralformeln über ein Product von Kegelfunctionen gegeben. Es liegt nun der Gedanke nahe zu untersuchen, ob sich nicht ähnliche Integrale über ein Product von adjungirten Kegelfunctionen finden lassen, also Integrale von den Formen

$$\int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{\varrho j}^{(\mu)} \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} K_{qj}^{(\mu)} K_{\varrho j}^{(\mu)} \, d\mu.$$

Mit der Herleitung dieser und ähnlicher Formeln beschäftigt sich die folgende Untersuchung. Was die Bezeichnung anlangt, so werde ich der des Herrn Neumann folgen und mir nur die Aenderung gestatten, den Ausdruck $2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$, nicht wie Herr Neumann mit ψ, sondern Herrn Mehler folgend mit τ zu bezeichnen.

Zu Grunde lege ich den folgenden Untersuchungen die beiden Formeln, welche Herr Neumann § 3. der erwähnten Abhandlung als Formel (19) und (20) bezeichnet hat. Differentiirt man Formel (20) j-mal nach μ, multiplicirt beiderseits mit $(1-\mu^2)^{\frac{j}{2}}$, gebraucht die abkürzende Bezeichnung $K_{qj}^{(\mu)}$ für $(1-\mu^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(\mu)$ und wendet schliesslich Formel (19) an auf das Argument

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \cos\omega \cos\omega_1 + \sin\omega \sin\omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1) \\ &= \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2} \cos(\varphi - \varphi_1), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\qquad C_\varrho K_{\varrho j}^{(\mu)} = \frac{2}{\pi} \sum_0^\infty{}^n \frac{(-1)^n N}{N^2+\varrho^2} P_{nj}^{(\mu)} \\ (2)\qquad C_q L_q^{(\cos\gamma)} = \frac{2}{\pi} \sum_0^\infty{}^n \frac{N}{N^2+q^2} P_n^{(\cos\gamma)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{wo } N = n + \frac{1}{2} \\ \text{und } C_q = \frac{1}{\cos q\pi i}.\end{array}$$

Multiplicirt man das Product beider Formeln mit $\cos j\varphi\, d\mu\, d\varphi$, integrirt nach μ von -1 bis $+1$ und nach φ von 0 bis 2π, setzt abkürzend

$$(3)\qquad P_{nj}^{(\mu)} \cos j\varphi = C_{nj}^{(\mu,\varphi)},$$

$$(4)\qquad K_{\varrho j}^{(\mu)} \cos j\varphi = \mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)},$$

führt die Integration auf der rechten Seite aus, bringt den auftretenden Bruch $\frac{1}{(N^2+q^2)(N^2+\varrho^2)}$ auf die Form $\frac{1}{q^2-\varrho^2}\left[\frac{1}{N^2+\varrho^2} - \frac{1}{N^2+q^2}\right]$ und drückt die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen durch Kegelfunctionen aus, so gelangt man zu der Formel

$$(\mathrm{I})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} L_q^{(\cos\gamma)} \mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)} d\mu\, d\varphi = \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\frac{\mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_\varrho}\right]$$
$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)} \cos q\pi i - \mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)} \cos \varrho\pi i\right].$$

Multiplicirt man das Product der Formeln (1) und (2) nicht mit $\cos j\varphi\, d\mu\, d\varphi$, sondern mit $\sin j\varphi\, d\mu\, d\varphi$ und setzt abkürzend

$$(5)\qquad P_{nj}^{(\mu)} \sin j\varphi = S_{nj}^{(\mu,\varphi)},$$

$$(6)\qquad K_{\varrho j}^{(\mu)} \sin j\varphi = \mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)},$$

so gelangt man durch dieselben Rechnungen zu der Formel

$$(\mathrm{II})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} L_q^{(\cos\gamma)} \mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)} d\mu\, d\varphi = \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\frac{\mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_\varrho}\right]$$
$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)} \cos q\pi i - \mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)} \cos \varrho\,\pi i\right].$$

Multiplicirt man ferner Formel (I) mit α_j und (II) mit β_j, wo α_j und β_j beliebige, nur von j abhängige Constante bedeuten, addirt die beiden Formeln, summirt nach j von 0 bis ∞ und setzt, analog wie in der Theorie der Kugelfunctionen der Ausdruck

$$(7)\qquad \sum_0^\infty{}^j P_{nj}^{(\mu)} (\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi) \text{ mit } Y_n^{(\mu,\varphi)}$$

bezeichnet wird, den hier auftretenden Ausdruck

$$(8)\qquad \sum_{0}^{\infty} K_{\varrho j}^{(\mu)}(\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi) = \mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu,\varphi)}\,,$$

so gelangt man zu der Formel

$$(\mathrm{III})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q^{(\cos\gamma)}\,\mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu,\varphi)}\,d\mu\,d\varphi = \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\frac{\mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{Y}_{q}^{(\mu_1,\varphi_1)}}{C_\varrho}\right]$$

$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu_1,\varphi_1)}\cos q\pi i - \mathfrak{Y}_{q}^{(\mu_1,\varphi_1)}\cos \varrho\pi i\right],$$

welche Formel der aus der Theorie der Kugelfunctionen bekannten Formel

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} P_n^{(\cos\gamma)}\,Y_n^{(\mu,\varphi)}\,d\mu\,d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}\,Y_n^{(\mu_1,\varphi_1)}$$

völlig analog gebildet ist. Es liegt nun nahe, ebenso wie man die Function $Y_n^{(\mu,\varphi)}$ die allgemeine Kugelfunction nennt, die hier eingeführte Function

$$(9)\qquad \mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)} = \sum_{0}^{\infty}{}_j\, K_q^{(\mu)}[\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi]$$

als „allgemeine Kegelfunctionen“ zu bezeichnen.

Aus den Formeln (I) bis (III) erhält man drei weitere Formeln, wenn man beiderseits mit $C_q \cos q\vartheta\, dq$ multiplicirt und nach q von 0 bis ∞ integrirt. Dann tritt auf den linken Seiten das Glied

$$\int_{0}^{\infty} C_q\, L_q^{(\cos\gamma)} \cos q\vartheta\, dq = \frac{1}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\gamma}}$$

auf, und man erhält

$$(\mathrm{I\,a})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)}\,d\mu\,d\varphi}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\gamma}} = 4\int_{0}^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{C}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)} - \mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)}\frac{C_q}{C_\varrho}\right]dq,$$

$$(\mathrm{II\,a})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu,\varphi)}\,d\mu\,d\varphi}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\gamma}} = 4\int_{0}^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{S}_{\varrho j}^{(\mu_1,\varphi_1)} - \mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1,\varphi_1)}\frac{C_q}{C_\varrho}\right]dq,$$

$$(\mathrm{III\,a})\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu,\varphi)}\,d\mu\,d\varphi}{\sqrt{2\cos i\vartheta - 2\cos\gamma}} = 4\int_{0}^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2-\varrho^2}\left[\mathfrak{Y}_{\varrho}^{(\mu_1,\varphi_1)} - \mathfrak{Y}_{q}^{(\mu_1,\varphi_1)}\frac{C_q}{C_\varrho}\right]dq.$$

Um nun zu weiteren Formeln zu gelangen, gehen wir aus von der Formel (I). Entwickeln wir nämlich das dort auftretende $L_q^{(\cos\gamma)}$ nach dem Additionstheorem (die hier nicht abgeleiteten Formeln und die angewendeten Bezeichnungen finden sich sämmtlich in der erwähnten Abhandlung des Herrn Neumann), so ist

$$(10)\qquad L_q^{(\cos\gamma)} = \sum_0^\infty{}^j \varepsilon_j \mathsf{E}_{qj} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu_1)} \cos j(\varphi - \varphi_1)$$

[Voraussetzung $\mu < \mu_1$], wo ε_j eine Constante bedeutet, welche $= 1$ ist für $j = 0$ und $= 2$ für $j = 1, 2, 3, \ldots$ und

$$(11)\qquad \mathsf{E}_{qj} = \frac{(-1)^j}{q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1}},$$

wo

$$(12)\qquad \begin{cases} q_1 \;\; = q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ q_3 \;\; = q^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\ \;\vdots \qquad\quad \vdots \\ q_{2j-1} = q^2 + \left(\frac{2j-1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Setzt man diese Entwickelung in (I) ein, führt die Integration nach φ aus, bringt die von μ freien Glieder auf eine Seite und wendet die Formel, welche für beliebige Werthe von μ_1 gilt, wenn nur $\mu_1 > \mu$, für $\mu_1 = 1$ an, so ergiebt sich, wenn man für $K_q^{(j)}(1)$ und E_{qj} ausserdem ihre Werthe setzt,

$$(\mathrm{IV})\quad \int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{\varrho j}^{(\mu)}\, d\mu = \frac{2(-1)^j}{\pi(q^2-\varrho^2)} \left[\frac{\varrho_1 \cdot \varrho_3 \cdots \varrho_{2j-1}}{C_q} - \frac{q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1}}{C_\varrho}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^j}{\pi(q^2-\varrho^2)} \left[\varrho_1 \cdot \varrho_3 \cdots \varrho_{2j-1} \cdot \cos q\pi i - q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1} \cdot \cos \varrho\pi i\right],$$

welche Formel für $j = 0$ in die von Herrn Neumann § 3., (25) abgeleitete Formel

$$(\mathrm{IV\,a})\quad \int_{-1}^{+1} L_q^{(\mu)} K_\varrho^{(\mu)}\, d\mu = \frac{2}{\pi(q^2-\varrho^2)} \left[\frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_\varrho}\right] = \frac{2[\cos q\pi i - \cos \varrho\pi i]}{\pi(q^2-\varrho^2)}$$

übergeht, womit die gesuchte Integralformel über ein Product von adjungirten Kegelfunctionen gefunden ist.

Wird in (IV) $\varrho = q$, so ergiebt sich

$$(\mathrm{V})\quad \int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)}\, d\mu = (-1)^{j+1} \cdot q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1} \cdot \frac{i \sin q\pi i}{q},$$

welche Formel für $j = 0$ in die von Herrn Neumann § 3., (26) abgeleitete Formel

$$\text{(Va)} \qquad \int_{-1}^{+1} L_q^{(\mu)} K_q^{(\mu)} d\mu = -\frac{i \sin q \pi i}{q}$$

übergeht, und hieraus endlich für $q = 0$

$$\text{(Vb)} \qquad \int_{-1}^{+1} L_0^{(\mu)} K_0^{(\mu)} d\mu = \pi.$$

Aus dieser Formel folgt eine einfache Relation. Drückt man nämlich nach Formel (1) und (2) die Kegelfunctionen $K_0^{(\mu)}$ und $L_0^{(\mu)}$ durch die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen aus und führt die Integration aus, so ergiebt sich

$$\sum_0^{\infty}{}_n \frac{(-1)^n}{N^3} = \frac{\pi^3}{4} \quad \text{oder} \quad \sum_0^{\infty}{}_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Setzt man in (V) erst $q = 0$ und dann $j = 0$, so erhält man

$$\text{(Vc)} \qquad \int_{-1}^{+1} L_{0j}^{(\mu)} K_{0j}^{(\mu)} d\mu = \left(-\frac{1}{2}\right)^j [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)]^2 \cdot \pi,$$

welche Formel für $j = 0$ wiederum in (Vb) übergeht.

Nach analoger Methode, müsste man nun erwarten, liessen sich auch Integrale von den Formen $\int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} L_{\varrho j}^{(\mu)} d\mu$ und $\int_{-1}^{+1} K_{qj}^{(\mu)} K_{\varrho j}^{(\mu)} d\mu$ ableiten. Diese Integralwerthe erscheinen jedoch in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ (man erhält diese Formeln, wenn man in (I) das dort auftretende $L_q^{(\cos\gamma)}$ unter der Voraussetzung $\mu > \mu_1$ nach dem Additionstheorem entwickelt), und in der That verlieren diese Integrale im allgemeinen ihre Bedeutung. Denn da, wie Herr Neumann § 4., 10) gezeigt hat, $L_q^{(\mu)}$ für $\mu = 1$ unendlich wird wie $\log(1-\mu)$, so wird $(L_q^{(j)}(\mu))_{\mu=1}$ unendlich wie $(1-\mu)^{-j}$, also $(L_{qj}^{(\mu)})_{\mu=1}$ unendlich wie $(1-\mu)^{-\frac{j}{2}}$, mithin das Product $(L_{qj}^{(\mu)} L_{\varrho j}^{(\mu)})_{\mu=1}$ und ebenso das Product $(K_{qj}^{(\mu)} K_{\varrho j}^{(\mu)})_{\mu=-1}$ unendlich wie $(1-\mu)^{-j}$ resp. wie $(1+\mu)^{-j}$, so dass das Integral von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ ausgedehnt über diese Producte für $j \geqq 1$ ebenfalls einen unendlich grossen Werth annimmt. Der Fall $j = 0$ ist von Herrn Neumann § 3., 28) abgeleitet worden. Das dortige Resultat erscheint zwar auch in der unbestimmten Form $\infty - \infty$; hier jedoch gelingt es, diese Unbestimmtheit aufzuheben. In Betreff der analogen Formeln, in denen das Product $L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)}$ vorkommt, findet diese Bemerkung keine Anwendung, da hier das Unendlichwerden des einen Factors durch das Nullwerden des anderen compensirt wird. Diese Bemerkung verdanke ich einer brieflichen Mittheilung des Herrn Mehler.

Die hier eingeführte allgemeine Kegelfunction $\mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi}$ gestattet eine Kürzung der Aufgabe, die electrische Vertheilung auf einem Conoide zu bestimmen. Diese Aufgabe ist in ihrer einfachsten Form bereits von Herrn Mehler durch die Methode der reciproken Radii vectores gelöst worden; die allgemeinere Aufgabe hat Herr Neumann § 10. der erwähnten Abhandlung dadurch gelöst, dass für die Dichtigkeit $\varkappa$ der Belegung eine gewisse Entwickelung gesetzt wird; diese ist nun nichts anderes als eine Entwickelung nach allgemeinen Kegelfunctionen. Herr Neumann setzt nämlich*):

$$\varkappa = \tau\sqrt{\tau}\,F(\vartheta,\varphi),\quad \text{wo}\quad \tau = 2\cos i\vartheta - 2\cos\omega \quad\text{und}\quad \vartheta,\ \omega,\ \varphi$$

die dipolaren Coordinaten eines Punktes sind, und macht für $F(\vartheta,\varphi)$ den Ansatz

$$F(\vartheta,\varphi) = \int_0^\infty \sum_0^\infty{}^j \{\alpha_j \cos q\vartheta + \gamma_j \sin q\vartheta) \cos j\varphi \\ + (\beta_j \cos q\vartheta + \delta_j \sin q\vartheta) \sin j\varphi\}\, dq.$$

Setzt man nun

$$\text{(a)}\qquad \alpha_j \cos q\vartheta + \gamma_j \sin q\vartheta = K_{qj}^{(\mu)} f_{qi}^{(\vartheta)},$$

$$\text{(b)}\qquad \beta_j \cos q\vartheta + \delta_j \sin q\vartheta = K_{qj}^{(\mu)} \varphi_{qj}^{(\vartheta)},$$

so wird

$$F(\vartheta,\varphi) = \int_0^\infty \sum_0^\infty{}^j K_{qj}^{(\mu)} (f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi)\, dq.$$

Der Summenausdruck ist aber nichts anderes als eine allgemeine Kegelfunction $\mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}$ d. h. die Dichtigkeit $\varkappa$ ist in eine nach allgemeinen Kegelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt von der Form

---

*) Die nähere Ausführung hat Herr Neumann in der erwähnten Abhandlung nicht gegeben. Ich entnehme sie einer Vorlesung desselben und habe auch in meiner Dissertation „Ueber die Vertheilung der Electricität auf einem durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper; Halle 1881“ dieselbe Methode angewandt, um die Vertheilung der Electricität auf einer Conoidschale zu bestimmen.

$$\varkappa = \tau \sqrt{\tau} \int_0^\infty \mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}\, dq.$$

Nun ist das Potential V eines Conoides

$$V = \int_{\vartheta=-\infty}^{\vartheta=+\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \varkappa T\, d\sigma,$$

wo $\varkappa$ die Dichtigkeit, T die reciproke Entfernung zwischen einem beliebigen Punkte und einem Punkte des Conoids, und $d\sigma$ ein Flächenelement ist.

Entwickelt man nun $\varkappa$ nach allgemeinen Kegelfunctionen, wobei ein Integral nach q von 0 bis ∞ auftritt, und setzt man für T seinen Ausdruck in Kegelfunctionen, wobei noch ein solches Integral auftritt, so ist zunächst der Werth des Integrals

$$\text{(c)} \qquad \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_0^\infty \mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}\, dq \int_0^\infty C_q\, L_q^{(\cos\gamma)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_1)\, dq \right\} d\varphi$$

zu ermitteln, wo

$$\text{(d)} \qquad \mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)} = \sum_0^\infty {}_j\, K_{qj}^{(\mu)} \left(f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi \right),$$

$$\text{(e)} \qquad \cos\gamma = \cos\omega \cos\omega_1 + \sin\omega \sin\omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$
$$= \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\, \sqrt{1-\mu_1^{\,2}} \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Das dreifache Integral in der Klammer kann man nun nach den Formeln, welche Herr Neumann § 6. unter B, B′, B″ gegeben hat, in ein einfaches verwandeln, wenn man setzt

$$\text{(f)} \qquad f_{qj}^{(\vartheta)} = \alpha_j \cos q\vartheta + \gamma_j \sin q\vartheta,$$

$$\text{(g)} \qquad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \beta_j \cos q\vartheta + \delta_j \sin q\vartheta.$$

Entwickelt man ausserdem $L_q^{(\cos\gamma)}$ nach Kegelfunctionen, führt die Integration nach φ aus und setzt abkürzend

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(h)} \qquad & p_{qj}^{(\mu)} = C_q\, \mathsf{E}_{qj}\, L_{qj}^{(\mu)}\, K_{qj}^{(\mu)} \\ \text{(i)} \qquad & \pi_{qj}^{(\mu)} = C_q\, \mathsf{E}_{qj} \left(K_{qj}^{(\mu)}\right)^2 \end{array}\right\},$$

wo $C_q = \dfrac{1}{\cos q\pi i}$ und E_{qj} die bei dem Additionstheorem der Kegelfunctionen auftretende Constante ist, so erhält man nach einigen Rechnungen, deren Einzelheiten ich hier übergehe,

$$\text{(VI)}\qquad \int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\vartheta\int_0^{\infty}\mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}\,dq\int_0^{\infty}C_q\,L_q^{(\cos\gamma)}\cos q\,(\vartheta-\vartheta_1)\right\}d\varphi\Bigg\}$$

$$=2\pi^2\sum_0^{\infty}{}^j\int_0^{\infty}p_{qj}^{(\mu)}\,K_{qj}^{(\mu_1)}\,[f_{qj}^{(\vartheta_1)}\cos j\varphi_1+\varphi_{qj}^{(\vartheta_1)}\sin j\varphi_1]\,dq$$

wenn $\omega_1 < \omega$ also $\mu < \mu_1$,

$$=2\pi^2\sum_0^{\infty}{}^j\int_0^{\infty}\pi_{qj}^{(\mu)}\,L_{qj}^{(\mu_1)}\,[f_{qj}^{(\vartheta_1)}\cos j\varphi_1+\varphi_{qj}^{(\vartheta_1)}\sin j\varphi_1]\,dq$$

wenn $\omega < \omega_1$ also $\mu_1 < \mu$.

Unter Benutzung der letzten Formel lässt sich nun die Vertheilung der Electricität auf einem Conoide leicht bestimmen. Man setze nämlich voraus, dass, ebenso wie sich die electrische Dichtigkeit auf einer Kugel in eine nach allgemeinen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickeln lässt, sich hier die Dichtigkeit nach allgemeinen Kegelfunctionen entwickeln lasse, dass man also setzen kann

$$\text{(k)}\qquad \varkappa=\tau\sqrt{\tau}\int_0^{\infty}\mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}\,dq=\tau\sqrt{\tau}\sum_0^{\infty}{}^j\int_0^{\infty}K_{qj}^{(\mu)}\,[f_{qj}^{(\vartheta)}\cos j\varphi+\varphi_{qj}^{(\vartheta)}\sin j\varphi]\,dq.$$

Ferner ist

$$\text{(l)}\qquad d\sigma=\frac{4a^2\sin\omega\,d\vartheta\,d\varphi}{\tau},$$

$$\text{(m)}\qquad T=\frac{\sqrt{\tau}\sqrt{\tau_a}}{2a}\int_0^{\infty}C_q\,L_q^{(\cos\gamma)}\cos q\,(\vartheta-\vartheta_a)\,dq,$$

folglich das Potential V_a des Conoids auf einen äusseren Punkt ϑ_a, ω_a, φ_a

$$V_a=\int_{\vartheta=-\infty}^{+\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\varkappa\,T\,d\sigma$$

$$=2a\sin\omega\sqrt{\tau_a}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}d\vartheta\int_0^{\infty}\mathfrak{Y}_q^{(\mu,\varphi)}\,dq\int_0^{\infty}C_q\,L^{(\cos\gamma)}\cos q\,(\vartheta-\vartheta_a)\,dq\right\}d\varphi,$$

und unter Benutzung der eben gefundenen Formel (VI)

$$\text{(n)}\qquad V_a=4a\pi^2\sin\omega\sqrt{\tau_a}\sum_0^{\infty}{}^j\int_0^{\infty}p_{qj}^{(\mu)}\,K_{qj}^{(\mu_a)}\,\big[f_{qj}^{(\vartheta_a)}\cos j\varphi_a+\varphi_{qj}^{(\vartheta_a)}\sin j\varphi_a\big]dq,$$

also das Oberflächenpotential

$$(\mathrm{o})\quad \overline{V} = 4a\pi^2 \sin\omega \sqrt{\tau} \sum_0^\infty {}^j \int_0^\infty p_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} \left[f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi\right] dq.$$

Ebenso erhält man das Potential V_j des Conoids auf einen inneren Punkt ϑ_j, ω_j, φ_j unter Benutzung von (VI), wo jetzt aber $\mu_1 < \mu$ ist,

$$(\mathrm{p})\quad V_j = 4a\pi^2 \sin\omega \sqrt{\tau_j} \sum_0^8 {}^j \pi_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu_j)} \left[f_{qj}^{(\vartheta_j)} \cos j\varphi_j + \varphi_{qj}^{(\vartheta_j)} \sin j\varphi_j\right] dq,$$

also das Oberflächenpotential

$$(\mathrm{q})\quad \overline{V} = 4a\pi^2 \sin\omega \sqrt{\tau} \sum_0^\infty {}^j \int_0^\infty \pi_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu)} \left[f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi\right] dq.$$

Nun ist bei der Green'schen Function

$$(\mathrm{r})\quad \overline{V} = \frac{\sqrt{\tau}\sqrt{\tau_\alpha}}{2a} \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos\gamma)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\alpha)\, dq \quad \text{für einen äusseren Centralpunkt } \vartheta_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_\alpha,$$

$$(\mathrm{s})\quad \overline{V} = \frac{\sqrt{\tau}\sqrt{\tau_\iota}}{2a} \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos\gamma)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\iota)\, dq \quad \text{für einen inneren Centralpunkt } \vartheta_\iota, \omega_\iota, \varphi_\iota$$

und zwar ist

$$\omega_\alpha < \omega < \omega_\iota \quad \text{oder} \quad \mu_\iota < \mu < \mu_\alpha.$$

Durch Vergleichung der bezüglichen Formeln für $\overline{V}$ erhält man also im Falle der Green'schen Belegung

$$(\mathrm{VII\,a})\quad f_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\alpha}\, \varepsilon_j\, \mathsf{E}_{qj}}{8a^2\pi^2 \sin\omega\, p_{qj}^{(\mu)}} \; \frac{L_{qj}^{(\mu)}}{K_{qj}^{(\mu)}} \; K_{qj}^{(\mu_\alpha)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\alpha) \cos j\varphi_\alpha,$$

$$(\mathrm{VII\,b})\quad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\alpha}\, \varepsilon_j\, \mathsf{E}_{qj}}{8a^2\pi^2 \sin\omega\, p_{qj}^{(\mu)}} \; \frac{L_{qj}^{(\mu)}}{K_{qj}^{(\mu)}} \; K_{qj}^{(\mu_\alpha)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\alpha) \sin j\varphi_\alpha$$

oder

$$(\mathrm{VIII\,a})\quad f_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\iota}\, \varepsilon_j\, \mathsf{E}_{qj}}{8a^2\pi^2 \sin\omega\, \pi_{qj}^{(\mu)}} \; \frac{K_{qj}^{(\mu)}}{L_{qj}^{(\mu)}} \; L_{qj}^{(\mu_\iota)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\iota) \cos j\varphi_\iota,$$

$$(\mathrm{VIII\,b})\quad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\iota}\, \varepsilon_j\, \mathsf{E}_{qj}}{8a^2\pi^2 \sin\omega\, \pi_{qj}^{(\mu)}} \; \frac{K_{qj}^{(\mu)}}{L_{qj}^{(\mu)}} \; L_{qj}^{(\mu_\iota)} \cos q\,(\vartheta - \vartheta_\iota) \sin j\varphi_\iota.$$

Setzt man hier noch die Werthe von $p_{qj}^{(\mu)}$ und $\pi_{qj}^{(\mu)}$ aus (h) und (i) ein und substituirt die Werthe von $f_{qj}^{(\vartheta)}$ und $\varphi_{qj}^{(\vartheta)}$ in die Entwickelung für $\varkappa$, so erhält man, wenn man $f(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ aus den Formeln (VII) nimmt, die einem äusseren Centralpunkte entsprechende Dichtigkeit der Green'schen Belegung, und, wenn man sie aus (VIII) nimmt, die einem inneren Centralpunkte entsprechende Dichtigkeit, und zwar erhält man genau dieselben Formeln, wie Herr Neumann sie § 10. der erwähnten Abhandlung gefunden hat. Vertauscht man endlich in $f(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ der Formeln (VII) ϑ mit ϑ_a und in den Formeln (VIII) ϑ mit ϑ_j und setzt die hieraus folgenden Werthe von $p_{qj}^{(\mu)} f(\vartheta_a)$ und $p_{qj}^{(\mu)} \varphi(\vartheta_a)$ in die Formel für V_a und die von $\pi_{qj}^{(\mu)} f(\vartheta_j)$ und $\pi_{qj}^{(\mu)} \varphi(\vartheta_j)$ in die Formel für V_j ein, so ergeben sich die Green'schen Functionen in einem äusseren resp. inneren Punkte, und zwar erhält man genau dieselben Formeln, wie Herr Neumann sie § 10. der erwähnten Abhandlung gegeben hat. Eben dieselben Ausdrücke habe ich auch in meiner Dissertation als Specialfälle der Conoidschale gefunden.

Diese Methode lässt sich natürlich auch ohne weiteren Aufwand an Formeln auf eine Conoidschale anwenden, worauf ich jedoch hier verzichte.

Stettin, 10. Januar 1882.

Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

Bekanntlich hat H. **Hankel**, dessen scharfsinnige Publicationen den Verlust, welchen die Wissenschaft durch sein frühzeitiges Hinscheiden zu beklagen hat, aufs deutlichste hervortreten lassen, kurze Zeit vor seinem Ende eine Abhandlung veröffentlicht in Form eines Tübinger Universitätsprogramms (zum 6. März 1870): „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt“.

Es finden sich in dieser Schrift geistvolle, dem damaligen Standpunkte der betreffenden Fragen vollkommen entsprechende, auf genauer Kenntniss der einschlägigen Literatur beruhende, wenn auch in mancher Beziehung nicht ganz strenge Erörterungen über den Umfang des allgemeinen Functionsbegriffs und die ersten beachtenswerthen Versuche, Unterschiede ausfindig zu machen, auf welche eine naturgemässe Classification der betreffenden Begriffsgebiete gegründet werden könne. Jedenfalls hat diese Arbeit anregend auf die bezügliche Richtung der mathematischen Forschung gewirkt, wie man an vielen später erschienenen Untersuchungen anderer Mathematiker ersehen kann, z. B. an dem verdienstvollen Werke von Herrn **Ulisses Dini**: „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali“.

Dasselbe enthält einzelne Kapitel, welche ausdrücklich der genaueren Untersuchung und Umgrenzung von Fragen gewidmet sind, die H. **Hankel**, wesentlich angeregt durch **Riemann**'s Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen, zum ersten Mal in obengenannter Abhandlung einer ausführlichen und selbständigen Besprechung unterzogen hat.

Der interessanteste Abschnitt in der **Hankel**'schen Arbeit, auf dessen völlige Klarstellung die Bestrebungen des Herrn **Dini** mit Erfolg gerichtet waren, bezieht sich auf eine Methode, welche von

Hankel *„Condensationsprincip der Singularitäten“* genannt wird und mit welchem es ihm gelingt, aus Functionen $\varphi(x)$, die an einer gegebenen Stelle, ($x = 0$), irgend eine Singularität (wie etwa eine Unstetigkeit oder den Mangel eines bestimmten Differentialquotienten) darbieten, andere Functionen herzustellen, welche dieselbe Art von Singularität nicht allein an unendlich vielen Stellen zeigen, sondern sogar an einer Mannichfaltigkeit von Stellen, welche, wie ich mich ausdrücke, in jedem Intervalle *überalldicht* ist (s. Mathem. Ann. Bd. XV, pag. 2). Es ist dies die Menge aller Stellen, für welche x eine rationale Zahl ist.

Das besagte Princip besteht einfach in der Bildung folgender Function:

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi\big(\sin(\nu\pi x)\big),$$

wobei durch angemessene Wahl der Reihencoefficienten c_ν für die Convergenz dieser Reihe sowohl, wie der aus ihr hervorgehenden Reihen, soweit letztere gebraucht werden, gesorgt werden muss. —

Diese von Hankel erfundene Methode der Condensation von gegebenen Singularitäten auf alle rationalen Stellen der Veränderlichen x birgt, so einfach sie scheint und so verdienstlich sie zweifellos auch gewesen ist, doch mancherlei Mängel in sich, die schon in einer kurzen Besprechung hervortreten, welche ich sehr bald nach Erscheinen der Hankel'schen Schrift über dieselbe gegeben habe. (M. s. Literarisches Centralblatt v. 1871, pag. 150, v. 18. Februar).

Erstens ist die Untersuchung der Function $f(x)$ dadurch erschwert, dass die auf eine Stelle $x = \frac{p}{q}$ übertragene Singularität an unendlich vielen Gliedern der Reihe gleichzeitig auftritt, nämlich an allen denjenigen Gliedern, in welchen, wenn p und q relativ prim sind, ν ein ein Vielfaches von q ist; dadurch tritt die Möglichkeit einer gegenseitigen Compensation der Irregularitäten ein und es wird bestenfalls die Mühe gefordert, den Nachweis zu führen, dass diese Eventualität nicht vorliege.

Zweitens führt man durch die Anwendung des Sinus unter dem Functionszeichen φ Schwankungen herbei, die den Gang der Function $f(x)$ in überflüssiger und mit dem gesetzten Ziele gar nicht zusammenhängender Weise compliciren.

Drittens endlich entbehrt die Hankel'sche Methode insofern der *Allgemeinheit*, als die Mannichfaltigkeit der Stellen, auf welche die Singularität von $\varphi(x)$ übertragen wird, die Menge der *rationalen Zahlen* ist und es ist nicht abzusehen, in wie weit sich das Princip auf andere Mengen von Singularitätsstellen verallgemeinern liesse.

Nun bildet aber die Menge aller rationalen Zahlen ebenso wie andere Mannichfaltigkeiten, welche viel umfassender und inhaltreicher sind, wie beispielsweise die Menge *aller algebraischen Zahlen*, wie ich vor acht Jahren gefunden, eine sogenannte *abzählbare Menge*, (m. s. Borchardt's J., Bd. 77, pag. 242, Bd. 84, pag. 250, ferner Math. Ann. Bd. XV, pag. 4); d. h. man kann eine solche Menge, *unerachtet* und trotz ihres *Ueberalldichtseins* in jedem Intervalle, (auf viele Weisen) nach einem bestimmten leicht zu definirenden Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede ω_ν, wo ν ein positiver unbeschränkter ganzzahliger Index ist, bringen, so dass jedes Glied oder Element der Menge an einer bestimmten Stelle ν dieser Reihe steht und auch umgekehrt jedes Glied ω_ν der Reihe ein Element der gedachten Mannichfaltigkeit ist. — Diese Bemerkung führt, worauf mich Herr Weierstrass aufmerksam gemacht hat, zu einer viel einfacheren Methode der *Condensation von Singularitäten* als die Hankel'sche ist, und, was die Hauptsache zu sein scheint, es ist diese Methode zugleich frei von allen Umständen, welche die Anwendung jener älteren zugleich beschränken und erschweren. Ist wiederum $\varphi(x)$ eine gegebene Function mit der einzigen singulären Stelle $x = 0$ und hat man eine beliebige *abzählbare* Menge von Werthen, die wir $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots$ nennen, beispielsweise die Menge aller *algebraischen* Zahlen, so setze man:

$$\text{(II)} \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu),$$

wo durch passende Wahl der Coefficienten für die absolute und gleichmässige Convergenz der Reihe für $f(x)$ und nöthigenfalls auch der aus ihr abgeleiteten oder mit ihr zusammenhängenden Reihen gesorgt werde.

Man erhält auf diese Weise Functionen, welche an *allen* Stellen $x = \omega_\mu$ dieselbe Art der Singularität haben, wie $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$, und an den übrigen Stellen, welche von den Stellen ω_μ verschieden sind, wird sich $f(x)$ im Allgemeinen regulär verhalten. Der Vorzug unserer Methode vor der älteren dürfte, neben der einfacheren Bildungsweise, auf den Umstand zurückzuführen zu sein, dass die auf die Stelle $x = \omega_\mu$ übertragene Singularität *ausschliesslich* dem *einen* Gliede der Reihe (II) zu verdanken ist, in welchem $\nu = \mu$ ist, während alle übrigen Glieder, in denen ν von μ verschieden ist, sich an der Stelle $x = \omega_\mu$ regulär verhalten und auch ihre Gesammtheit, bei gehöriger Wahl der Coefficienten c_ν, keine fremdartige Complication herbeiführt.

Auf diese Weise scheint, da sowohl die Function $\varphi(x)$ nach Massgabe des jeweiligen Bedürfnisses und desgleichen auch die *abzählbare*

Menge der Singularitätsstellen ω_μ *frei* gewählt werden können, ein ziemlich weites Feld für singuläre Functionsbildungen und deren Untersuchung eröffnet, welches denjenigen Fachgenossen vielleicht nicht unwillkommen sein wird, die sich für die Ausbildung der Functionenlehre in der auch von Hankel mit Erfolg betretenen Richtung interessiren.

Indem ich mir vorbehalte, auf diesen Gegenstand ausführlicher zurückzukommen, möchte ich hier nur auf zwei besondere Fälle aufmerksam machen, die ich der Güte meines hochverehrten früheren Lehrers, des Herrn Weierstrass verdanke.

Das erste betrifft die Annahme $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, womit bei passender Wahl der positiven Coefficienten c_ν eine Function $f(x)$ gewonnen wird, die endlich und stetig für alle endlichen reellen Werthe von x ist, mit x gleichzeitig zu- und abnimmt, und dennoch die Eigenthümlichkeit hat, an allen Stellen $x = \omega_\mu$ einen unendlich grossen Differentialquotienten zu besitzen. Das zweite Beispiel erlaube ich mir wörtlich, abgesehen von unbedeutenden Vereinfachungen, in der Darlegung des grossen Mathematikers zu geben.

Es sei x eine reelle Veränderliche und:

$$(1) \qquad \varphi(x) = x - \tfrac{1}{2}\, x \sin\left(\tfrac{1}{2} \log(x^2)\right),$$

wo dem Logarithmus von x^2 sein reeller Werth gegeben werden soll; so ist $\varphi(x)$ differentiirbar für jeden von Null verschiedenen Werth der Grösse x und es liegt der Differentialquotient:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \tfrac{1}{2} \sin\left(\tfrac{1}{2} \log(x^2)\right) - \tfrac{1}{2} \cos\left(\tfrac{1}{2} \log(x^2)\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} \log(x^2)\right) \end{aligned}$$

beständig in dem durch die beiden Grenzen $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ bezeichneten Intervalle. Sind daher x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe und setzt man:

$$(3) \qquad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1)\, \varphi(x_1, x_2),$$

so ergiebt sich zunächst für den Fall, wo x_1, x_2 dasselbe Zeichen haben, dass der Werth von $\varphi(x_1, x_2)$ ebenfalls in dem angegebenen Intervalle liegt. Da aber $\varphi(x)$ eine durchweg stetige Function ist, so gilt das Gesagte auch, wenn eine der Grössen x_1, x_2 gleich Null ist. Haben endlich diese Grössen verschiedene Zeichen, so hat man:

$$\varphi(x_2) = x_2\, \varphi(0, x_2), \quad \varphi(x_1) = x_1\, \varphi(x_1, 0),$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1) \left\{ \frac{x_2}{x_2 - x_1}\, \varphi(0, x_2) + \frac{-x_1}{x_2 - x_1}\, \varphi(x_1, 0) \right\}$$

und es ist demnach, da $\frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $\frac{-x_1}{x_2 - x_1}$ positive Grössen und die Summe derselben gleich 1 ist, $\varphi(x_1, x_2)$ ein Mittelwerth zwischen $\varphi(0, x_2)$ und $\varphi(x_1, 0)$, also nach dem eben Bemerkten auch jetzt in dem genannten Intervalle enthalten. Man hat daher in allen Fällen:

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dies vorausgeschickt sei nun:

$$(5) \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_\nu, \cdots$$

irgend eine abzählbare Mannigfaltigkeit von reellen unter einander verschiedenen Zahlwerthen, ferner:

$$(6) \qquad c_1, c_2, c_3, \cdots, c_\nu, \cdots$$

eine unendliche Reihe *positiver* Grössen, welche nur die Bedingungen zu erfüllen hat, dass die *beiden* Reihen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega_\nu]\, c_\nu$$

convergiren. (Ich bemerke, dass was auch die Reihe (5) sei, die Reihe (6) immer so gewählt werden kann, dass diese beiden Bedingungen zugleich realisirt sind. Besonders einfach lässt sich solches erreichen, wenn (5) aus *allen algebraischen* Zahlen in *derjenigen Anordnung* besteht, welche ich in Borchardt's Journal Bd. 77, pag. 259 aufgestellt habe. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass bei dieser Anordnung sämmtlicher reellen algebraischen Zahlen immer $[\omega_\nu] < \nu$; es genügt also in diesem Falle $c_\nu = k^\nu$ zu setzen, um jenen beiden Bedingungen zu genügen, vorausgesetzt nur $k > 0$ und < 1.)

Nun definire man eine Function $f(x)$ mittels der Gleichung:

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi(x - \omega_\nu),$$

so ist $f(x)$ eine continuirliche Function, welche ebenso wie $\varphi(x)$ mit der Veränderlichen x gleichzeitig wächst und abnimmt und über deren Differentiirbarkeit sich folgendes feststellen lässt:

1. Giebt man der Veränderlichen x einen Werth x_0, der *nicht* in der Reihe (5) enthalten ist, so nähert sich der Quotient:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wenn die Veränderliche h irgendwie unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze und diese wird erhalten, wenn man in der angegebenen Reihe (7) von jedem einzelnen Gliede die Ableitung bestimmt und dann $x = x_0$ setzt.

Zunächst folgt aus (2) und der über die Grössen c_ν gemachten Annahme, dass die Reihe:

$$(8) \qquad g(x_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \, \varphi'(x_0 - \omega_\nu)$$

einen bestimmten endlichen Werth hat. Unter μ eine beliebige ganze positive Zahl verstehend, sei nun:

$$(9) \qquad \begin{cases} S_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{\mu} c_\nu \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \\ S_\mu' = \sum\limits_{\mu+1}^{\infty} c_\nu \varphi'(x_0 - \omega_\nu), \end{cases}$$

ferner:

$$(10) \qquad \begin{cases} f_\mu(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\mu} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu), \\ F_\mu(x) = f(x) - f_\mu(x) = \sum\limits_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu \varphi(x - \omega_\nu), \\ C_\mu = \sum\limits_{\nu=\mu+1}^{\infty} c_\nu, \end{cases}$$

so wird:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} + \frac{F_\mu(x_0+h) - F_\mu(x_0)}{h},$$

und es ist nach dem Obigen für einen beliebigen von Null verschiedenen Werth der Grösse h:

$$(11) \qquad C_\mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq \frac{F_\mu(x_0+h) - F_\mu(x_0)}{h} \leqq C_\mu\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Man hat also:

$$(12) \qquad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g(x_0) + \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} - S_\mu - S_\mu' + C_\mu \Theta_\mu,$$

wo:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \Theta_\mu \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nun sei δ eine beliebig klein angenommene positive Grösse, so kann man der Zahl μ einen so grossen Werth geben, dass für jeden Werth von h der absolute Betrag von

$$-S_\mu' + C_\mu \Theta_\mu$$

kleiner als δ ist. Da nun ferner:

$$\lim_{h=0} \frac{f_\mu(x_0+h) - f_\mu(x_0)}{h} = S_\mu,$$

so folgt aus (12), dass der Werth von $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ stets zwischen $g(x_0) - 2\delta$ und $g(x_0) + 2\delta$ liegt, sobald der absolute Betrag von h

unterhalb einer bestimmten Grenze angenommen wird, d. h. dass $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, wenn h unendlich klein wird, sich der bestimmten endlichen Grenze $g(x_0)$ nähert; w. z. b. w.

2. Giebt man dagegen der Veränderlichen x einen in der Reihe (5) enthaltenen Werth ω_λ, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$$

keiner bestimmten Grenze, sondern schwankt zwischen zwei verschiedenen endlichen Grenzen in der Art, dass es unter den Werthen von h, welche kleiner als eine beliebig angenommene Grösse sind, stets solche giebt, für welche der in Rede stehende Quotient einen zwischen den genannten Grenzen beliebig anzunehmenden Werth hat.

Es giebt nämlich unter den Gliedern der Reihe (7) eines, das dem Werthe $\nu=\lambda$ entspricht; trennt man dasselbe ab und setzt:

$$(13)\qquad f(x)=c_\lambda\varphi(x-\omega_\lambda)+F(x),$$

so hat man:

$$(14)\qquad \frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}=c_\lambda\frac{\varphi(h)}{h}+\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega^\lambda)}{h}$$

$$=c_\lambda\left(1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)\right)+\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}\,.$$

Der Quotient $\frac{F(\omega_\lambda+h)-F(\omega_\lambda)}{h}$ nähert sich nach dem unter 1. Bewiesenen, wenn h unendlich klein wird, einer bestimmten endlichen Grenze, die mit $G(\omega_\lambda)$ bezeichnet werde. Die Function $1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\log(h^2)\right)$ kann aber, eine wie kleine obere Grenze man auch für den absoluten Betrag von h festsetzen möge, jeden in dem Intervalle

$$\frac{1}{2}\ldots\frac{3}{2}$$

enthaltenen Werth annehmen.

Der Werth des Quotienten $\frac{f(\omega_\lambda+h)-f(\omega_\lambda)}{h}$ schwankt also in der angegebenen Weise zwischen den Grenzen;

$$\frac{1}{2}c_\lambda+G(\omega_\lambda)\quad\text{und}\quad\frac{3}{2}c_\lambda+G(\omega_\lambda),$$

was man auch so ausdrücken kann:

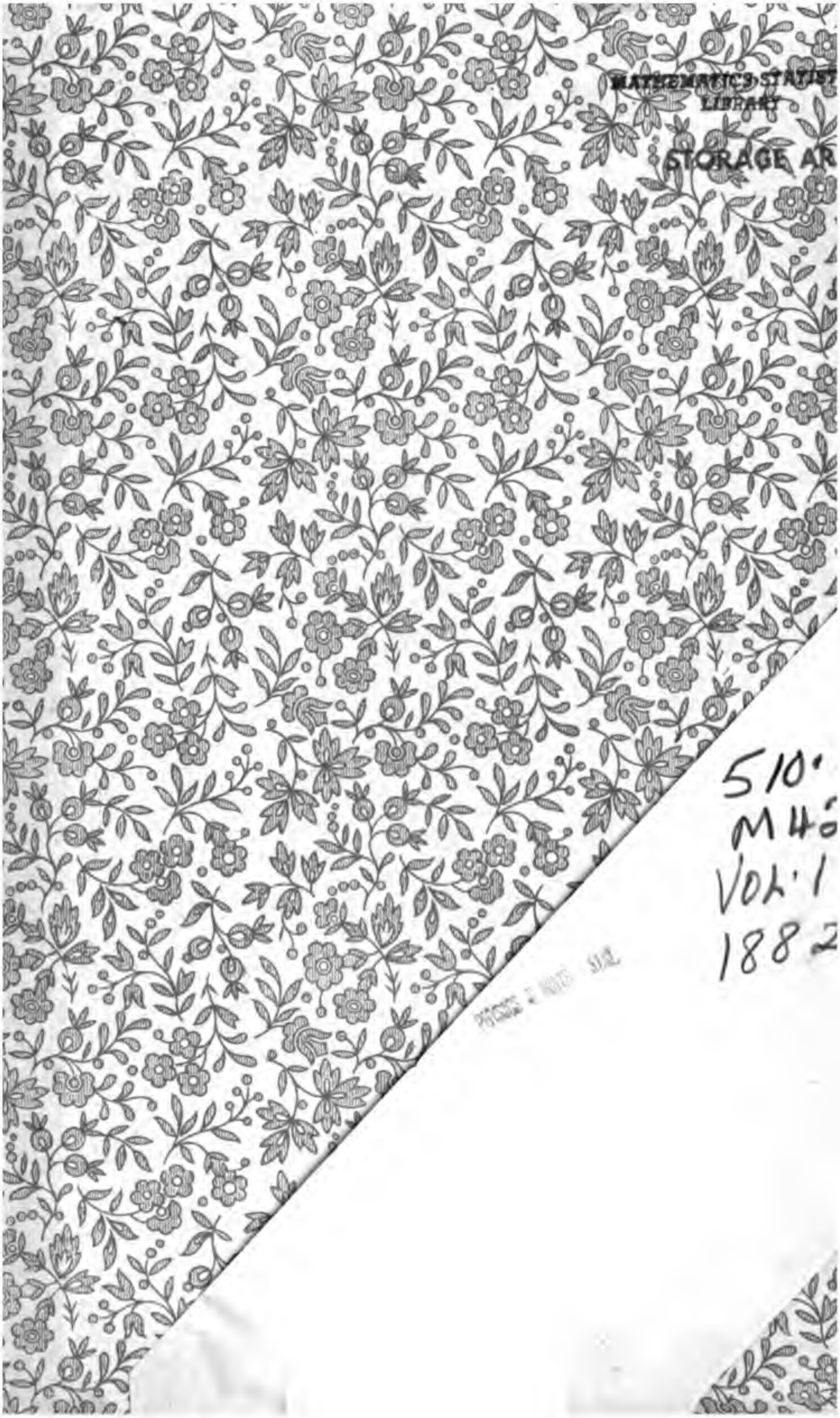
Der in Rede stehende Quotient kann für unendlich kleine Werthe von h jeden zwischen den angegebenen Grenzen liegenden Werth annehmen. Die Function $f(x)$ hat also für die der Reihe $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\lambda,\cdots$ angehörigen Werthe von x keinen bestimmten Differentialquotienten, obwohl der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei gegebenem Werth von x für jeden Werth von h zwischen zwei angebbaren Grenzen bleibt.

Halle a. d. S., den 11. Februar 1882.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

20M-2-60-93874

JAN 1 7 1976



MATHEMATICS-STATIST
LIBRARY

STORAGE AR

510·
M4
Vol. 1
188

PHYSICS & MATH. LIBR.